

Funktionalintegral für Eichpotentiale und bosonische Strings

Bachelorarbeit im Studiengang Physik
an der LMU München
von
Sebastian Gottwald

Oktober 2009

Prüfer

Prof. D. Lüst
Arnold Sommerfeld Center
for theoretical physics
LMU München

Abstract

In dieser Arbeit werden die Beiträge der bedeutenden Physiker R. P. Feynman, L. Faddeev, V. Popov und A. M. Polyakov zum Formalismus der Pfad- bzw. Funktionalintegration behandelt. Nach einer kurzen Einführung in Feynmans Ansatz zur Quantenmechanik durch das Feynman-Pfadintegral, wird beschrieben, wie eine Verallgemeinerung des Pfadintegrals für Eichpotentiale in Yang-Mills-Theorien aufgestellt werden kann. Dabei wird das Ergebnis der üblichen Faddeev-Popov-Methode durch eine geometrische Herleitung und Interpretation ergänzt. Anschließend wird gezeigt, wie Polyakov den Pfadintegral-Begriff in Form einer Summe über Weltflächen für bosonische Strings ausweiten konnte. Dieser Ansatz der Quantisierung bosonischer Strings führt zur selben Bedingung für die Raumzeit-Dimension wie die kanonische Quantisierung, $D = 26$.

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionalintegral in der Quantentheorie	2
1.1	Das Pfadintegral in der Quantenmechanik	2
1.2	Diskretes Funktionalintegral	7
1.3	Kontinuierliches Funktionalintegral	9
2	Funktionalintegral für Eichpotentiale	11
2.1	Eichpotentiale	11
2.2	Die Faddeev-Popov-Wirkung	15
2.3	Geometrische Interpretation der Faddeev-Popov-Determinante	21
3	Funktionalintegral für bosonische Strings	44
3.1	Symmetrien der Polyakov-Wirkung	44
3.2	Konforme Strukturen auf Riemann-Flächen	46
3.3	Riemann-Zusammenhang und Lie-Ableitung	49
3.4	Faddeev-Popov-Methode für Z_0	53
3.5	Konforme Anomalie	58

Einführung

Feynman hat 1948 mit der Einführung des Pfadintegrals ein mächtiges Instrument geschaffen, das simple Prinzip, das jedem Weg zwischen zwei Systemzuständen eine Wahrscheinlichkeitsamplitude zuordnet, deren Phase durch die Wirkung des jeweiligen Weges bestimmt wird und anschließend für die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit alle möglichen Pfade berücksichtigt. Es beinhaltet als klassischen Grenzfall das Prinzip der extremalen Wirkung sowie im Übergang zur lokalen Beschreibung die Dynamik von Quantensystemen in Form der Schrödingergleichung. Wird das Feynman-Pfadintegral für beliebige dynamische Variablen verallgemeinert, sodass die Summation über Pfade durch eine Integration im entsprechenden Variablenraum ersetzt wird, so können Systeme von beliebigen dynamischen Größen, wie beispielsweise Eichpotentiale oder Metriken von Weltflächen, mithilfe dieses Funktionalintegrals quantisiert werden.

Die größte Schwierigkeit besteht darin, das korrekte Integrationsmaß im jeweiligen Variablenraum zu finden. Bei bekannter Metrik kann das natürliche Volumenelement leicht bestimmt werden. Komplikationen treten auf, wenn die zugehörige Wirkung lokale Symmetrien aufweist, denn dann muss das Funktionalintegral auf die Variablen aus dem Integrationsraum beschränkt werden, deren Wirkung verschiedene Werte annimmt. Ist im gesamten Raum der dynamischen Variablen eine Metrik vorhanden, so induziert diese eine Metrik im entsprechenden Orbitraum bzw. im Raum der Äquivalenzklassen der Symmetriegruppe.

In der vorliegenden Arbeit werden wir diese Zusammenhänge zunächst in der Anwendung auf die Eichpotentiale von Yang-Mills-Theorien kennenlernen und anschließend im Rahmen der bosonischen Stringtheorie erneut aufgreifen.

Kapitel 1

Funktionalintegral in der Quantentheorie

1.1 Das Pfadintegral in der Quantenmechanik

Klassische Mechanik. Ein klassisches System mit N Freiheitsgraden wird innerhalb der Lagrangeschen Mechanik durch eine Trajektorie $t \mapsto q(t) := (q^1(t), \dots, q^N(t))$ im N -dimensionalen Konfigurationsraum beschrieben. Die Dynamik des Systems wird durch die Wirkung $S[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$ mit der Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$ bestimmt, denn die klassische Trajektorie bildet das Extremum dieses Funktionals.

Eine alternative Formulierung bietet die Hamiltonsche Mechanik. Hier betrachtet man die verallgemeinerten Koordinaten q^k und kanonischen Impulse $p_k := \partial L / \partial \dot{q}^k$ als dynamische Variablen in einem $2N$ -dimensionalen Phasenraum. Die Hamiltonfunktion bildet die Legendre-Transformierte der Lagrangefunktion¹:

$$H(q, p, t) := p_k \dot{q}^k(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t). \quad (1.1)$$

Sie existiert nur in Systemen, in denen die Geschwindigkeiten als Funktionen der Impulse und Koordinaten ausgedrückt werden können, in sog. kanonischen Systemen. Hier bestimmt sie die Dynamik durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen $\dot{q} = \partial H / \partial p$, $\dot{p} = -\partial H / \partial q$. Auch die Zeitentwicklung einer Observablen $A(q, p, t)$ können wir aus der Hamiltonfunktion gewinnen,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (1.2)$$

bzw. in Kurzschreibweise mit der *Poissonklammer* $\{A, B\} := \partial A / \partial q \partial B / \partial p - \partial A / \partial p \partial B / \partial q$,

$$\{A, H\} = \frac{dA}{dt} - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (1.3)$$

¹Summation über Indizes, die doppelt (meist versetzt oben und unten) auftreten.

Kanonische Quantisierung. In der axiomatischen Quantenmechanik wird der Zustand eines Quantensystems durch einen Vektor $|\psi\rangle$ aus einem abstrakten Hilbertraum beschrieben. Bei der *kanonischen Quantisierung* eines klassischen Systems, also dem Übergang zur quantentheoretischen Beschreibung, werden die physikalischen Observablen durch Operatoren auf dem Hilbertraum ersetzt. Die kanonischen Variablen p_k, q^k ($k = 1, \dots, N$) des Systems werden zu Operatoren P_k, Q^k , welche die Kommutatorrelationen $[P_k, Q^l] = i\hbar \delta_k^l$ erfüllen. Allgemein sind die Operatoren eines Quantensystems so definiert, dass ihre Kommutatoren² bis auf einen Faktor $i\hbar$ gleich den entsprechenden klassischen Poissonklammern sind. Man erhält die Quantenbedingungen zweier Operatoren, indem man die rechte Seite ihrer Poissonklammerrelation mit $i\hbar$ multipliziert und die Klammer durch den Kommutator ersetzt:

$$\{ \ , \ } \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\ , \]. \quad (1.4)$$

Im sog. Heisenbergbild der Quantenmechanik wird die Dynamik durch die Zeitabhängigkeit der Operatoren beschrieben. Hier erhält man mit der Vorschrift (1.4) aus (1.3) die Heisenberggleichung

$$\frac{i}{\hbar} [H, A] = \frac{dA}{dt} - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Im äquivalenten Schrödingerbild sind die Zustände die dynamischen Variablen, d.h. $|\psi\rangle$ ist zeitabhängig und erfüllt die Bewegungsgleichung

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = H(P, Q, t) |\psi\rangle. \quad (1.6)$$

Diese nach Schrödinger benannte Differentialgleichung bestimmt über den Hamiltonoperator die Eigenschaften eines Zustands zu einer bestimmten Zeit aus dem Wissen zu einem unmittelbar früheren Zeitpunkt, analog zu Newtons Idee, die Dynamik eines mechanischen Systems durch dessen Verhalten in infinitesimalen Zeitintervallen zu beschreiben. 1948 schlug Richard P. Feynman [1] einen weiteren Formalismus vor, der auf Operatoren verzichtet und in dem die quantenmechanischen Eigenschaften eines Systems global, d.h. zu allen Zeiten miteinbezogen werden. Die von Feynman entwickelte Methode ist in vieler Hinsicht effizienter als der kanonische Ansatz, der nicht immer zu einem ausreichenden Verständnis der Quantenphänomene führt und sich in komplexen Systemen wie beispielsweise in Eichtheorien, Quantengravitation oder Stringtheorie als schwerfällig und undurchsichtig erweist.

Feynmans Ansatz. Feynman führte das Pfadintegral ausgehend von zwei einfachen Prinzipien ein:

1. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(b|a)$, die angibt ein System im Zustand b zu finden, wenn es vorher im Zustand a war, lässt sich als Betragsquadrat einer (komplexen) *Wahrscheinlichkeitsamplitude* schreiben:

$$P(b|a) = |K(b|a)|^2. \quad (1.7)$$

2. Die Übergangsamplitude ist gegeben durch die Summe über alle möglichen Wege zwischen den beiden Zuständen, gewichtet mit einem Phasenfaktor, der über die Wirkung des

²Diese Ausführungen gelten im Rahmen der relativistischen Theorie nur für Bosonen. Für Fermionen werden Antikommutatoren verwendet.

entsprechenden Wegs γ bestimmt wird:

$$K(b|a) = \mathcal{N} \sum_{\gamma} e^{iS[\gamma]/\hbar}, \quad (1.8)$$

mit einer passenden Normierung \mathcal{N} . Jeder einzelne Pfad hat somit eine zu $e^{iS/\hbar}$ proportionale Amplitude und die gesamte Übergangsamplitude entsteht aus der Superposition der Amplituden der einzelnen Pfade.

Für ein System mit einem Freiheitsgrad, beispielsweise ein Massepunkt mit der Wirkung

$$S[x] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x, t) \right), \quad (1.9)$$

können wir die Übergangsamplitude zwischen den Zuständen (x_a, t_a) und (x_b, t_b) berechnen, indem wir das Zeitintervall $[t_a, t_b]$ in $N + 1$ Stücke mit Dauer ϵ teilen und anschließend die Zeitabstände immer geringer werden lassen, d.h. den Grenzfall $N \rightarrow \infty$ betrachten. Die Summe über alle möglichen Wege entspricht dann N Integrationen über die intermediären Punkte $x_k := x(t_k)$. Somit lässt sich die Übergangsamplitude zunächst abschätzen durch

$$K(x_b, t_b | x_a, t_a) \approx \mathcal{N} \prod_{k=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx_k \right] e^{i \left[\sum_{l=1}^N \epsilon \frac{m}{2} \left(\frac{x_{l+1} - x_l}{\epsilon} \right)^2 - V(x_k, t_k) \right] / \hbar}. \quad (1.10)$$

Im kontinuierlichen Grenzfall schreiben wir die Amplitude als Pfadintegral

$$K(x_b, t_b | x_a, t_a) = \int_{x_a}^{x_b} \mathcal{D}x e^{iS[x]/\hbar}, \quad (1.11)$$

wobei im neuen Symbol $\int_{x_a}^{x_b} \mathcal{D}x$ der Normierungsfaktor und die Integration über unendlich viele zwischenliegende Punkte zusammengefasst wurde. Dabei wird über alle möglichen Pfade im *Konfigurationsraum* summiert, die den Punkt $x_a = x(t_a)$ mit $x_b = x(t_b)$ verbinden (vgl. Abb. 1.1). Dies ist das von Feynman ursprünglich eingeführte Pfadintegral.

Mit dieser globalen Beschreibung der Dynamik eines beliebigen System können wir einerseits die lokale Beschreibung der Dynamik eines Quantensystems in Form einer Differentialgleichung, der Schrödingergleichung, rekonstruieren (siehe z.B. [5]), wenn wir die totale Wahrscheinlichkeitsamplitude, d.h. die Ortswellenfunktion im Schrödingerbild definieren als

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t | x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) dx_a. \quad (1.12)$$

Andererseits beinhaltet Feynmans Pfadintegral-Ansatz als einfachen Grenzfall das klassische Prinzip der extremalen Wirkung, auf dem die gesamte klassische Mechanik beruht: Die physikalischen Größen in S (Masse, Zeit, ...) sind im klassischen Fall sehr viel größer als \hbar ($\approx 10^{-24} J s$), wodurch der Phasenterm $e^{iS/\hbar}$ bzgl. verschiedener Wege mit hoher Frequenz oszilliert. Variieren wir einen Pfad x um eine – in klassischer Größenordnung – kleine Abweichung δx , so ist die zugehörige Phasendifferenz $\delta S/\hbar$ dennoch sehr groß, wodurch zwischen den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsbeiträgen starke Oszillationen entstehen, die zu einer destruktiven Interferenz der

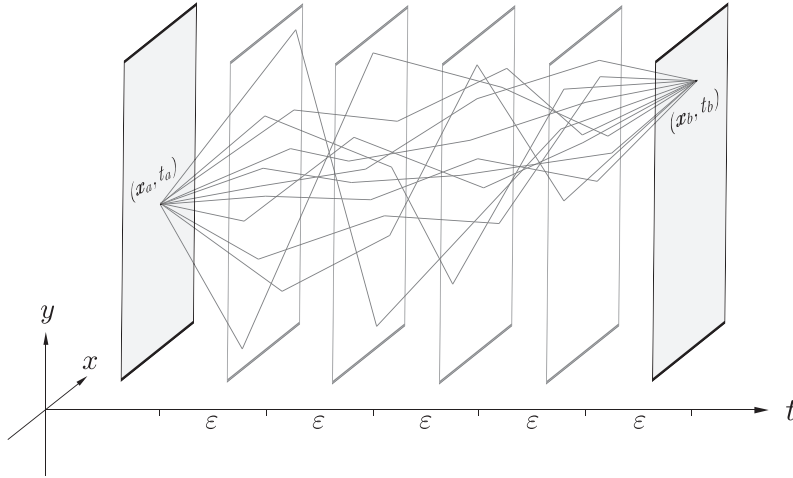


Abbildung 1.1: Mögliche Pfade zwischen den Zuständen (\mathbf{x}_a, t_a) und (\mathbf{x}_b, t_b) eines Systems mit zwei Freiheitsgraden für $N = 4$.

Wahrscheinlichkeitsamplituden führen. Dies gilt für alle möglichen Wege, außer für den Weg, der zu einer extremalen Wirkung führt, denn in unmittelbarer Umgebung dieses Weges variiert die Phase S/\hbar am geringsten, wodurch hier der maximale Beitrag zur Gesamtwahrscheinlichkeit entsteht, d.h. die klassische Trajektorie ist die Lösung der Gleichung $\delta S = 0$.

Es stellt sich heraus, dass das Feynman-Pfadintegral ein Spezialfall eines allgemeineren Pfadintegrals ist. Im Folgenden zeigen wir (vgl. [2]), wie ausgehend von der formalen Lösung der Schrödingergleichung ein allgemeineres Pfadintegral gefunden werden kann, welches für Systeme, deren kinetische Energie quadratisch in den Impulsen ist, dem Feynman-Pfadintegral entspricht.

Konstruktive Definition des Pfadintegrals. Kennen wir den Quantenzustand eines Systems zum Zeitpunkt t_a , so erhalten wir den Zustand zu einer späteren Zeit t_b aus der Schrödingergleichung, d.h. formal gilt³

$$|\psi(t_b)\rangle = e^{-iH(t_b-t_a)}|\psi(t_a)\rangle. \quad (1.13)$$

Die Wellenfunktion $\psi(q, t_b)$ ist die Darstellung des Zustands $|\psi(t_b)\rangle$ in der Ortsbasis $\{|q\rangle\}$. Benutzen wir die Zerlegung der Identität $\mathbf{1} = \int dq_a |q_a\rangle\langle q_a|$ so ergibt sich

$$\psi(q_b, t_b) = \langle q_b|\psi(t_b)\rangle = \langle q_b|e^{-iH(t_b-t_a)}\mathbf{1}|\psi(t_a)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \langle q_b, t_b|q_a, t_a\rangle \psi(q_a, t_a) \quad (1.14)$$

mit der kompakten Schreibweise für die Übergangsamplitude

$$\langle q_b t_b|q_a t_a\rangle := \langle q_b|e^{-iH(t_b-t_a)}|q_a\rangle, \quad \text{mit } t_a < t_b. \quad (1.15)$$

Die im letzten Abschnitt eingeführte bedingte Wahrscheinlichkeitsamplitude $K(x_b, t_b|x_a, t_a)$ lässt sich somit als Matrixelement des Zeitentwicklungsoperators $e^{-iH(t_b-t_a)}$ schreiben.

Wegen der Identität $e^{-iH(t_k-t_i)} = e^{-iH(t_k-t_j)}e^{-iH(t_j-t_i)}$ kann die Amplitude in $N + 1$ Teile

³Im Folgenden verwenden wir natürliche Einheiten ($\hbar = 1 = c$).

zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \langle q_b t_b | q_a t_a \rangle &= \langle q_b | e^{-iH(t_b - t_N)} e^{-iH(t_N - t_{N-1})} \dots e^{-iH(t_1 - t_a)} | q_a \rangle \\ &= \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq_n \right] \langle q_b t_b | q_N t_N \rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_a t_a \rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Nehmen wir an, dass die Zeitabstände $t_n - t_{n-1} =: \epsilon$ genügend klein sind, so ergibt sich für die intermediären Übergangsamplituden⁴

$$\begin{aligned} \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle &= \langle q_n | e^{-iH(P, Q, t)\epsilon} | q_{n-1} \rangle \\ &= \int dp_n dq \langle q_n | p_n \rangle \langle p_n | e^{-iH(P, Q, t)\epsilon} | q \rangle \langle q | q_{n-1} \rangle \\ &\approx \int \frac{dp_n}{\sqrt{2\pi}} dq e^{-ip_n q_n} e^{-iH(p_n, q, t)\epsilon} \langle p_n | q \rangle \delta(q - q_{n-1}) \\ &= \int \frac{dp_n}{2\pi} \exp \left(i\epsilon \left[p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon} - H(p_n, q_{n-1}, t) \right] \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Die Näherung in der dritten Zeile gilt nur exakt bis zur ersten Ordnung in ϵ . Insgesamt ergibt sich

$$\langle q_b t_b | q_a t_a \rangle \approx \prod_{n=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi} \right] \exp \left(i \sum_{n=1}^{N+1} \epsilon \left[p_n \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon} - H \right] \right). \quad (1.18)$$

Im kontinuierlichen Grenzfall ($N \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$) erhalten wir das *Hamiltonsche Pfadintegral*, welches über alle Trajektorien im *Phasenraum* mit festen Endpunkten im Ortsraum x_a , x_b summiert:

$$\langle q_b t_b | q_a t_a \rangle = \int_{q_a}^{q_b} \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp \left(i \int_{t_a}^{t_b} dt (p\dot{q} - H(p, q, t)) \right). \quad (1.19)$$

Wir können nun erkennen, dass das Feynmansche Pfadintegral aus diesem in einfacher Weise gewonnen werden kann, wenn der Impuls in der Hamiltonfunktion quadratisch eingeht, denn dann ergibt sich ein unendliches Produkt gewöhnlicher Gauß-Integrale, welches in der Diskretisierung ausgeführt werden kann und im Grenzfall einen endlichen Faktor beiträgt, der im Maß $\mathcal{D}q$ absorbiert wird. Dann gilt $\langle q_b t_b | q_a t_a \rangle \equiv K(q_b t_b | q_a t_a)$. Im restlichen Teil dieses Abschnitts betrachten wir ausschließlich solche Systeme, in denen das Hamiltonsche in das Feynman-Pfadintegral übergeht.

Weitere Anwendungen des Pfadintegrals. Nicht nur Übergangsamplituden der Form $\langle q_b t_b | q_a t_a \rangle = \langle q_b | U(t_b, t_a) | q_a \rangle$ mit $U(t_b, t_a) := e^{-iH(t_b - t_a)}$ können durch ein Pfadintegral dargestellt werden. Betrachten wir beispielsweise

$$\begin{aligned} \langle q_b | U(t_b, t_I) Q U(t_I, t_a) | q_a \rangle &= \int dq_I \langle q_b | U(t_b, t_I) | q_I \rangle q_I \langle q_I | U(t_I, t_a) | q_a \rangle \\ &= \int dq_I q_I \int_{q_a}^{q_I} \mathcal{D}q \int_{q_I}^{q_b} \mathcal{D}q' \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_I} \mathcal{L} dt + \frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_b} \mathcal{L} dt \right) \\ &= \int_{q_a}^{q_b} \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_I). \end{aligned} \quad (1.20)$$

⁴Der Hamiltonoperator kann immer in die Form $H(P, Q, t) = \sum_{m,l} c_{ml}(t) P^m Q^l$ gebracht werden.

Die Anwendung des Ortsoperators zum Zeitpunkt $t_I \in [t_a, t_b]$ bewirkt somit in der Pfadintegraldarstellung der Übergangsamplitude einen einfachen Faktor $q(t_I)$ unter dem Integral. Eine analoge Rechnung für $t_a < t_I < t_{II} < t_b$ liefert

$$\langle q_b | U(t_b, t_{II}) Q U(t_{II}, t_I) Q U(t_I, t_a) | q_a \rangle = \int_{q_a}^{q_b} \mathcal{D}q e^{iS[q]} q(t_I) q(t_{II}). \quad (1.21)$$

Der Zusammenhang zwischen Pfadintegralen und zeitlich geordneten Produkten von Operatoren wird im folgenden Abschnitt im Rahmen der *Korrelationsfunktionen* verallgemeinert. Ganz allgemein können wir überall dort eine Pfadintegraldarstellung verwenden, wo Matrixelemente des Zeitentwicklungsoperators auftreten, so auch in der kontinuierlichen Verallgemeinerung dessen Spur:

$$\text{Sp} U(t_b, t_a) := \int d\tilde{q} \langle \tilde{q} | U(t_b, t_a) | \tilde{q} \rangle = \int d\tilde{q} \int_{\tilde{q}=q(t_a)}^{\tilde{q}=q(t_b)} e^{iS[q]} =: \oint \mathcal{D}q e^{iS[q]}. \quad (1.22)$$

Dabei bezeichnet $\oint \mathcal{D}q$ die Summation über alle geschlossenen Pfade q .

1.2 Diskretes Funktionalintegral

Bevor wir – motiviert vom Feynman-Pfadintegral – einen Funktionalintegralformalismus für *kontinuierliche* Quantenfelder einführen, behandeln wir zunächst eine diskrete Form des allgemeinen Funktionalintegrals (vgl. [3]). Dies ist von Vorteil, da für *diskrete* Felder die benötigten Relationen und Notationen mathematisch klar und exakt definiert werden können. Den formalen Übergang zur kontinuierlichen Theorie können wir dann in einfacher Weise durchführen. Hier sind die meisten Relationen jedoch hauptsächlich formal zu verstehen, d.h. als symbolische Erweiterung der diskreten Gleichungen. Die Existenz dieser Integrale zu überprüfen bzw. den Relationen einen mathematisch exakten Sinn zu geben ist im Allgemeinen nur durch zusätzliche mathematische Tricks und Erweiterungen der diskretisierten Ausdrücke zu bewerkstelligen (z.B. durch die sog. *Renormalisierung*).

Anstatt eines kontinuierlichen Raums – wie die vierdimensionale Minkowski-Raumzeit \mathbb{M}^4 – verwenden wir hier eine Menge $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, N\}$ mit $N \in \mathbb{N}$, legen eine reelle Zahl $\Delta x > 0$ fest und definieren $\Delta^n x := (\Delta x)^n$ mit einer festen Zahl $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x)$ nennen wir *diskretes Quantenfeld*. Der Raum dieser Quantenfelder wird mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi, \psi) := \sum_{x \in \mathcal{M}} \varphi(x) \psi(x) \Delta^n x \quad (1.23)$$

zu einem N -dimensionalen (Prä-)Hilbertraum, den wir mit $L_2(\mathcal{M})$ bezeichnen.

Diskretes Funktionalintegral. Das diskrete Funktionalintegral einer Funktion $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, (\varphi(1), \dots, \varphi(N)) \mapsto F(\varphi)$ über Quantenfelder φ ist definiert durch

$$\int_{L_2(\mathcal{M})} F(\varphi) \mathcal{D}\varphi := \int_{\mathbb{R}^N} F(\varphi) \prod_{x \in \mathcal{M}} \left[\sqrt{\frac{\Delta^n x}{2\pi}} d\varphi(x) \right], \quad (1.24)$$

also als endlichdimensionales Integral über \mathbb{R}^N , denn der oben eingeführte Raum $L_2(\mathcal{M})$ lässt sich aufgrund des Isomorphismus $\varphi \rightarrow (\varphi(1), \dots, \varphi(N))$ mit \mathbb{R}^N identifizieren. Das Integrations-

maß wurde so gewählt, dass das Integral über ein Gaußsches Funktional $F(\varphi) = e^{-(\varphi, \varphi)/2}$ auf 1 normiert ist, denn

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varphi(k)\varphi(k)\Delta^4 x/2} d\varphi(k) = \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta^4 x}} \Rightarrow \int_{L_2(\mathcal{M})} e^{-(\varphi, \varphi)/2} \mathcal{D}\varphi = 1. \quad (1.25)$$

Mit dieser Definition können wir in einfacher Weise das folgende, für die Anwendung in Quantenfeldtheorien zentrale Funktional definieren.

Diskrete Quantenwirkung und Korrelationsfunktionen. Die Wirkung $S[\varphi, J] = \sum_{x \in M} L(\varphi(x), J(x)) \Delta^n x$ bestimmt die sogenannte *Quantenwirkung* durch

$$Z(J) := \frac{\int_{L_2(\mathcal{M})} e^{iS[\varphi, J]} \mathcal{D}\varphi}{\int_{L_2(\mathcal{M})} e^{iS[\varphi, 0]} \mathcal{D}\varphi}. \quad (1.26)$$

Es ist somit $Z(0) = 1$. Die neue Funktion $J(x)$ dient als externe Störungsquelle, die in der Wirkung in Form einer Wechselwirkung mit dem Quantenfeld φ eingeführt wird:

$$S[\varphi, J] = S[\varphi] + (\varphi, J). \quad (1.27)$$

Sie ermöglicht die Extraktion der wichtigsten Information der Quantenwirkung: *Korrelationsfunktionen*. Wir definieren die diskrete k -te Korrelationsfunktion durch

$$C_k(x_1, \dots, x_k) := \frac{1}{i^k} \frac{\delta^k Z(J)}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_k)} \Big|_{J=0}, \quad (1.28)$$

mit der diskreten Variante der partiellen Funktionalableitung:

$$\frac{\delta F(\varphi)}{\delta \varphi(x)} := \frac{1}{\Delta^n x} \frac{\partial F(\varphi(1), \dots, \varphi(N))}{\partial \varphi(x)}. \quad (1.29)$$

Wegen $\frac{\delta(\varphi, J)}{\delta J(x)} = \varphi(x)$, folgt aus (1.26), (1.27) und (1.28)

$$C_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{\int_{L_2(\mathcal{M})} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_k) e^{iS[\varphi]} \mathcal{D}\varphi}{\int_{L_2(\mathcal{M})} e^{iS[\varphi]} \mathcal{D}\varphi}. \quad (1.30)$$

Die Quantenwirkung Z generiert somit die Korrelationsfunktionen C_k , weshalb sie im Kontinuierlichen auch *Erzeugende* oder *Erzeugendes Funktional* genannt wird.

Aufgrund der Ähnlichkeit zum Begriff des Erwartungswerts in der Statistik wird manchmal auch $\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_k) \rangle$ für die Korrelationsfunktionen $C_k(x_1, \dots, x_k)$ geschrieben. Dies soll außerdem die Verbindung zur kanonischen Formulierung der Quantenfeldtheorie andeuten: Im Operatorformalismus führt man sog. *k-te Greensche Funktionen* $G_k(x_1, \dots, x_k)$ als Vakuum-Vakuum-Übergangsamplituden mit interner Anwendung zeitlich geordneter Feldoperatoren ein: $G_k(x_1, \dots, x_k) := \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_k) \} | 0 \rangle$. Die hier auftretenden Feldoperatoren $\varphi(x_i)$ können als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren interpretiert werden, die in den Punkten x_i bestimmte Teilchen erzeugen oder vernichten. Aus solchen Übergangsamplituden kann man die Wahrscheinlichkeiten für Prozesse bestimmen, in denen Teilchen erzeugt und vernichtet werden,

wie sie v.a. in Streuexperimenten vorkommen. Die Verbindung der Funktionalintegration zum Operatorformalismus wird durch die formale⁵ Identität

$$C_k = G_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.31)$$

hergestellt. Die Annahme, Vakuumfluktuationen seien die vollständige Information über ein Quantenfeld φ und deren Verbindung zu den Korrelationsfunktionen, die über die Quantenwirkung Z definiert werden können, führt dazu Z als vollständige Beschreibung einer Quantenfeldtheorie anzusehen. Es wird deshalb das wesentliche Ziel dieser Arbeit sein, einen Ausdruck für Z in Eichtheorien und der bosonischen Stringtheorie zu finden.

1.3 Kontinuierliches Funktionalintegral

Wie bereits erwähnt, übernehmen wir im Fall von *kontinuierlichen* Quantenfeldern $\varphi(x, t)$ die oben eingeführten Begriffe in symbolischer Form, um ihnen dann in den folgenden Kapiteln in der Anwendung auf spezielle Theorien konkreten Sinn zu geben.

Im formalen Grenzfall

$$N \rightarrow \infty, \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad (1.32)$$

interessieren uns Felder $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei \mathcal{M} nun die vorher diskrete Menge \mathcal{M} ersetzt und für einen beliebigen n -dimensionalen Raum, wie z.B. den dreidimensionalen Konfigurationsraum \mathbb{R}^3 oder den vierdimensionalen Minkowskiraum \mathbb{M}^4 , steht. Die Menge dieser Felder bezeichnen wir mit \mathcal{F} .

Funktionalintegral und Quantenwirkung. Das Integral eines Funktionals $F : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto F[\varphi]$ über die Felder aus \mathcal{F} als Erweiterung von (1.24) unter (1.32) notieren wir mit

$$\int_{\mathcal{F}} F[\varphi] \mathcal{D}\varphi. \quad (1.33)$$

Dabei definieren wir $\mathcal{D}\varphi \sim \prod_{x \in \mathcal{M}} d\varphi(x)$ als kontinuierlichen Grenzfall von (1.24) mit einer Normierung, die wir beispielsweise analog zu (1.25) wählen können,

$$\int_{\mathcal{M}} e^{-\int_{\mathcal{F}} \varphi^2(x) d^n x / 2} \mathcal{D}\varphi = 1. \quad (1.34)$$

Das erzeugende Funktional bzw. die Quantenwirkung, aus der alle wichtigen Informationen extrahiert werden können, ist dann gegeben durch

$$Z[J] := \mathcal{N} \int_{\mathcal{F}} e^{iS[\varphi, J]} \mathcal{D}\varphi, \quad (1.35)$$

mit $S[\varphi, J] := S[\varphi] + \int J(x)\varphi(x)d^n x$ und dem Normierungsfaktor $\mathcal{N}^{-1} = \int_{\mathcal{F}} e^{iS[\varphi]} \mathcal{D}\varphi$, der so gewählt wurde, dass $Z[0] = 1$ gilt. Für die Felder in \mathcal{F} legen wir dabei die gleichen Randbedingungen fest wie im klassischen Prinzip der extremalen Wirkung $S[\varphi]$. Die Korrelationsfunktionen

⁵Formale Gleichheit bedeutet, dass die linke und rechte Seite dieser Gleichung in der Störungstheorie in jeder Ordnung übereinstimmen, wie z.B. in [3] gezeigt wird. Das bedeutet, dass die aus Feynman-Diagrammen abgeleiteten Gleichungen und die zugehörigen Feynman-Regeln jeweils übereinstimmen.

$C_k(x_1, \dots, x_k)$ werden gemäß (1.28) erzeugt. Im kontinuierlichen Fall ist die *partielle Funktionalableitung* an der Stelle $\varphi(y)$ eines Funktionals F eine Distribution $\delta F[\varphi]/\delta\varphi(y)$, sodass für eine Funktion $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(y)} h(y) d^n y = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 F[\varphi + th] \equiv \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi}(h), \quad (1.36)$$

mit der (totalen) *Funktionalableitung* $(\delta F[\varphi]/\delta\varphi)(h)$ in Richtung h . Bezeichnen wir mit δ_y die δ -Distribution, d.h. $\delta_y(x) = \delta(x - y)$, so kann die partielle Funktionalableitung dargestellt werden durch

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(y)} = \int \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \delta_y(x) d^n x = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 F[\varphi + t\delta_y]. \quad (1.37)$$

Da der Funktionswert $\varphi(x)$ für festes x als Wert des Funktionals $\varphi \mapsto \varphi(x)$ aufgefasst werden kann, gilt

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \delta(x - y). \quad (1.38)$$

Weitere Anwendungen. Nehmen wir an, wir wollen die Übergangsamplitude $\langle \varphi_b(\mathbf{x}) | U(t_b, t_a) | \varphi_a(\mathbf{x}) \rangle$ zweier Feldkonfigurationen φ_a und φ_b zu verschiedenen Zeitpunkten t_a und t_b berechnen, so impliziert das Feynman-Pfadintegral folgenden Zusammenhang zur Funktionalintegration⁶:

$$\langle \varphi_b | e^{-iH(t_b - t_a)} | \varphi_a \rangle = \int_{\mathcal{F}(\varphi_a, \varphi_b)} e^{iS[\varphi]} \mathcal{D}\varphi, \quad (1.39)$$

wobei $\mathcal{F}(\varphi_a, \varphi_b)$ alle klassischen Felder $\varphi \in \mathcal{F}$ mit den Randbedingungen $\varphi(\mathbf{x}, t_a) = \varphi_a(\mathbf{x})$ und $\varphi(\mathbf{x}, t_b) = \varphi_b(\mathbf{x})$ bezeichnet.

Die Spur des Zeitentwicklungsoperators lässt sich in Verallgemeinerung von Gleichung (1.22) durch das Funktionalintegral ausdrücken. Ersetzen wir außerdem $i(t_b - t_a)$ mit $1/kT$, so ergibt sich die *Zustandssumme* $Z = \text{Sp} e^{-H/kT}$, aus der in der statistischen Physik die gesamte Thermodynamik eines Systems gewonnen werden kann. Deshalb notiert man die Spur des Propagators ebenfalls mit Z und nennt sie Zustandssumme oder Partitionsfunktion:

$$Z := \text{Sp} e^{-iH(t_b - t_a)} = \int_{\mathcal{F}(\text{per.})} e^{iS[\varphi]} \mathcal{D}\varphi. \quad (1.40)$$

Das erzeugende Funktional $Z[J]$ und die Zustandssumme Z können also beide durch Funktionalintegrale ausgedrückt werden, was die enge Verbindung von Quantenfeldtheorie und statistischer Physik andeutet.

⁶Unter der Annahme, dass ein passender Hamiltonoperator für die Quantentheorie des klassischen Felds φ mit der Wirkung $S[\varphi]$ existiert.

Kapitel 2

Funktionalintegral für Eichpotentiale

2.1 Eichpotentiale

Globale Transformationen. Die Wirkung¹ $S[\varphi] = \int \mathcal{L}(\varphi, d\varphi) d^n x$ für k klassische Felder $\varphi(x) := (\varphi^1(x), \dots, \varphi^k(x)) \in W$ kann *globale* Symmetrien aufweisen, d.h. sie kann invariant unter Transformationen sein, die nicht von den Raumzeit-Koordinaten $x \in \mathcal{M}$ abhängen. Die Transformationen beschreiben wir durch Elemente einer Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra $\mathcal{G} := T_e G$ (der Tangentialraum im neutralen Element e der Lie-Gruppe). Die Transformation wird mithilfe einer Matrixdarstellung $\rho : G \rightarrow GL(k, \mathbb{R}), g \mapsto \mathcal{B}$ von G in W realisiert, d.h.

$$\varphi(x) \mapsto \mathcal{B} \varphi(x) \tag{2.1}$$

Mithilfe der sog. *Exponentialabbildung* kann man aus einem Element ϑ der Lie-Algebra ein Gruppenelement g erzeugen:

$$\vartheta \in \mathcal{G} \Rightarrow \exp(\vartheta) = \exp(\vartheta^a E_a) \in G \tag{2.2}$$

mit N Elementen $E_a \in \mathcal{G}$, die eine Basis der Lie-Algebra bilden und Koeffizienten ϑ^a der Zerlegung von ϑ in dieser Basis. Wirkt ein so erzeugtes Gruppenelement $g = \exp(\vartheta)$ durch $\mathcal{B} = \rho(g)$ auf $\varphi \in W$, so nennt man ϑ den *Erzeuger* oder *Generator* der resultierenden Transformation. Als Generatoren bezeichnet man andererseits auch die Basenelemente E_a , die durch die Kommutatorrelationen $\mathcal{G} \ni [E_a, E_b] =: c_{ab}^c E_c$ die Lie-Algebra *erzeugen*. Die Koeffizienten in dieser Zerlegung werden als *Strukturkonstanten* c_{ab}^c bezeichnet. Wie wir später sehen werden, spielen diese Zahlen hier v.a. im Zusammenhang mit *infinitesimalen* Transformationen eine Rolle; dies sind Transformationen, die nur gering von der Identitätsabbildung abweichen. Mit der Matrixdarstellung ρ der Lie-Gruppe in W lässt sich die sogenannte von ρ *abgeleitete Darstellung* ρ' der

¹Die 1-Form $d\varphi$ ist die *äußere Ableitung* (siehe [10]) der Funktion $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow W$ mit Werten in einem k -dimensionalen Vektorraum W mit Basis $\{e_i\}$. Die Lagrangefunktion \mathcal{L} hängt neben den Funktionen $\varphi = \varphi^i e_i$ auch von den Komponenten $\partial_\mu \varphi \in W$ bezüglich den Koordinaten-1-Formen dx^μ ab: $d\varphi = \partial_\mu \varphi dx^\mu$.

Lie-Algebra in W definieren: $\rho(e^\vartheta) := e^{\rho'(\vartheta)}$. Da für Matrizen² $\theta := \rho'(\vartheta)$ die Exponentialabbildung explizit durch ihre Reihendarstellung definiert werden kann, gilt $\exp(\varepsilon\theta) = \mathbb{1} + \varepsilon\theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, d.h. infinitesimale Transformationen können durch Elemente der Lie-Algebra erzeugt werden. Mit der Schreibweise $\mathcal{E}_a := \rho'(E_a)$ ergibt sich

$$\varphi(x) \mapsto (\mathbb{1} + \varepsilon\theta^a \mathcal{E}_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \varphi(x) =: \varphi(x) + \delta\varphi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.4)$$

bzw. in Komponenten

$$\varphi^i(x) \mapsto \varphi^i(x) + \varepsilon\theta^a (\mathcal{E}_a)_j^i \varphi^j(x), \quad (a = 1, \dots, N \text{ und } i, j = 1, \dots, k). \quad (2.5)$$

Eichtransformationen. Im Allgemeinen ist eine global invariante Wirkung nicht gleichzeitig invariant unter *lokalen* Transformationen, sog. Eichtransformationen. Diese sind durch G -wertige Funktionen $B : \mathcal{M} \rightarrow G, x \mapsto B(x)$ gegeben, mit der Matrixdarstellung $\mathcal{B} := \rho \circ B$,

$$\varphi(x) \mapsto \mathcal{B}(x) \varphi(x). \quad (2.6)$$

Eichinvarianz der Wirkung kann aber durch die Einführung zusätzlicher Felder erreicht werden. Der Ausgangspunkt bildet eine Lagrangefunktion $\mathcal{L}_M(\varphi, d\varphi)$, die freie *Materiefelder* φ^i beschreibt, d.h. eine klassische Feldtheorie, die in der quantenfeldtheoretischen Beschreibung eine Theorie für bestimmte Materieteilchen liefert, wie beispielsweise die Diracsche Theorie der Spin-1/2-Teilchen. Die Wirkung $S[\varphi] = \int \mathcal{L}_M(\varphi, d\varphi) dx$ ändert sich unter einer infinitesimalen Transformation der Felder φ gemäß

$$S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \varphi^i} \delta\varphi^i + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \varphi^i)} \delta(\partial_\mu \varphi^i) \right] d^n x. \quad (2.7)$$

Da unter globalen Transformationen $\partial_\mu \varphi$ genauso wie die Felder selbst transformiert (d.h. $\delta(\partial_\mu \varphi) = \varepsilon\theta^a \mathcal{E}_a \partial_\mu \varphi = \delta\varphi|_{\varphi=\partial_\mu \varphi}$), erhalten wir aus (2.7) für eine Wirkung, die unter globalen Transformationen (2.1) invariant ist,

$$\delta \mathcal{L}_M(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \varphi^i} (\mathcal{E}_a)_j^i \varphi^j + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \varphi^i)} (\mathcal{E}_a)_j^i \partial_\mu \varphi^j = 0. \quad (2.8)$$

Unter Eichtransformationen (2.6) ergibt sich wegen $\delta(\partial_\mu \varphi) = \delta\varphi|_{\varphi=\partial_\mu \varphi} + \varepsilon \partial_\mu \theta^a \mathcal{E}_a \varphi$ nun der zusätzliche Term

$$\delta \mathcal{L}_M(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (\partial_\mu \varphi^i)} \varepsilon \partial_\mu \theta^a (x) (\mathcal{E}_a)_j^i \varphi^j(x) \neq 0. \quad (2.9)$$

Wie wir im Folgenden sehen werden, können wir diesen Term kompensieren, indem wir neue Felder, sog. *Eichpotentiale* einführen, die in der Wirkung mit den Materiefeldern φ über einen

²Die Matrixdarstellung ρ bildet die Gruppenelemente aus G in die allgemeine lineare Gruppe $GL(k, \mathbb{R})$ der invertierbaren $k \times k$ -Matrizen (d.h. $A \in GL(k, \mathbb{R}) \Rightarrow \det A \neq 0$) ab. Aus der Definition der abgeleiteten Darstellung ergibt sich unmittelbar

$$\rho'(\theta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \rho(e^{t\theta}). \quad (2.3)$$

$\rho'(\theta)$ ist also ein Element der Lie-Algebra von $GL(k, \mathbb{R})$, die wir mit $gl(k, \mathbb{R}) := T_1 GL(k, \mathbb{R})$ bezeichnen.

Wechselwirkungsterm gekoppelt werden. Durch einen zusätzlichen kinetischen Term in der Wirkung können wir den Eichpotentialen eine eigene Dynamik geben. Damit entsteht insgesamt aus der ursprünglichen *freien* Theorie der Materieteilchen je nach globaler Symmetriegruppe G eine Theorie der Materie mit einer *Wechselwirkung*. So kann beispielsweise aus der Diracschen Beschreibung von Elektronen und Positronen, welche invariant unter globalen Transformationen der Gruppe $U(1)$ ist, aus der Forderung nach Eichinvarianz die Wirkung der Quantenelektrodynamik konstruiert werden. Geht man hingegen von der Theorie für Spin-1/2 Teilchen mit globaler Symmetriegruppe $SU(3)$ aus, so ergibt sich die Wirkung der Quantenchromodynamik.

Kovariante Ableitung und Eichpotentiale. Aus (2.9) geht hervor, dass die Änderung der Lagrangefunktion unter lokalen Transformationen von Termen stammt, die Ableitungen der Felder enthalten. Unter Eichtransformationen ist $\delta(\partial_\mu\varphi) \neq \delta\varphi|_{\varphi=\partial_\mu\varphi}$, d.h. die Transformation der partiellen Ableitungen unterscheidet sich von der der Felder. Unter globalen Transformationen genügen $\partial_\mu\varphi$ und φ aber dem gleichen Transformationsgesetz, weshalb in global invarianten Lagrangefunktionen nur Kombinationen der Felder und Ableitungen vorkommen, in denen die Änderungen absorbiert werden, wenn $\partial_\mu\varphi$ und φ gleich transformieren. Aus dieser Eigenschaft global invarianter Theorien lässt sich durch eine geeignete Ersetzung der partiellen Ableitung eine lokal invariante Theorie konstruieren.

Aus geometrischer Sicht lässt sich leicht erkennen (vgl. [4]), dass die Beschreibung der Änderung des Feldes φ entlang einer Kurve $\gamma : t \mapsto m$ in \mathcal{M} (mit $\gamma(0) = x$) unter Benutzung der herkömmlichen Richtungsableitung in Richtung des Vektors $\dot{\gamma}(0) = v \in T_x\mathcal{M}$,

$$d\varphi(v) \equiv v^\mu \partial_\mu \varphi(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\gamma(t)) - \varphi(\gamma(0))}{t} \quad (2.10)$$

in eichinvarianten Theorien unpraktisch ist: Unter lokalen Transformationen (2.6) ändern sich $\varphi(\gamma(t))$ und $\varphi(\gamma(0))$ in verschiedener Weise, sodass deren Differenz und damit die partielle Ableitung $\partial_\mu\varphi$ keinem einfachen Transformationsgesetz genügt. Um den Unterschied in der Transformation der Felder φ in zwei verschiedenen Punkten auszugleichen, sodass nur deren eigentliche funktionale Änderung miteinbezogen wird, führen wir eine $m \times m$ -Matrix $U(x, y)$ (mit $U(x, x) = \mathbb{1}$) ein, die für feste Punkte x, y als darstellende Matrix eines Elements aus der Lie-Gruppe G angesehen werden kann und unter (2.6) wie folgt transformiert:

$$U(x, y) \mapsto \mathcal{B}(x) U(x, y) \mathcal{B}^{-1}(y). \quad (2.11)$$

Damit genügt $U(x, y) \varphi(y)$ demselben Transformationsgesetz (2.6) wie die Felder φ im Punkt x und wir können die sog. *kovariante Ableitung* $\mathfrak{D}_\mu\varphi$ definieren, die in geeigneter Weise die Änderung der Felder $\varphi(x)$ in Richtung v angibt:

$$v^\mu \mathfrak{D}_\mu \varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(\gamma(0), \gamma(t)) \varphi(\gamma(t)) - \varphi(\gamma(0))}{t}. \quad (2.12)$$

Mit der Kurve $\eta_x(t) := U(\gamma(0), \gamma(t))$ in G erhalten wir wegen $\eta_x(0) = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} v^\mu \mathfrak{D}_\mu \varphi(x) &= \left[(\eta_x(0) + \dot{\eta}_x(0)) (\varphi(x) + v^\mu \partial_\mu \varphi(x)) - \varphi(x) + \mathcal{O}(t) \right]_{t \rightarrow 0} \\ &= v^\mu \partial_\mu \varphi(x) + \left. \frac{d\eta_x}{dt} \right|_{t=0} \varphi(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Der Ausdruck $d\eta_x/dt|_{t=0}$ ist ein Element des Tangentialraums der Gruppe G im neutralen Element, also der Lie-Algebra $\mathcal{G} = T_e G$. Gleichzeitig ergibt sich aus (2.13)

$$\left. \frac{d\eta_x}{dt} \right|_{t=0} \varphi = v^\mu \mathfrak{D}_\mu \varphi - d\varphi(v) = (\mathfrak{D}_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi) dx^\mu(v), \quad (2.14)$$

d.h. die linke Seite liefert für jeden Vektor $v \in T_x \mathcal{M}$ Zahlen³ $d\eta_x/dt|_{t=0} \varphi(x) =: \mathcal{A}(v)\varphi(x)$. Dadurch wird ein sog. *Eichpotential* \mathcal{A} definiert, das eine 1-Form $\mathcal{A}_\mu(x) dx^\mu$ in \mathcal{M} mit Werten in der Lie-Algebra \mathcal{G} bildet, d.h. $\mathcal{A}_\mu(x) \in \mathcal{G}$.

Für die kovariante Ableitung erhalten wir wegen $\mathcal{A}(v) = \mathcal{A}_\mu(x) dx^\mu(v) = \mathcal{A}_\mu(x) v^\mu$

$$\mathfrak{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + \mathcal{A}_\mu \varphi. \quad (2.15)$$

Aus der Transformation (2.11) des Vergleichsoperators $U(x, y)$ können wir die Eichtransformation der Eichpotentiale⁴ bestimmen. Bis zur ersten Ordnung in t ergibt sich

$$\mathbb{1} + v^\mu \mathcal{A}_\mu(x) t \mapsto \mathcal{B}(x) [\mathbb{1} + v^\mu \mathcal{A}_\mu(x) t] [\mathcal{B}^{-1}(x) + v^\mu \partial_\mu \mathcal{B}^{-1}(x) t]. \quad (2.16)$$

Die Eichpotentiale transformieren somit gemäß⁵

$$\mathcal{A}_\mu \mapsto \mathcal{B} \mathcal{A}_\mu \mathcal{B}^{-1} - \partial_\mu \mathcal{B} \mathcal{B}^{-1}, \quad (2.18)$$

wobei wir die Identität $0 = \partial_\mu \mathbb{1} = \partial_\mu \mathcal{B} \mathcal{B}^{-1} + \mathcal{B} \partial_\mu \mathcal{B}^{-1}$ verwendet haben. Obige Konstruktion der kovarianten Ableitung führt zum Transformationsgesetz

$$\mathfrak{D}_\mu \varphi \mapsto \partial_\mu (\mathcal{B} \varphi) + \mathcal{B} \mathcal{A}_\mu \mathcal{B}^{-1} \mathcal{B} \varphi - \partial_\mu \mathcal{B} \mathcal{B}^{-1} \mathcal{B} \varphi = \mathcal{B} \partial_\mu \varphi + \mathcal{B} \mathcal{A}_\mu \varphi = \mathcal{B} \mathfrak{D}_\mu \varphi \quad (2.19)$$

Das heißt, die *kovariante Ableitung der Felder φ transformiert unter Eichtransformationen genauso, wie die Felder selbst*. Wir sind nun bereit, aus einer global invarianten eine eich- bzw. lokal invariante Lagrangefunktion zu konstruieren. Wir ersetzen dazu in $\mathcal{L}_M(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ die partielle mit der kovarianten Ableitung:

$$\mathcal{L}_M(\varphi, \partial_\mu \varphi) \text{ ist global invariant} \implies \mathcal{L}_M(\varphi, \mathfrak{D}_\mu \varphi) \text{ ist lokal invariant} \quad (2.20)$$

Dabei wird über die Kombination $\mathcal{A}_\mu \varphi$ (in der kovarianten Ableitung) ein Wechselwirkungsterm der Eichpotentiale \mathcal{A}_μ und Materiefelder φ in der Lagrangefunktion produziert.

Kinetischer Term der Eichpotentiale; Yang-Mills-Theorie. Um die Eichpotentiale \mathcal{A}_μ zu dynamischen Größen zu machen, benötigen wir einen kinetischen eichinvarianten Term

$$S_E[\mathcal{A}] = \int \mathcal{L}_E(\mathcal{A}_\mu, \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) dx \quad (2.21)$$

³Mit Zahlen sind die Komponenten $[\mathcal{A}(v)\varphi(x)]^i = [A(v)]_j^i \varphi^j(x)$ mit $i, j = 1, \dots, k$ gemeint.

⁴In der Benennung als *Eichpotential* unterscheiden wir meist nicht zwischen den Komponenten $\mathcal{A}_\mu(x)$ und der 1-Form \mathcal{A} selbst.

⁵Für infinitesimale Eichtransformationen analog zu (2.4) ergibt sich $\mathcal{A}_\mu \mapsto \mathcal{A}_\mu + \delta \mathcal{A}_\mu$ mit $\delta \mathcal{A}_\mu = \varepsilon \theta^a [\mathcal{E}_a, \mathcal{A}_\mu] - \varepsilon \partial_\mu \theta^a \mathcal{E}_a$ und, da wir \mathcal{A}_μ als Element der Lie-Algebra \mathcal{G} in den Generatoren \mathcal{E}_a entwickeln können, $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^a \mathcal{E}_a$, erhalten wir

$$\delta \mathcal{A}_\mu = \delta \mathcal{A}_\mu^a \mathcal{E}_a = \varepsilon \theta^b \mathcal{A}_\mu^c [\mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c] - \varepsilon \partial_\mu \theta^a \mathcal{E}_a = \varepsilon (\theta^b \mathcal{A}_\mu^c c_{bc}^a - \partial_\mu \theta^a) \mathcal{E}_a \quad (2.17)$$

mit den Strukturkonstanten c_{bc}^a der Lie-Algebra \mathcal{G} .

in der Wirkung, der zusätzlich zu den Feldern \mathcal{A}_μ deren Ableitungen enthält, aber nicht die Materiefelder φ . Dann kann mittels Variation der Wirkung bezüglich \mathcal{A}_μ die Dynamik der Eichpotentiale über ihre Bewegungsgleichungen bestimmt werden. Dazu betrachten wir eine Größe, die unter Eichtransformationen einfacher als Eichpotentiale transformiert, der Kommutator zweier kovarianten Ableitungen. Diese Kombination ist selbst keine Ableitung:

$$[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu]\varphi = (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu])\varphi. \quad (2.22)$$

Da die kovariante Ableitung $\mathfrak{D}_\mu\varphi$ unter Eichtransformationen wie die Felder φ transformiert, gilt genauso $[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu]\varphi \mapsto \mathcal{B}[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu]\varphi$, woraus sich das einfache Transformationsverhalten des sog. *Feldstärketensors*⁶

$$[\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu] =: F_{\mu\nu} \mapsto \mathcal{B}F_{\mu\nu}\mathcal{B}^{-1} \quad (2.23)$$

ergibt. Ausgehend von diesem Ausdruck sind verschiedene Lorentz- und eichinvariante Lagrangefunktionen denkbar. Yang und Mills [7] schlugen im Jahr 1954 die Kombination⁷

$$\mathcal{L}_E(\mathcal{A}, \partial_\mu \mathcal{A}) := -\frac{1}{4} \text{Sp } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.24)$$

vor, die im Gegensatz zu anderen möglichen Termen renormalisierbar ist (siehe z.B. [6]). Die Eichpotentiale \mathcal{A}_μ werden deshalb auch *Yang-Mills-Felder* genannt, die entsprechende Feldtheorie *Yang-Mills-Theorie*. Gemeinsam mit (2.20) ergibt sich die vollständige eichinvariante Lagrangefunktion als Summe

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, \mathcal{A}, \partial_\mu \mathcal{A}) = \mathcal{L}_M(\varphi, \partial_\mu \varphi - \mathcal{A}_\mu \varphi) + \mathcal{L}_E(\mathcal{A}, \partial_\mu \mathcal{A}). \quad (2.25)$$

Diese Lagrangefunktion beschreibt eine eichinvariante Theorie mit den dynamischen Feldern φ und \mathcal{A}_μ , die über den zusätzlichen Term in der kovarianten Ableitung (2.15) gekoppelt sind.

2.2 Die Faddeev-Popov-Wirkung

Im Folgenden interessieren wir uns ausschließlich für die Wirkung $S[\mathcal{A}] = -\frac{1}{4} \int \text{Sp } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^n x$ der Eichpotentiale, d.h. für eine *reine Yang-Mills-Theorie*. Des Weiteren unterscheiden wir nicht explizit zwischen *abelschen* (z.B. QED) und *nicht-abelschen* (z.B. QCD) Eichtheorien, indem wir immer den allgemeinen Fall nicht verschwindender Vertauschungsrelationen $[\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b] \neq 0$ annehmen. Wir entwickeln in diesem Abschnitt somit einen passenden Ausdruck für das erzeugende Funktional in reinen nicht-abelschen Yang-Mills-Theorien (vgl. [4], [9] und [22]). Dabei werden wir feststellen, dass in Eichtheorien weitere Terme in der Lagrangefunktion eingeführt werden müssen, um eine Quantenwirkung für Eichpotentiale definieren zu können. Denn abgesehen davon, dass Funktionalintegrale als unendlich-dimensionale gewöhnliche Integrale aufgefasst werden und deshalb meist nicht konvergent definiert sind, treten in eichinvarianten Theorien zusätzliche Schwierigkeiten auf, wenn wir analog zu (1.35) für das erzeugende Funktional in reinen Yang-Mills-Theorien folgenden Ausdruck schreiben:

$$Z[J] = \int_{\mathcal{F}} \mathcal{D}\mathcal{A} e^{iS[\mathcal{A}, J]}, \quad (2.26)$$

⁶Die Komponenten $F_{\mu\nu}^a$ bezüglich den Generatoren E_a ergeben sich zu $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c c_{bc}^a$.

⁷Die Eichinvarianz folgt direkt aus dem Transformationsgesetz des Feldstärketensors und der Vertauschbarkeit von Operatoren innerhalb der Spur.

mit einem *eichinvarianten Volumenelement* $\mathcal{D}\mathcal{A} := \prod_{\mu=0}^{n-1} \prod_{a=1}^N \mathcal{D}\mathcal{A}_\mu^a$ in der Menge \mathcal{F} aller möglichen Feldkonfigurationen. Dabei wird auch über physikalisch äquivalente Felder summiert, d.h. über solche, die durch Eichtransformationen ineinander übergehen. Da der Integrand in (2.26) aber unter diesen Transformationen invariant ist, tragen Felder, die sich nur durch Eichtransformationen voneinander unterscheiden, keine neuen Informationen zum Funktionalintegral bei, was der Natur des Pfadintegrals widerspricht. Außerdem kann (2.26) kein konvergentes Funktional definieren, denn mit jeder relevanten Konfiguration sind unendlich viele äquivalente Felder verknüpft. *Faddeev* und *Popov* haben 1967 eine Methode entwickelt [8], mit der sie diese Problematik elegant beheben: Durch eine Manipulation des erzeugenden Funktionals wird eine Eichfixierung eingeführt und mithilfe eines Koordinatenwechsels der konvergente Teil des Integrals separiert.

Gruppierung in Orbits. Die Eichpotentiale \mathcal{A}'_μ , die über Eichtransformationen (2.18) aus einem Feld \mathcal{A}_μ hervorgehen, beschreiben eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation⁸

$$\mathcal{A}'_\mu \sim \mathcal{A}_\mu \quad :\Leftrightarrow \quad \mathcal{A}'_\mu = \mathcal{B}\mathcal{A}_\mu\mathcal{B}^{-1} - \partial_\mu\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}, \quad (2.28)$$

mit $\mathcal{B}(x) = \exp(\theta^a(x)\mathcal{E}_a)$. Damit kann \mathcal{F} in Äquivalenzklassen $[\mathcal{A}]$ aufgeteilt werden, die man im Zusammenhang mit Gruppenoperationen auch als *Orbits* bezeichnet. Verschiedene physikalisch relevante Felder gehören also verschiedenen Orbits an, d.h. wir sollten in $Z[J]$ nicht über ganz \mathcal{F} , sondern nur über die Quotientenmenge $\mathcal{Q} := \mathcal{F}/\sim$ summieren, das ist die Menge aller Orbits in \mathcal{F} .

Aus praktischer Sicht wollen wir das (unendliche) Volumen der Äquivalenzklassen im Funktionalintegral Z separieren. Dies können wir erreichen, wenn wir – Faddeev und Popov folgend – eine *Eichbedingung* $f^a(\mathcal{A}) = 0$ ($a = 1, \dots, N$) wählen, die nur jeweils ein Element \mathcal{A} eines Orbits erfüllt. Einem beliebigen Eichpotential $\mathcal{A}' \in \mathcal{F}$ können wir damit ein Tupel $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) =: \mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ zuordnen: Der Repräsentant $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^{\mathcal{B}=1}$ bestimmt den Orbit, in dem sich \mathcal{A}' befindet und mit einer anschließenden Eichtransformation (2.18) ist durch Festlegung von \mathcal{B} jedes Element innerhalb des Orbits erreichbar. Wir führen im erzeugenden Funktional Z deshalb einen Wechsel der Integrationsvariablen

$$\int \mathcal{D}\mathcal{A}' \rightarrow \int \mathcal{D}\mathcal{B} \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{J} \quad (2.29)$$

durch, der eine *funktionale Jacobi-Determinante* \mathcal{J} mit sich bringen wird. Da der Integrand eichinvariant ist, kann das $\int \mathcal{D}\mathcal{B}$ - Integral, das *Volumen eines Orbits*, separiert und in der Normierung absorbiert werden.

Separation des Orbitvolumens. Wir definieren zunächst das im Folgenden sehr nützliche Funktionalintegral⁹

$$\Delta^{-1}[\mathcal{A}] := \int \mathcal{D}\mathcal{B} \delta[f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})], \quad \text{mit } \mathcal{A} \in \mathcal{F}, \quad \delta[f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})] := \prod_{x \in \mathcal{M}} \delta^{(N)}(f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(x))). \quad (2.30)$$

⁸Reflexivität und Symmetrie folgen direkt aus den Gruppeneigenschaften von G . Dass (2.28) auch transitiv ist, ergibt sich folgendermaßen: Sei $\mathcal{A}_\mu \sim \mathcal{A}'_\mu \sim \mathcal{A}''_\mu$, dann gilt

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{A}''_\mu\tilde{\mathcal{B}}^{-1} - \partial_\mu\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}^{-1})\mathcal{B}^{-1} - \partial_\mu\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{A}''_\mu\tilde{\mathcal{B}}^{-1}\mathcal{B}^{-1} - \partial_\mu(\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}})\tilde{\mathcal{B}}^{-1}\mathcal{B}^{-1}. \quad (2.27)$$

Mit $\bar{\mathcal{B}} := \mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}} \in G$ folgt $\mathcal{A}_\mu \sim \mathcal{A}''_\mu$.

⁹Um die Notation übersichtlich zu halten, werden wir den Gruppenindex a der Eichbedingung $f^a(\mathcal{A})$ nur dann explizit angeben, wenn es relevant ist. Ansonsten steht $f(\mathcal{A})$ für das gesamte N -Tupel $(f^1(\mathcal{A}), \dots, f^N(\mathcal{A}))$.

Das formal als δ -Funktional geschriebene Symbol ist das Produkt von Dirac- δ -Distributionen in jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$. Wir integrieren hier für ein gegebenes Feld \mathcal{A} über alle Eichtransformationen \mathcal{B} , d.h. über den gesamten Orbit $[\mathcal{A}]$. Die Eichbedingung $f(\mathcal{A}) = 0$ soll nur von den Eichpotentialen $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ mit $\mathcal{B} = \mathbb{1}$ erfüllt werden, also nur von *einem* Element je Orbit¹⁰. Da das Integral über alle Elemente $\mathcal{B} : \mathcal{M} \rightarrow G, x \mapsto \mathcal{B}(x)$ innerhalb der Gruppe der Eichtransformationen verläuft, entspricht eine Transformation $\mathcal{B}\mathcal{B}'$ einer einfachen Translation der Gruppenelemente, die das Integrationsmaß invariant lässt. Dies können wir leicht überprüfen (vgl. [9]), denn das δ -Funktional $\delta[f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})]$ beschränkt die Menge der Eichtransformationen auf $\mathcal{B} \approx \mathbb{1}$, d.h. es genügt infinitesimale Transformationen

$$\mathcal{B}(x) = \mathbb{1} + \theta^a(x)\mathcal{E}_a \quad \text{mit} \quad |\theta| \ll 1 \quad (2.31)$$

zu betrachten. In diesem Fall erhalten wir für das Integrationsmaß $\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{D}\theta = \prod_{x,a} d\theta^a(x)$, wobei das Produkt über $x \in \mathcal{M}$ als kontinuierliche Erweiterung eines Produkts über eine diskrete Menge (wie in Kapitel 1) zu verstehen ist. Für infinitesimale Transformationen entspricht $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}\mathcal{B}'$ einer Translation¹¹ $\theta'' = \theta + \theta'$, womit sich für $\mathcal{D}\theta$ ergibt

$$\begin{aligned} \prod_{x,a} d\theta^a(x) &= \det \left(\left. \frac{\delta\theta''^b(y)}{\delta\theta^c(z)} \right|_{\substack{y,z \in \mathcal{M} \\ b,c = 1,\dots,N}} \right)^{-1} \prod_{x,a} d\theta''^a(x) \\ &= \det (\delta_b^a \delta(y-z))^{-1} \prod_{x,a} d\theta''^a(x) \\ &= \prod_{x,a} d\theta''^a(x). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Wie erwähnt ist damit das Integrationsmaß $\mathcal{D}\mathcal{B}$ in (2.30) invariant unter Eichtransformationen $\mathcal{D}(\mathcal{B}\mathcal{B}') = \mathcal{D}\mathcal{B}$, da nur infinitesimale Abweichungen von $\mathbb{1}$ zum Integral beitragen. Diese Erkenntnis hat wesentliche Konsequenzen für das gesamte Funktionalintegral (2.30), denn für ein transformiertes Eichpotential $\mathcal{A}^{\mathcal{B}'}$ erhalten wir

$$\Delta^{-1}[\mathcal{A}^{\mathcal{B}'}] = \int \mathcal{D}\mathcal{B} \delta[f((\mathcal{A}^{\mathcal{B}'})^{\mathcal{B}})] = \int \mathcal{D}(\mathcal{B}\mathcal{B}') \delta[f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}\mathcal{B}'})] = \Delta^{-1}[\mathcal{A}]. \quad (2.33)$$

Das Funktionalintegral (2.30) ist somit invariant unter Eichtransformationen $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{\mathcal{B}}$. Der wesentliche Schritt besteht nun darin, (2.30) als Zerlegung der Identität zu schreiben

$$1 = \Delta[\mathcal{A}] \int \mathcal{D}\mathcal{B} \delta[f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})] \quad (2.34)$$

und diesen Ausdruck in (2.26) einzusetzen:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \Delta[\mathcal{A}] \int \mathcal{D}\mathcal{B} \delta[f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})] e^{iS[\mathcal{A},J]}. \quad (2.35)$$

Da $\mathcal{D}\mathcal{A}$, Δ und S invariant unter Eichtransformationen sind, können wir in Z anstatt über \mathcal{A} genauso gut über $\mathcal{A}^{\mathcal{B}'}$ mit einer beliebigen Transformation \mathcal{B}' integrieren. Wenn wir das $\int \mathcal{D}\mathcal{B}$ -Integral mit dem Integral über Eichpotentiale \mathcal{A} vertauschen und dann für jede Transformation

¹⁰Leider stellt sich heraus, dass diese Anforderung an eine globale Eichbedingung f meist nicht erfüllt werden kann. Wir wollen diese Komplikation, die zuerst von Vladimir N. Gribov entdeckt wurde (*gribov ambiguity*), zunächst vernachlässigen, werden aber im nächsten Abschnitt nochmals darauf eingehen.

¹¹ $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}\mathcal{B}' = (\mathbb{1} + \varepsilon\theta)(\mathbb{1} + \varepsilon\theta') = \mathbb{1} + \varepsilon(\theta + \theta') + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

\mathcal{B} unter dem Integral die eichinvarianten Größen Δ , S und das Maß $\mathcal{D}\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ auswerten, so sehen wir, dass der gesamte Integrand unabhängig von \mathcal{B} ist. Dadurch entkoppelt das Integral über die Eichtransformationen vollständig:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\mathcal{B} \int \mathcal{D}\mathcal{A}^{\mathcal{B}} \Delta[\mathcal{A}^{\mathcal{B}}] \delta[f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})] e^{iS[\mathcal{A}^{\mathcal{B}}, J]} \\ &= \left(\int \mathcal{D}\mathcal{B} \right) \int \mathcal{D}\mathcal{A} \Delta[\mathcal{A}] \delta[f(\mathcal{A})] e^{iS[\mathcal{A}, J]}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mit geeigneter Normierung ergibt sich das erzeugende Funktional

$$\mathcal{Z}[J] := \int \mathcal{D}\mathcal{A} \Delta[\mathcal{A}] \delta[f(\mathcal{A})] e^{iS[\mathcal{A}, J]}, \quad (2.37)$$

in dem das δ -Funktional bewirkt, dass nur über Eichpotentiale aus verschiedenen Orbits integriert wird, d.h. nur über physikalisch relevante Felder aus dem Orbitraum \mathcal{F}/\sim , ganz im Sinne Feynmans Pfadintegralansatz zur Quantenmechanik.

Faddeev-Popov-Determinante. Wir konnten also mithilfe des in (2.30) definierten Ausdrucks $\Delta[\mathcal{A}]$ das störende Orbitvolumen aus dem erzeugenden Funktional \mathcal{Z} entfernen. Wir werden im Folgenden feststellen, dass wir diese Größe als verallgemeinerte Jacobi-Determinante eines Wechsels der Integrationsvariablen $\mathcal{B} \leftrightarrow f = f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})$ interpretieren können. Dazu betrachten wir (2.30) zunächst als diskretes Funktionalintegral, d.h. wir ersetzen vorübergehend \mathcal{M} durch eine diskrete Menge \mathcal{M} mit M Elementen x_i . Es tragen nur infinitesimale Transformationen (2.31) zum Integral (2.30) bei, weshalb wir

$$\mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{D}\theta = \prod_{i,a} d\theta^a(x_i) =: d^l\theta \quad (2.38)$$

mit $l = MN$ benutzen. Das δ -Funktional in (2.30) vereinfacht sich zu einem Produkt aus l herkömmlichen δ -Distributionen

$$\delta^{(l)}(f) = \prod_{i,a} \delta(f^a(\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(x_i))). \quad (2.39)$$

Es ergibt sich für einen Wechsel der Integrationsvariablen $\theta \rightarrow f$

$$\Delta^{-1}[\mathcal{A}] = \int d^l\theta \delta^{(l)}(f) = \int d^l f \det \left(\frac{\partial f^a(\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(x_i))}{\partial \theta^b(x_j)} \right)^{-1} \delta^{(l)}(f). \quad (2.40)$$

Das letzte Integral kann direkt ausintegriert werden, wonach $\Delta[\mathcal{A}]$ gerade der Jacobi-Determinante

$$\Delta[\mathcal{A}] = \det \left(\frac{\partial f^a(\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(x_i))}{\partial \theta^b(x_j)} \right)_{f=0} \quad (2.41)$$

entspricht, die bezüglich den Gruppenindizes (a, b) und den Ortsfreiheitsgraden (x_i, x_j) ausgewertet werden muss. Die Bedingung $f = 0$, die das Integral über die δ -Distributionen impliziert, kann durch $\theta = 0$ ersetzt werden. Dieses Ergebnis können wir auf den kontinuierlichen Fall

$x_i \in \mathcal{M} \rightarrow x \in \mathcal{M}$ übertragen. Wir haben in (2.30) also die bereits angesprochene *funktionale* Jacobi-Determinante

$$\Delta[\mathcal{A}] = \det \left(\frac{\delta f^a(\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(x))}{\delta \theta^b(y)} \right)_{\theta=0} \quad (2.42)$$

eingeführt, die als *Faddeev-Popov-Determinante* bezeichnet wird. Für die Quantenwirkung (2.37) erhalten wir

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \det \left(\frac{\delta f(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})}{\delta \theta} \right)_{\theta=0} \delta[f(\mathcal{A})] e^{iS[\mathcal{A}, J]}. \quad (2.43)$$

Faddeev-Popov-Geister. Der formale Ausdruck (2.42) der Faddeev-Popov-Determinante kann mithilfe von *Grassmann-Variablen* als Funktionalintegral dargestellt werden. Dabei müssen neue Felder im erzeugenden Funktional eingeführt werden, deren Dynamik nicht mit dem Auftreten neuer physikalischer Teilchen interpretiert wird, sondern als dynamische Erscheinungsform der Eichinvarianz in Form von Hilfsfeldern. Im Zusammenhang mit Yang-Mills-Theorien werden diese *Geistfelder* als *Faddeev-Popov-Geister* bezeichnet.

Wir betrachten (siehe [3]) zunächst eine Menge von l sog. Grassmann-Variablen $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ mit den Eigenschaften $\eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i$. Unter anderem gilt also $\eta_i \eta_i = 0$, wodurch in der Reihenentwicklung einer Funktion $f(\eta)$ nur gemischte Terme auftreten:

$$f(\eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \eta_1 + \dots + \alpha_l \eta_l + \alpha_{12} \eta_1 \eta_2 + \dots \quad \text{mit } \alpha_i, \alpha_{ij}, \dots \in \mathbb{C}. \quad (2.44)$$

Dem Integral einer Funktion $f(\eta)$ wird per Definition der Koeffizient c eines speziellen Terms in der Reihenentwicklung von f zugeordnet:

$$\int f(\eta) d\eta_1 \dots d\eta_l := c, \quad \text{mit } f(\eta) = c \eta_l \eta_{l-1} \dots \eta_1 + \dots \quad (2.45)$$

Seien nun η und ξ zwei verschiedene Mengen von jeweils l Grassmann-Variablen. Es gelte die zusätzliche Vertauschungsrelation $\eta_i \xi_j + \xi_j \eta_i = \delta_{ij}$. Uns interessiert das Integral

$$\int \exp(\bar{\xi} A \eta) \prod_{i=1}^l (d\eta_i d\xi_i) \quad (2.46)$$

mit einer Matrix $A = (a_{ij})$ und $\bar{\xi} := (\xi_1 \dots \xi_l)$. Im Fall von $l = 1$ folgt aus (2.45)

$$\int \exp(\xi a \eta) d\eta d\xi = \int (1 + a \xi \eta) d\eta d\xi = a. \quad (2.47)$$

Für $l = 2$ gilt

$$\begin{aligned} e^{\bar{\xi} A \eta} &= 1 + \sum_{i,j=1}^2 \xi_i a_{ij} \eta_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^2 \xi_i a_{ij} \eta_j \right)^2 \\ &= 1 + \dots + \frac{1}{2} (a_{11} \xi_1 \eta_1 + a_{12} \xi_1 \eta_2 + a_{21} \xi_2 \eta_1 + a_{22} \xi_2 \eta_2)^2 \\ &= \dots + \frac{1}{2} (a_{11} a_{22} \xi_1 \eta_1 \xi_2 \eta_2 + a_{12} a_{21} \xi_1 \eta_2 \xi_2 \eta_1 + a_{21} a_{12} \xi_2 \eta_1 \xi_1 \eta_2 + a_{22} a_{11} \xi_2 \eta_2 \xi_1 \eta_1) \\ &= \dots + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \eta_2 \xi_2 \eta_1 \xi_1. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Damit ergibt sich

$$\int e^{\bar{\xi} A \eta} d\eta_1 d\xi_1 d\eta_2 d\xi_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A. \quad (2.49)$$

Für $l > 2$ kann man genauso zeigen [3], dass allgemein gilt

$$\int \exp(\bar{\xi} A \eta) \prod_{i=1}^l (d\eta_i d\xi_i) = \det A. \quad (2.50)$$

Wir haben somit eine Darstellung der Determinante einer $l \times l$ -Matrix als Integral über Grassman-Variablen gefunden. Dies legt nahe, den formalen Ausdruck (2.42) für die Faddeev-Popov-Determinante mit der Definition

$$\det \left(\frac{\delta f(\mathcal{A}^B)}{\delta \theta} \right)_{\theta=0} := \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\xi \exp \left(\int d^n x d^n y \xi^a(x) \frac{\delta f^a(\mathcal{A}^B(x))}{\delta \theta^b(y)} \Big|_{\theta=0} \eta^b(y) \right) \quad (2.51)$$

zu ersetzen. Dabei ist $\mathcal{D}\eta \mathcal{D}\xi := \prod_{x,a} d\eta^a(x) d\xi^a(x)$ mit jeweils N Geistfeldern η^a und ξ^a , deren Werte Grassmann-Variablen sind. ξ und η sind die erwähnten *Faddeev-Popov-Geister*, die wir als zusätzliche Hilfsfelder im erzeugenden Funktional einführen. Um deren Korrelationsfunktionen berechnen zu können, benötigen wir, genauso wie für \mathcal{A} , Quellen, die mit den Geistern im Integrand innerhalb der Exponentialabbildung kombiniert werden. Wir erhalten die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J, \zeta, \chi] &= \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\xi \delta[f(\mathcal{A})] \exp \left(iS[\mathcal{A}, J] + \int \xi^a(x) \frac{\delta f^a(\mathcal{A}^B(x))}{\delta \theta^b(y)} \eta^b(y) d^n x d^n y \right) \\ &\quad \times \exp \left(i \int (\zeta_a(x) \eta^a(x) + \chi_a(x) \xi^a(x)) d^n x \right), \end{aligned} \quad (2.52)$$

die sich noch weiter anpassen lässt, denn die Eichbedingung $f(\mathcal{A}) = 0$, die momentan durch das δ -Funktional repräsentiert wird, kann ebenfalls durch einen Term in der Exponentialabbildung dargestellt werden.

Eichfixierung. Wir können anstatt $f^a(\mathcal{A}(x)) = 0$ genauso $f^a(\mathcal{A}(x)) - C^a(x) = 0$ als Eichbedingung wählen, wenn N Funktionen C^a festgelegt wurden. Die Definition der Faddeev-Popov-Determinante ändert sich entsprechend in

$$\Delta^{-1}[\mathcal{A}] = \int \mathcal{D}\mathcal{B} \delta[f(\mathcal{A}^B) - C]. \quad (2.53)$$

Nehmen wir an, für ein Feld \mathcal{A} verschwindet das Argument des δ -Funktional. Ersetzen wir nun die Funktion C durch eine andere \bar{C} , so können wir immer eine passende Eichtransformation finden, mit der das Argument erneut verschwindet, da alle Eichbedingungen so gewählt sind, dass je Orbit ein Repräsentant der Bedingung genügt. Da sich das Maß $\mathcal{D}\mathcal{B}$ unter Eichtransformationen nicht ändert, ist der gesamte Ausdruck $\Delta^{-1}[\mathcal{A}]$ unveränderlich unter Änderungen der Funktion C , d.h. die Faddeev-Popov-Determinante ist unabhängig von C . Das gleiche Argument gilt deshalb auch für die Quantenwirkung (2.37)

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \Delta[\mathcal{A}] \delta[f(\mathcal{A}) - C] e^{iS[\mathcal{A}, J]}, \quad (2.54)$$

denn außer dem δ -Funktional sind alle Größen eichinvariant und unabhängig von C . Wenn wir nun innerhalb des Integrands einen Gewichtungsfaktor $e^{i \int f(C(x))^2 d^n x}$ einfügen und über die Funktionen C mit $\mathcal{D}C \sim \prod_x dC(x)$ integrieren, so ändern wir \mathcal{Z} nur um einen Normierungsfaktor. Diese Manipulation ist zulässig, da physikalisch nur die normierte Quantenwirkung $\mathcal{Z}[J]/\mathcal{Z}[0]$ relevant ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}C \Delta[\mathcal{A}] \delta[f(\mathcal{A}) - C] e^{i(S[\mathcal{A}, J] + \int d^n x (C(x))^2)} \\ &= \int \mathcal{D}\mathcal{A} \Delta[\mathcal{A}] \exp\left(iS[\mathcal{A}, J] + i \int d^n x [f(\mathcal{A}(x))]^2\right). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Faddeev-Popov-Wirkung. Aus (2.52) und (2.55) ergibt sich die endgültige Form des erzeugenden Funktionals in reinen Yang-Mills-Theorien

$$\mathcal{Z}[J, \zeta, \chi] = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\xi \exp\left(iS_{\text{FP}}[\mathcal{A}, \eta, \xi; J, \zeta, \chi]\right) \quad (2.56)$$

mit der *Faddeev-Popov-Wirkung*

$$\begin{aligned} S_{\text{FP}}[\mathcal{A}, \eta, \xi; J, \zeta, \chi] &:= \int d^n x \left(\mathcal{L}_{\text{E}}(\mathcal{A}(x)) + [f(\mathcal{A}(x))]^2 + \int d^n y \xi^a(x) \frac{\delta f^a(\mathcal{A}^{\text{B}}(x))}{\delta \theta^b(y)} \eta^b(y) \right. \\ &\quad \left. + J_a^\mu(x) \mathcal{A}_\mu^a(x) + \zeta_a(x) \eta^a(x) + \chi_a(x) \xi^a(x) \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Diese Form des erzeugenden Funktionals bildet den Ausgangspunkt für die störungstheoretische Behandlung von Yang-Mills-Theorien im Rahmen der Quantenfeldtheorie (siehe z.B. [4]). Wir konnten das unendliche Orbitvolumen aus dem naiven Ansatz (2.26) entfernen, indem wir eine Variablentransformation im Funktionalintegral mithilfe eines geeigneten δ -Funktionals und einer funktionalen Jacobi-Determinante durchgeführt haben. Die sich daraus ergebende Quantenwirkung (2.43) ließ sich in die übliche Form eines Funktionalintegrals mit einer Exponentialabbildung als Integrand überführen, indem wir neben einem eichfixierenden Term in einer effektiven Lagrangefunktion zusätzliche Hilfsfelder – sog. Geistfelder – eingeführt haben.

Die Faddeev-Popov-Determinante (2.42) wurde hier allerdings als rein formales Objekt eingeführt, im Sinne einer Verallgemeinerung der Jacobi-Determinante auf unendlich viele Freiheitsgrade. Im folgenden Abschnitt gehen wir darauf ein, wie diese Determinante aus geometrischer Sicht interpretiert werden kann.

2.3 Geometrische Interpretation der Faddeev-Popov-Determinante

2.3.1 Geometrische Grundlagen

Zunächst wollen wir einige für die Beschreibung von Eichtheorien nützliche Begriffe aus der Differentialgeometrie einführen. Dabei beziehen wir uns hauptsächlich auf [10] und [11].

Faserbündel. Wir können für jeden Punkt m einer Mannigfaltigkeit M den *Tangententialraum* $T_m M$ definieren, der alle (Tangentential-)Vektoren im Punkt m enthält, d.h. alle Äquivalenzklassen

$[\gamma] =: v_m =: \dot{\gamma}$ von Kurven $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M, t \mapsto \gamma(t)$ durch $m = \gamma(0)$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_0 x^i(\gamma_1(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 x^i(\gamma_2(t)), \quad (2.58)$$

mit beliebigen lokalen Koordinaten x^i in der Umgebung von m . Die Vereinigung all dieser Tangentialräume bildet selbst wieder eine Mannigfaltigkeit

$$TM := \bigcup_{m \in M} T_m M. \quad (2.59)$$

Wir können jedem Vektor $v_m \in TM$ den ursprünglichen Punkt m zuordnen, dessen Tangentialraum $T_m M$ den Vektor v_m enthält, womit wir eine glatte surjektive Abbildung, die sog. *kanonische Projektion*

$$\pi : TM \rightarrow M, v_m \mapsto m \quad (2.60)$$

erhalten. Die Vorschrift $\pi : TM \rightarrow M$ bezeichnet man dann als *Tangentialbündel* mit *Totalraum* TM und *Basis* M . Dieses einfache Beispiel können wir in natürlicher Weise verallgemeinern, indem wir in jedem Punkt m aus M eine Mannigfaltigkeit F_m einfügen, die zu einer Mannigfaltigkeit F , der sog. *typischen Faser*, diffeomorph ist. Dabei bildet M die Basis und $B := \bigcup_{m \in M} F_m$ den Totalraum des sog. *Faserbündels*

$$\pi : B \rightarrow M. \quad (2.61)$$

Eine glatte Abbildung $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow B$ einer offenen Teilmenge $\mathcal{O} \subset M$ in den Totalraum heißt *lokaler Schnitt*, falls gilt $\pi \circ \sigma = id$ (siehe Abb. 2.1). Häufig können bestimmte geometrische Objekte auch durch lokale (oder globale, d.h. $\mathcal{O} = M$) Schnitte eines entsprechenden Bündels dargestellt werden. So entspricht beispielsweise ein lokaler Schnitt $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow TM$ eines Tangentialbündels einem Vektorfeld $v : \mathcal{O} \rightarrow TM, m \mapsto v_m$. Die Menge der Schnitte eines Faserbündels $\pi : B \rightarrow M$ notieren wir mit $W_M(B)$.

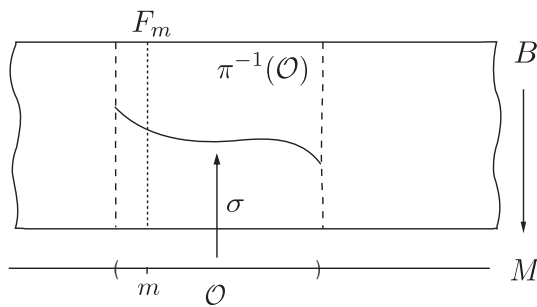


Abbildung 2.1: Faser F_m und lokaler Schnitt σ eines Faserbündels $\pi : B \rightarrow M$.

Eine spezielle Klasse von Faserbündeln bilden die sog. *Vektorbündel*. Hier hat jede Faser die Struktur eines linearen Raums, d.h. das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit ist ein Beispiel für ein Vektorbündel.

Für Eichtheorien sind außerdem die sog. *G-Hauptfaserbündel* $\pi : \mathcal{P} \rightarrow M$ von besonderer Bedeutung. Dies sind Faserbündel, auf deren Totalraum \mathcal{P} eine vertikale Rechtswirkung¹² $\mathcal{R}_g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ einer Lie-Gruppe G definiert ist, die in jeder Faser frei (es gibt keine Gruppenelemente außer dem neutralen Element, für die $\mathcal{R}_g m = m$ gilt) und transitiv (alle Elemente einer Faser können ausgehend von einem einzelnen Punkt der Faser über die Gruppenoperation erreicht werden, d.h. jede Faser besteht aus einem einzelnen Orbit) ist. Die Lie-Gruppe G bildet damit die typische Faser eines G -Hauptfaserbündels, zu der alle Urbilder von π (d.h. die Fasern F_m) diffeomorph sind.

Fundamentalfeld. Unabhängig von der Theorie der Faserbündel ist das *Fundamentalfeld* (auch *Erzeuger* oder *Generator*) der Rechtswirkung \mathcal{R}_g einer Lie-Gruppe G in einer Mannigfaltigkeit M durch die Vorschrift

$$\xi_X(m) := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_{\exp tX} m \quad (\text{mit } X \in \mathcal{G}, m \in M) \quad (2.62)$$

gegeben. Für ein gegebenes Element X der Lie-Algebra \mathcal{G} beschreibt das Vektorfeld ξ_X alle Tangentialvektoren der Kurve $\gamma(t) = \mathcal{R}_{\exp tX} m$ innerhalb von M . Eine für die folgenden Ausführungen nützliche Eigenschaft des Fundamentalfelds ist das Verhalten unter einem Pushforward¹³ \mathcal{R}_{g*} der Rechtswirkung der Lie-Gruppe G in M .

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{g*} \xi_X(m) &= \mathcal{R}_{g*} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_{\exp tX} m = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_g \mathcal{R}_{\exp tX} m = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_g \mathcal{R}_{\exp tX} \mathcal{R}_{g^{-1}} \mathcal{R}_g m \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_{g^{-1} \exp(tX)g} \mathcal{R}_g m = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_{\exp(t \text{Ad}_{g^{-1}} X)} \mathcal{R}_g m \\ &= \xi_{\text{Ad}_{g^{-1}} X}(\mathcal{R}_g m) \end{aligned} \quad (2.64)$$

mit der adjunkten¹⁴ Darstellung Ad_g der Lie-Gruppe G in \mathcal{G} .

Linksinvariante Vektorfelder. Die Linkswirkung einer Lie-Gruppe G in G selbst wird *Linkstranslation* genannt, $L_g : G \rightarrow G, h \mapsto L_g h := gh$. Tensorfelder T in G , die unter dem

¹²Eine Rechtswirkung \mathcal{R}_g unterscheidet sich von einer Linkswirkung \mathcal{L}_g durch deren Verhalten bei der Multiplikation zweier Gruppenelemente: $\mathcal{R}_{gh} = \mathcal{R}_h \circ \mathcal{R}_g$; eine Linkswirkung erfüllt $\mathcal{L}_{gh} = \mathcal{L}_g \circ \mathcal{L}_h$. Eine allgemeine Wirkung \mathcal{W}_g einer Gruppe G ist vertikal, falls $\pi \circ \mathcal{W}_g = \pi$.

¹³Für eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$, die den Punkt m in den Punkt $n := f(m)$ abbildet, wird dem Vektor $v_m = [\gamma] \in T_m M$ (mit $\gamma(t) \in M, m = \gamma(0)$ und der Äquivalenzrelation (2.58)) durch den Pushforward die Äquivalenzklasse $f_* v_m =: \tilde{v}_n = [\eta] \in T_n N$ zugeordnet, die aus den Kurven $\eta := f \circ \gamma$ besteht. Das heißt, wenn $v_m = \dot{\gamma}$ ein Tangentialvektor zur Kurve $\gamma(t) \in M$ im Punkt m ist, dann ist $f_* \dot{\gamma} = \dot{\eta}$ tangential zur Kurve $\eta(t) = f(\gamma(t))$ im Punkt $n = f(m)$. Der *Rücktransport* f^* bildet die duale Abbildung zum Pushforward, denn für Diffeomorphismen $f : M \rightarrow N$ gilt $f_* = (f^{-1})^*$ (vgl. [10]). Der Rücktransport eines allgemeinen Tensorfelds vom Typ (r, s) ist gegeben durch

$$(f^* t)(U, \dots, V; \alpha, \dots, \beta) := t(f_* U, \dots, f_* V; f_* \alpha, \dots, f_* \beta) \quad (2.63)$$

mit r 1-Formen α, \dots, β und s Vektorfelder U, \dots, V . Weitere Eigenschaften von Pushforward und Rücktransport werden z.B. in [10] gezeigt.

¹⁴Die adjunkte Darstellung $g \mapsto \text{Ad}_g$ einer Lie-Gruppe G in deren Lie-Algebra \mathcal{G} ist durch $g e^X g^{-1} =: e^{\text{Ad}_g X}$ definiert. Daraus folgt

$$\text{Ad}_g X = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 g e^{tX} g^{-1}. \quad (2.65)$$

Für Matrixgruppen ist deshalb $\text{Ad}_A X = A X A^{-1}$. Die von Ad abgeleitete Darstellung $\text{Ad}' =: \text{ad}$ ist eine Wirkung von \mathcal{G} in sich selbst: $\text{Ad}_{\exp X} = e^{\text{ad} X}$. In [10] wird gezeigt, dass explizit gilt: $\text{ad}_X Y = [X, Y]$. Im Falle von

Rücktransport L_g^* invariant sind, heißen *linksinvariant*, $L_g^*T = T$. Es gilt $L_{g^{-1}}^* = L_g^{-1*} =: L_{g*}$ per Definition des Pushforwards eines allgemeinen Tensorfelds (vgl. [10]). Ein linksinvariantes Tensorfeld erfüllt also die Relation $T = L_{g^{-1}}^*T = L_{g*}T$. Daraus folgt

$$L_{g*}(T_h) = (L_{g*}T)_{L_g h} = T_{gh}. \quad (2.67)$$

Setzen wir in diesem Ausdruck für h das neutrale Element e ein, so ergibt sich $T_g = L_{g*}T_e$, d.h. alle Elemente des Tensorfelds T können mit einem Pushforward einer geeigneten Linkstranslation aus T_e erzeugt werden. Ein linksinvariantes Vektorfeld in G wird demnach aus einem Element X der Lie-Algebra $T_e G \equiv \mathcal{G}$ erzeugt:

$$V_g^X = L_{g*}V_e^X = L_{g*}X, \quad \text{mit } V_e^X =: X \in T_e G \equiv \mathcal{G}. \quad (2.68)$$

Aus einem Element X der Lie-Algebra \mathcal{G} lässt sich damit ein linksinvariantes Vektorfeld V^X in G generieren.

Da wir im Zusammenhang mit Eichtheorien die entsprechende Lie-Gruppe G meist in ihrer Matrixdarstellung $\rho : G \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ betrachten, ist es von Nutzen, für die allgemeine lineare Gruppe $GL(k, \mathbb{R})$ der invertierbaren $k \times k$ -Matrizen die linksinvarianten Vektorfelder zu berechnen. In Koordinatenschreibweise ist ein allgemeines Vektorfeld in $GL(k, \mathbb{R})$ gegeben durch¹⁵ $V = V_j^i(x)\partial_i^j$ mit Funktionen $V_j^i : GL(k, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto V_j^i(x)$ als Koeffizienten. Die Anwendung eines Rücktransports L_y^* mit $y \in GL(k, \mathbb{R})$ ergibt

$$L_y^*V = V_j^i(yx)\frac{\partial}{\partial(yx)_j^i} = V_j^i(yx)(J^{-1})_{il}^{kj}\partial_k^l \quad (2.69)$$

mit der Inversen der Jacobi-Matrix

$$J_{kj}^{il} = \frac{\partial(yx)_j^i}{\partial x_k^l} = y_k^i \delta_j^l. \quad (2.70)$$

Analog zu $J_b^a(J^{-1})_c^b = \delta_b^a$ muss gelten $J_{kj}^{il}(J^{-1})_{ml}^{kn} = \delta_m^i \delta_j^n$, d.h.

$$(J^{-1})_{ml}^{kn} = (y^{-1})_m^k \delta_l^n. \quad (2.71)$$

Für linksinvariante Vektorfelder $L_y^*V = V$ erhalten wir aus (2.69) die Bedingung

$$V_j^i(yx)(y^{-1})_i^k \partial_k^j = V_j^k(x)\partial_k^j \Leftrightarrow (y^{-1}V(yx))_j^k = V_j^k(x). \quad (2.72)$$

Aus (2.72) folgt für $x = \mathbb{1}$ mit einer beliebigen $k \times k$ -Matrix C mit Einträgen $V_j^k(\mathbb{1}) =: C_j^k$

$$V_j^i(y) = y_k^i C_j^k, \quad (2.73)$$

Matrixgruppen lässt sich dies leicht berechnen:

$$\text{ad}_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Ad}_{\exp tX} Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 e^{tX} Y e^{-tX} = [X, Y]. \quad (2.66)$$

¹⁵Mit der Kurzschreibweise $\partial_i^j := \frac{\partial}{\partial x_j^i}$.

d.h. die linksinvarianten Vektorfelder in $GL(k, \mathbb{R})$ können durch Matrizen C parametrisiert werden:

$$V^C := x_k^i C_j^k \partial_i^j = \text{Sp}(xC\partial). \quad (2.74)$$

Die Notation V^C ist mit (2.68) konsistent, denn $V_e^C = C_j^i \partial_i^j|_e$ ist die Koordinatenschreibweise eines Elements der Lie-Algebra $gl(k, \mathbb{R})$.

Kanonische 1-Form. Die *kanonische 1-Form* θ kann für jede Lie-Gruppe G definiert werden. Sie ordnet über $\theta_g(v_g) := L_{g^{-1}*}v_g$ jedem Vektor aus dem Tangentialbündel von G ein Element der Lie-Algebra $\mathcal{G} = T_e G$ zu. Eine äquivalente Definition dieser 1-Form ist durch die Vorschrift

$$\theta(V^X) := X \quad (2.75)$$

gegeben, mit einem linksinvarianten Vektorfeld V^X der Lie-Gruppe G . Denn sei v_g ein Vektor aus dem Tangentialraum in einem beliebigen Punkt $g \in G$, dann ist $Y := L_{g^{-1}*}v_g \in \mathcal{G}$. Das linksinvariante Vektorfeld V^Y , das durch dieses Lie-Algebra-Element erzeugt wird, stimmt im Punkt g mit v_g überein:

$$V_g^Y = L_{g*}Y = L_{g*}L_{g^{-1}*}v_g = v_g. \quad (2.76)$$

So kann für jeden Vektor aus dem Tangentialbündel TG ein Element der Lie-Algebra gefunden werden, welches ein linksinvariantes Vektorfeld erzeugt, das im jeweiligen Punkt in G eben durch diesen Vektor gegeben ist und dem durch θ das Lie-Algebra-Element $X \equiv L_{g^{-1}*}v_g$ zugeordnet wird.

Für die Gruppe $GL(k, \mathbb{R})$ ist die kanonische 1-Form durch die $k \times k$ Matrix

$$\bar{\theta} = x^{-1} dx \quad (2.77)$$

gegeben, mit normalen (\mathbb{R} -wertigen) 1-Formen $\bar{\theta}_j^i = (x^{-1})_k^i dx_j^k$ als Einträge. Dies können wir leicht mithilfe von (2.74) und der Definition (2.75) der kanonischen 1-Form überprüfen:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_j^i(V^C) &= (x^{-1})_k^i dx_j^k (x_m^l C_n^m \partial_l^n) = (x^{-1})_k^i x_m^l C_n^m \partial_l^n x_j^k = (x^{-1})_k^i x_m^l C_n^m \delta_l^k \delta_j^n \\ &= (x^{-1})_k^i x_m^k C_j^m = \delta_m^i C_j^m = C_j^i. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Gleichung (2.77) gibt tatsächlich die kanonische 1-Form in $GL(k, \mathbb{R})$ an. Sei nun θ die kanonische 1-Form in einer Lie-Gruppe G , v^X ein linksinvariantes Vektorfeld in G und $\rho : G \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$, $g \mapsto \rho(g) =: \mathcal{B}$ eine Matrixdarstellung von G in einem k -dimensionalen Vektorraum W . Die von ρ abgeleitete Darstellung ρ' der Lie-Algebra \mathcal{G} in W ordnet jedem $X \in \mathcal{G}$ eine Matrix $\rho'(X) =: C$ aus der Lie-Algebra von $GL(k, \mathbb{R})$ zu. Die Matrix C generiert über $L_{\rho(g)*}C =: V_{\mathcal{B}}^C$ wiederum ein linksinvariantes Vektorfeld V^C in $GL(k, \mathbb{R})$. Wir können den Vektor v_g^X entlang ρ in die Matrixgruppe $GL(k, \mathbb{R})$ transportieren:

$$\begin{aligned} \rho_* v_g^X &= \rho_*(L_{g*}X) = (\rho_* \circ L_{g*})X = (\rho \circ L_g)_* X = (L_{\rho(g)} \circ \rho)_* X \\ &= (L_{\rho(g)*} \circ \rho_*) \frac{d}{dt} \Big|_0 e^{tX} = L_{\rho(g)*} \frac{d}{dt} \Big|_0 \rho(e^{tX}) = L_{\rho(g)*} \rho'(X) \\ &= L_{\rho(g)*} C \equiv V_{\mathcal{B}}^C. \end{aligned} \quad (2.79)$$

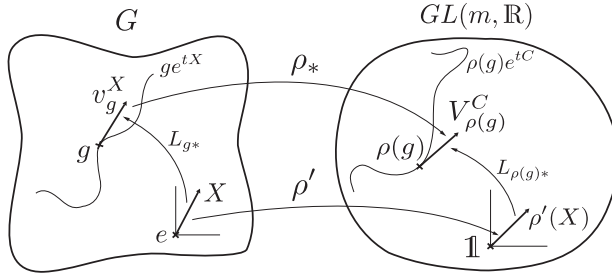


Abbildung 2.2: Darstellung eines linksinvarianten Vektorfelds aus G in $GL(k, \mathbb{R})$.

Der Pushforward ρ_* führt also die Vektoren des in G linksinvarianten Vektorfelds v^X in die Elemente des linksinvarianten Vektorfelds V^C aus $GL(k, \mathbb{R})$ über, das durch $C = \rho'(X)$ erzeugt wird. Mit der kanonischen 1-Form θ in $GL(k, \mathbb{R})$ erhalten wir somit

$$\bar{\theta}_{\rho(g)}(\rho_* v_g^X) = \bar{\theta}_{\rho(g)}(V_{\rho(g)}^C) = \rho'(X) = \rho'(\theta_g(v_g^X)) \Leftrightarrow \bar{\theta}_{\rho(g)} \circ \rho_* = \rho' \circ \theta_g. \quad (2.80)$$

Wir können demnach mithilfe der abgeleiteten Darstellung ρ' über $\rho' \circ \theta_g = \bar{\theta}_{\rho(g)} \circ \rho_*$ die kanonische 1-Form θ in $GL(k, \mathbb{R})$ durch (2.77) darstellen.

Distribution. Angenommen wir fixieren in jedem Tangentialraum $T_m M$ einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M einen k -dimensionalen Teilraum $\mathcal{D}_m \subset T_m M$. Die Menge all dieser Teilräume (für feste Dimension k) wird als *Distribution* \mathcal{D} bezeichnet, falls die Teilräume durch eine glatte Abbildung $m \mapsto \mathcal{D}_m$ den Punkten der Mannigfaltigkeit zugeordnet werden.

In einem Faserbündel $\pi : B \rightarrow M$ finden wir bereits eine kanonische Definition einer Distribution, die sog. *vertikale Distribution* \mathcal{D}^v : In jedem Tangentialraum $T_b B$ ($b \in B$) ist durch die Faserstruktur des Bündels ein Teilraum $\mathcal{D}_b^v \subset T_b B$ gegeben, der aus allen Vektoren v_b besteht, die durch den Pushforward $\pi_* : v_b \mapsto \pi_* v_b$ der Projektion π annulliert werden:

$$\mathcal{D}_b^v := \text{Ker } \pi_* \subset T_b B. \quad (2.81)$$

Diese Eigenschaft trifft für alle Tangentialvektoren der Kurven $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow F_m$ zu, die komplett innerhalb einer Faser F_m bleiben, da dann für alle $t \in \mathbb{R}$ $\pi(\gamma(t)) = m$ gilt und der Tangentialraum der Kurve $\eta(t) = \pi(\gamma(t)) = m$ leer ist.

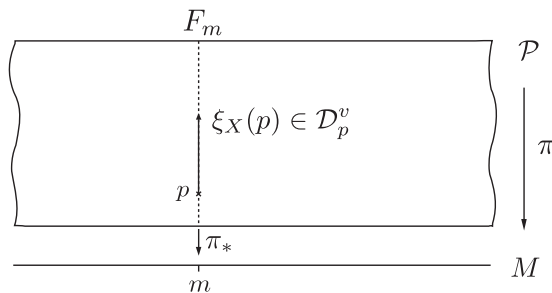


Abbildung 2.3: Ein Vektor aus einem Element \mathcal{D}_p^v der vertikalen Distribution \mathcal{D}^v wird durch π_* in den Nullvektor des Tangentialraums $T_m M$ abgebildet.

Da in einem G -Hauptfaserbündel die Rechtswirkung \mathcal{R}_g innerhalb jeder Faser F_m frei und transitiv ist, kann jeder Vektor $v_p \in \mathcal{D}_p^v$ durch ein Element $\xi_X(p)$ eines Fundamentalfelds mit

einem eindeutigen Element $X \in \mathcal{G}$ dargestellt werden:

$$v_p \in \mathcal{D}_p^v \Rightarrow \exists X \in \mathcal{G} : v_p = \xi_X(p). \quad (2.82)$$

Dies nehmen wir zum Anlass, eine Abbildung $\psi_p : \mathcal{G} \rightarrow D_p^v$ zu definieren, die im Folgenden nützlich sein wird. Wir ordnen einem Element X der Lie-Algebra \mathcal{G} den Vektor v_p aus $T_p\mathcal{P}$ zu, der tangential zur Faser im Punkt p liegt (vgl. Abb. 2.3):

$$\psi_p : \mathcal{G} \rightarrow D_p^v, X \mapsto \xi_X(p) \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_{\exp tX} p. \quad (2.83)$$

Zusammenhang und Zusammenhangsform. Ein *Zusammenhang* in einem G -Hauptfaserbündel $\pi : \mathcal{P} \rightarrow M$ ist eine G -invariante *horizontale Distribution* \mathcal{D}^h im Totalraum \mathcal{P} . D.h. in jedem Tangentialraum $T_p\mathcal{P}$ wird zusätzlich zum kanonischen vertikalen ein komplementärer *horizontaler Unterraum* definiert, sodass jeder Vektor von \mathcal{P} eindeutig in Anteile bezüglich dieser beiden Unterräume zerlegt werden kann:

$$D_p^v \oplus \mathcal{D}_p^h = T_p\mathcal{P} \ni v_p = \text{ver } v_p + \text{hor } v_p. \quad (2.84)$$

Ein Zusammenhang in einem G -Hauptfaserbündel ist per Definition G -invariant. Das bedeutet, dass durch Wirkung der Gruppe G auf die Elemente der horizontalen Distribution \mathcal{D}^h die Horizontalität nicht zerstört wird. Daraus folgt, dass ein Vektor $v_p^h \in \mathcal{D}_p^h$, der innerhalb einer Faser durch die Wirkung der Gruppe G transportiert wird, ein horizontaler Vektor bleibt, d.h. $\mathcal{R}_{g^*} v_p^h \in \mathcal{D}_{\mathcal{R}_g p}^h$ bzw.

$$\mathcal{R}_{g^*} \mathcal{D}_p^h = \mathcal{D}_{\mathcal{R}_g p}^h. \quad (2.85)$$

Um eine horizontale Distribution bzw. einen Zusammenhang zu definieren genügt es somit, einen horizontalen Teilraum \mathcal{D}_p^h in *einem* Punkt je Faser festzulegen (mit glatter p -Abhängigkeit).

Die *Zusammenhangsform* ω ist eine 1-Form in \mathcal{P} mit Werten in der Lie-Algebra \mathcal{G} , d.h. eine lineare Abbildung $\omega_p : T_p\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}, v_p \mapsto \omega_p(v_p) = \omega_p^a(v_p) E_a$ für jeden Punkt $p \in \mathcal{P}$, die über folgende Vorschrift definiert wird:

$$\omega_p := \psi_p^{-1} \circ \text{ver}, \quad \text{d.h. } v_p \mapsto \psi_p^{-1}(\text{ver } v_p) = \psi_p^{-1}(\xi_X(p)) = X \quad (2.86)$$

mit der Umkehrabbildung¹⁶ ψ_p^{-1} von (2.83) und einem eindeutigen Element X der Lie-Algebra \mathcal{G} . Horizontale Vektoren $v_p^h \in \mathcal{D}_p^h$ sind somit gerade die Vektoren aus $T_p\mathcal{P}$, die von ω_p vernichtet werden. Die Definition einer Zusammenhangsform ω ist somit gleichbedeutend mit der Festlegung eines Zusammenhangs \mathcal{D}^h im G -Hauptfaserbündel $\pi : \mathcal{P} \rightarrow M$.

$$v_p^h \in \mathcal{D}_p^h \Leftrightarrow \omega_p(v_p^h) = 0. \quad (2.87)$$

Eine wichtige Eigenschaft der Zusammenhangsform, die wir in Abschnitt 2.3.2 benutzen werden, ist das Verhalten unter dem Rücktransport \mathcal{R}_g^* der Rechtswirkung $\mathcal{R}_g : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. Aus (2.64) folgt wegen $\psi_p(X) = \xi_X(p)$

$$\mathcal{R}_{g^*} \psi_p(X) = \mathcal{R}_{g^*} \xi_X(p) = \xi_{\text{Ad}_{g^{-1}} X}(\mathcal{R}_g p) = \psi_{\mathcal{R}_g p}(\text{Ad}_{g^{-1}} X). \quad (2.88)$$

¹⁶Die Abbildung ψ_p ist ein linearer Isomorphismus (siehe [10]), insbesondere existiert damit die Umkehrabbildung ψ_p^{-1} .

Es gilt also $\mathcal{R}_{g^*} \circ \psi_p = \psi_{\mathcal{R}_{g^*p}} \circ \text{Ad}_{g^{-1}}$, was gleichbedeutend ist mit $\psi_{\mathcal{R}_{g^*p}}^{-1} \circ \mathcal{R}_{g^*} = \text{Ad}_{g^{-1}} \circ \psi_p^{-1}$. Für eine Zusammenhangsform ω ergibt sich damit

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_g^* \omega)_p(v_p) &= \omega_{\mathcal{R}_{g^*p}}(\mathcal{R}_{g^*} v_p) = (\psi_{\mathcal{R}_{g^*p}}^{-1} \circ \text{ver} \circ \mathcal{R}_{g^*})(v_p) = (\psi_{\mathcal{R}_{g^*p}}^{-1} \circ \mathcal{R}_{g^*} \circ \text{ver})(v_p) \\ &= (\text{Ad}_{g^{-1}} \circ \psi_p^{-1} \circ \text{ver})(v_p) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega_p(v_p)). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Wir schreiben kurz

$$\mathcal{R}_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega. \quad (2.90)$$

Horizontaler Lift. Die Definition des horizontalen Teilraums $\mathcal{D}_p^h \subset T_p \mathcal{P}$ mittels einer Zusammenhangsform ω über Gleichung (2.87) ist durch $N := \dim \mathcal{G}$ Bedingungen, $\omega_p^a(v_p^h) = 0$, gegeben. Deshalb gilt $\dim \mathcal{D}_p^h = \dim T_p \mathcal{P} - N = \dim \mathcal{P} - \dim G = \dim M$. Alle Vektoren $v_p^h \in \mathcal{D}_p^h$ werden durch π_* surjektiv in den Tangentialraum $T_m M$ projiziert. So gibt es für jeden Vektor $v_m \in T_m M$ einen eindeutigen *horizontalen Lift* v_p^h in jedem Punkt $p \in \pi^{-1}(m)$ mit

$$\pi_* v_p^h = v_m, \quad \omega_p(v_p^h) = 0. \quad (2.91)$$

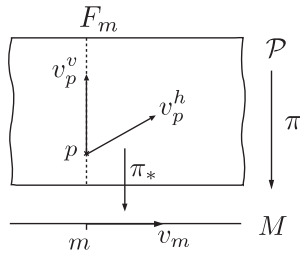


Abbildung 2.4: Horizontaler Lift v_p^h im Punkt p eines Vektors v_m .

Äquivariante Abbildung. Eine Abbildung $\phi : P \rightarrow V$ zwischen einer Mannigfaltigkeit P , auf der eine Rechtswirkung \mathcal{R}_g der Gruppe G definiert ist, und einem Vektorraum V mit Darstellung $\rho : g \mapsto \rho_g$ von G heißt *äquivariante Abbildung vom Typ ρ* , falls gilt

$$\phi \circ \mathcal{R}_g = \rho_{g^{-1}} \circ \phi. \quad (2.92)$$

Die Menge der äquivalenten Abbildungen¹⁷ vom Typ ρ von P nach V nennen wir $U_P^\rho(V)$. Eine 1-Form α in P mit Werten in V heißt äquivariant, falls die Abbildung $\alpha(v) : P \rightarrow V$ äquivariant ist ($v \in T\mathcal{P}$), d.h. $\alpha \in U_P^\rho(T^*P \otimes V)$. Wegen $\alpha(v_{\mathcal{R}_{g^*p}}) = \alpha(\mathcal{R}_{g^*} v_p) = (\mathcal{R}_g^* \alpha)(v_p)$ gilt für äquivariante 1-Formen vom Typ ρ

$$\mathcal{R}_g^* \alpha = \rho_{g^{-1}} \circ \alpha. \quad (2.93)$$

Ein Vergleich mit (2.90) zeigt, dass Zusammenhangsformen in dieser Schreibweise äquivariante 1-Formen in \mathcal{P} vom Typ Ad sind, $\omega \in U_{\mathcal{P}}^{\text{Ad}}(T^*\mathcal{P} \otimes \mathcal{G})$.

¹⁷Wenn klar ist, welche Darstellung ρ gemeint ist, bezeichnet man eine äquivariante Abbildung vom Typ ρ einfach als *äquivariant*.

Bemerkung (Assoziiertes Bündel)

In [11], [12], [13] und [14] werden an Stelle von äquivarianten Funktionen und 1-Formen meist Schnitte des sog. *assozierten Bündels* verwendet, da solchen Schnitten in natürlicher Weise äquivariante Abbildungen zugeordnet werden können. Wir werden diese Eigenschaft im Folgenden zwar nicht benutzen, beziehen uns aber dennoch auf die genannten Quellen. Deshalb wollen wir diese Korrespondenz an dieser Stelle motivieren:

Zu einem gegebenen G -Hauptfaserbündel $\pi : \mathcal{P} \rightarrow M$ gibt es das sog. *assozierte Bündel* $\hat{\pi} : E \rightarrow M$ mit dem Totalraum $E := \mathcal{P} \times_{\rho} V$ bezüglich eines Vektorraums V mit Repräsentation ρ_g . Die Elemente von E sind per Definition die Orbits der Wirkung $\varrho_g := \mathcal{R}_g \times \rho_{g^{-1}}$ von G auf $\mathcal{P} \times V$, d.h. die Äquivalenzklassen $[(p, v)] = [(\mathcal{R}_g p, \rho_{g^{-1}} v)]$ mit $p \in \mathcal{P}$ und $v \in V$. Jede Faser $\hat{\pi}^{-1}(m)$ besitzt die Struktur eines linearen Raums, mit $[(p, v)] + \lambda[(p, w)] := [(p, v + \lambda w)]$, denn innerhalb einer Faser kann durch $p \mapsto \mathcal{R}_g p$ der gleiche Punkt p für alle Elemente $[(p, v)]$ gewählt werden. So unterscheiden sich die Punkte in $\hat{\pi}^{-1}(m)$ nur durch die zweite Komponente und aufgrund der linearen Struktur ist jede Faser isomorph zu V ($v \leftrightarrow [(p, v)]$), d.h. das assoziierte Bündel ersetzt in gewisser Weise die Fasern des G -Hauptfaserbündels durch Kopien des Vektorraums V , womit $\hat{\pi} : E \rightarrow M$ zu einem Vektorbündel wird.

Ist ein Schnitt $\sigma \in W_M(E)$, d.h. $\sigma : \mathcal{O} \subset M \rightarrow E, m \mapsto [(p, v)]$ verfügbar, so erhalten wir eine äquivariante Abbildung $\phi : \mathcal{P} \rightarrow V$, indem wir $\phi(p) = v$ setzen. Wegen $[(p, v)] = [(\mathcal{R}_g p, \rho_{g^{-1}} v)]$ ist dann $\phi(\mathcal{R}_g p) = \rho_{g^{-1}} v \equiv \rho_{g^{-1}} \phi(p)$, d.h. ϕ ist tatsächlich äquivariant vom Typ ρ , $\phi \in U_{\mathcal{P}}(V)$. Ist umgekehrt eine äquivariante Abbildung $\phi : \mathcal{P} \rightarrow V$ gegeben, so kann ein Schnitt $\sigma : m \mapsto \sigma(m) = [(p, \phi(p))] = [(\mathcal{R}_g p, \phi(\mathcal{R}_g p))] = [(\mathcal{R}_g p, \rho_{g^{-1}} \phi(p))]$ mit $\pi(p) = m$ definiert werden, der nicht von der Wahl des Punktes p aus der Faser $\pi^{-1}(m)$ abhängt.

Genauso lassen sich 1-Formen τ in M mit Werten in E , $\tau \in W_M(T^*M \otimes E)$, horizontalen¹⁸ äquivarianten 1-Formen α in \mathcal{P} mit Werten in V , $\alpha \in \bar{U}_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V) := \text{hor } U_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V)$, zuordnen (vgl. [15]): Sei $\pi : \mathcal{P} \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $\tau \in W_M(T^*M \otimes E)$. Das Argument der 1-Form τ ist ein Vektorfeld v über M , dessen Vektoren v_m für jeden Punkt $p \in \pi^{-1}(m)$ einen eindeutigen horizontalen Lift $\hat{v}_p \in \mathcal{D}_p^h \subset T_p \mathcal{P}$ besitzen. Wegen $\tau_m(v_m) = [(p, w)] \in E$ mit $w \in V$ können wir eine Abbildung $\alpha(\hat{v}) : \mathcal{P} \rightarrow V$ definieren, indem wir $\alpha_p(\hat{v}_p) = \alpha_p(\text{hor } \hat{v}_p) = w$ setzen. Wegen $[(p, w)] = [(\mathcal{R}_g p, \rho_{g^{-1}} w)]$, ist $\alpha_{\mathcal{R}_g p}(\hat{v}_{\mathcal{R}_g p}) = \rho_{g^{-1}} \alpha_p(\hat{v}_p)$ und damit $\alpha(\hat{v})$ eine äquivariante Abbildung, also $\alpha \in \bar{U}_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V)$. Ist umgekehrt eine horizontale äquivariante 1-Form in \mathcal{P} mit Werten in V gegeben, so können wir deren Argument \hat{v}_p auf die Basis M projizieren: $v_m := \pi_* \hat{v}_p$. Jedem Vektor $v_m \in T_m M$ lässt sich nun über $\tau_m(v_m) := [(p, \alpha_p(\hat{v}_p))]$ ein Punkt in E zuordnen.

Insgesamt erhalten wir also für $E := \mathcal{P} \times_{\rho} V$

$$\begin{aligned} \sigma \in W_M(E) &\leftrightarrow \phi \in U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V) & (2.94) \\ \tau \in W_M(T^*M \otimes E) &\leftrightarrow \alpha \in \bar{U}_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V). & (2.95) \end{aligned}$$

2.3.2 Geometrische Bedeutung eichtheoretischer Elemente

Eichtransformationen und Eichpotentiale. Sei $\mathcal{C} \subset U_{\mathcal{P}}^{\text{Ad}}(T^*\mathcal{P} \otimes \mathcal{G})$ die Menge der Zusammenhangsformen¹⁹ ω eines G -Hauptfaserbündels $\pi : \mathcal{P} \rightarrow M$ und $\sigma, \hat{\sigma}$ zwei Schnitte des Hauptfaserbündels über $\mathcal{O} \subset M$. Wir können $\omega \in \mathcal{C}$ einerseits mit dem Rücktransport σ^* auf

¹⁸Eine horizontale 1-Form nimmt nur den horizontalen Teil eines Vektors an, d.h. eine herkömmliche 1-Form τ wird durch die Vorschrift $\text{hor } \tau(v) := \tau(\text{hor } v)$ zu einer horizontalen 1-Form.

¹⁹Genauer ist mit \mathcal{C} nur eine Teilmenge aller Zusammenhangsformen gemeint, sog. nicht-reduzierbare Zusammenhangsformen einer bestimmten Sobolev-Klasse. Auf diese analytische Genauigkeiten kann in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen werden (mögliche Quellen sind [14] und [16]), vielmehr wollen wir uns auf die geometrischen Aspekte konzentrieren.

die Basis ziehen:

$$A := \sigma^* \omega, \quad (2.96)$$

womit sich eine 1-Form in $\mathcal{O} \subset M$ mit Werten $A_m(v_m) = (\sigma^* \omega)_m(v_m) = \omega_{\sigma(m)}(\sigma_* v_m) \in \mathcal{G}$ ergibt. Andererseits können wir den Rücktransport der Zusammenhangsform ω auf die Basis auch mit dem Schnitt $\hat{\sigma}$ durchführen, womit wir die 1-Form

$$\hat{A} := \hat{\sigma}^* \omega \quad (2.97)$$

in $\mathcal{O} \subset M$ mit Werten in \mathcal{G} erhalten (vgl. Abb. 2.5). Wir wollen nun eine Gleichung für den Übergang von A zu \hat{A} finden, d.h. eine Transformation, welche die Rücktransporte von $\omega \in \mathcal{C}$ auf die Basis des G -Hauptfaserbündels bezüglich zwei verschiedener Schnitte verknüpft. Dafür müssen wir zunächst eine Verbindung zwischen den beiden Schnitten herstellen. Da die Wirkung \mathcal{R}_g der Lie-Gruppe G in jeder Faser frei und transitiv ist und da $\sigma(m)$ und $\hat{\sigma}(m)$ Elemente der selben Faser sind, gibt es in jedem Punkt m ein Gruppenelement, welches die Bilder der Schnitte verknüpft. Für zwei gegebene Schnitte $\sigma, \hat{\sigma}$ können wir somit eine Abbildung $B : \mathcal{O} \subset M \rightarrow G$ definieren mit

$$\hat{\sigma}(m) = \mathcal{R}_{B(m)} \sigma(m), \quad \forall m \in \mathcal{O}. \quad (2.98)$$

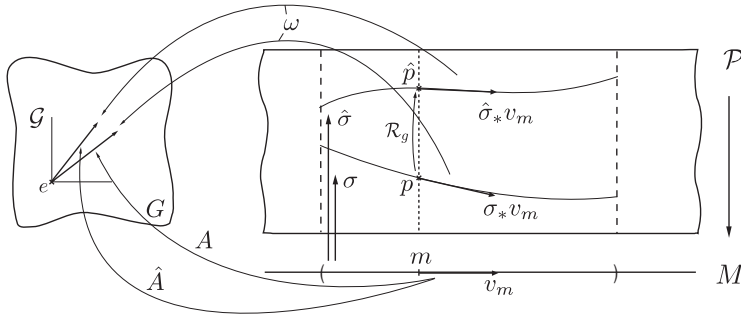


Abbildung 2.5: Rücktransport einer Zusammenhangsform ω bezüglich zwei verschiedener Schnitte σ und $\hat{\sigma}$.

Da wir $\hat{\sigma}^* \omega(v) = \omega(\hat{\sigma}_* v)$ mit $\sigma^* \omega(v) = \omega(\sigma_* v)$ vergleichen wollen, suchen wir zunächst eine Relation zwischen $\hat{\sigma}_* v$ und $\sigma_* v$. Sei γ eine Kurve in M , deren Tangentialvektor im Punkt $m = \gamma(0)$ durch v_m gegeben ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_* v_m &= \hat{\sigma}_* \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \hat{\sigma}(\gamma(t)) \stackrel{(2.98)}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_{B(\gamma(t))} \sigma(\gamma(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_{B(\gamma(t))} \sigma(m) + \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_{B(m)} \sigma(\gamma(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mathcal{R}_{B(\gamma(t))} \sigma(m) + \mathcal{R}_{B(m)*} (\sigma_* v_m). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Durch $\eta(t) := B(\gamma(t))$ wird eine Kurve in G mit $\eta(0) = B(m) =: g$ definiert. Verschieben wir die Kurve mit einer Linkstranslation $L_{g^{-1}}$, so ergibt sich $\zeta(t) := g^{-1} \eta(t)$ mit $\zeta(0) = e$ und wir können ein Element der Lie-Algebra $X \in \mathcal{G}$ finden, sodass $\zeta(t) = \exp(tX)$. Insgesamt erhalten wir

$$\mathcal{R}_{B(\gamma(t))} = \mathcal{R}_{B(m) \exp(tX)} = \mathcal{R}_{\exp(tX)} \mathcal{R}_{B(m)} \quad (2.100)$$

und damit aus (2.99)

$$\hat{\sigma}_* v_m = \frac{d}{dt} \Big|_0 \mathcal{R}_{\exp(tX)} \hat{\sigma}(m) + \mathcal{R}_{B(m)*}(\sigma_* v_m) \stackrel{(2.62)}{=} \xi_X(\hat{\sigma}(m)) + \mathcal{R}_{B(m)*}(\sigma_* v_m), \quad (2.101)$$

mit dem Fundamentalfeld ξ_X bezüglich der Rechtswirkung \mathcal{R}_g von G in \mathcal{P} . Das Lie-Algebra-Element X können wir mithilfe der kanonischen 1-Form in G bestimmen. Es gilt

$$B_* v_m = \frac{d}{dt} \Big|_0 B(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 L_{B(m)} \exp(tX) = L_{B(m)*} X = V_{B(m)}^X \quad (2.102)$$

und damit

$$X = \theta(V_{B(m)}^X) = \theta_{B(m)}(B_* v_m) = (B^* \theta)_m(v_m). \quad (2.103)$$

Wir erhalten mit $p := \sigma(m)$, $\hat{p} := \hat{\sigma}(m)$ und $g := B(m)$

$$\begin{aligned} \hat{A}_m(v_m) &= (\hat{\sigma}^* \omega)_m(v_m) = \omega_{\hat{p}}(\hat{\sigma}_* v_m) \stackrel{(2.101)}{=} \omega_{\hat{p}}(\xi_X(\hat{p})) + \omega_{\hat{p}}(\mathcal{R}_{g*}(\sigma_* v_m)) \\ &\stackrel{(2.86)}{=} X + (\mathcal{R}_g^* \omega)_p(\sigma_* v_m) \stackrel{(2.90)}{=} X + \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega_p(\sigma_* v_m)) \\ &\stackrel{(2.103)}{=} (B^* \theta)_m(v_m) + \text{Ad}_{g^{-1}}(\sigma^* \omega)_m(v_m) = (B^* \theta + \text{Ad}_{B^{-1}} A)_m(v_m). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Es ergibt sich somit die Transformationsgleichung

$$\hat{A}_m = \text{Ad}_{B(m)^{-1}} A_m + (B^* \theta)_m \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} = \text{Ad}_{B^{-1}} A + B^* \theta. \quad (2.105)$$

Falls die Lie-Gruppe G wie in Abschnitt 2.1 innerhalb eines k -dimensionalen Vektorraums W mit der Matrixdarstellung $\rho : G \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$, $g \mapsto \rho(g)$ wirkt, so lohnt es sich, die Transformationsgleichung (2.105) in dieser Darstellung zu betrachten. Dazu berechnen wir die abgeleitete Darstellung von $\hat{A}_m(v_m) \in \mathcal{G}$ in W :

$$\rho'(\hat{A}_m(v_m)) = \rho'(\text{Ad}_{B(m)^{-1}} A_m(v_m)) + \rho'(\theta_{B(m)}(B_* v_m)). \quad (2.106)$$

Für den ersten Term in (2.106) benutzen wir die Definition der adjunkten Darstellung von G in \mathcal{G} , $g e^X g^{-1} = e^{\text{Ad}_g X}$ und die der abgeleiteten Darstellung von \mathcal{G} in W , $e^{\rho'(X)} = \rho(e^X)$:

$$\begin{aligned} e^{\rho'(\text{Ad}_{g^{-1}} X)} &= \rho(e^{\text{Ad}_{g^{-1}} X}) = \rho(g^{-1} e^X g) = \rho(g^{-1}) \rho(e^X) \rho(g) = \rho(g^{-1}) e^{\rho'(X)} \rho(g) \\ &= e^{\rho(g)^{-1} \rho'(X) \rho(g)}. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \rho' \circ A_m : T_m M \rightarrow gl(k, \mathbb{R}), v_m \mapsto \mathcal{A}(v_m) \\ \mathcal{B} &:= \rho \circ B : M \rightarrow GL(k, \mathbb{R}), m \mapsto \mathcal{B}(m) =: \mathcal{B} \end{aligned} \quad (2.108)$$

erhalten wir für den ersten Term in (2.106)

$$\rho'(\text{Ad}_{B(m)^{-1}} A_m(v_m)) = \rho(B(m))^{-1} \rho'(A_m(v_m)) \rho(B(m)) = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}(v_m) \mathcal{B}. \quad (2.109)$$

Für den zweiten Term benutzen wir das Ergebnis aus (2.80): $\rho' \circ \theta_g = \bar{\theta}_{\rho(g)} \circ \rho_*$

$$\rho'(\theta_{\mathcal{B}(m)}(B_* v_m)) = \bar{\theta}_{\mathcal{B}(m)}(\rho_* B_* v_m) = \bar{\theta}_{\mathcal{B}(m)}(\mathcal{B}_* v_m). \quad (2.110)$$

Die kanonische 1-Form $\bar{\theta}$ ist nach (2.77) durch $\bar{\theta}_{\mathcal{B}(m)} = \mathcal{B}^{-1} d\mathcal{B}$ gegeben. Wir wählen nun als Basis-Mannigfaltigkeit den allgemeinen Konfigurationsraum \mathcal{M} mit Koordinaten x^μ wie in Abschnitt 1.3. Die Matrixeinträge \mathcal{B}_b^a sind einerseits die Koordinatenfunktionen der Gruppenelemente von $GL(k, \mathbb{R})$, können aber ebenso als Funktionen der Koordinaten x betrachtet werden: $\mathcal{B}_b^a(\mathcal{B}(m)) =: \mathcal{B}_b^a(x)$. Wir erhalten für die Matrixeinträge von (2.110)

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}^{-1} d\mathcal{B})_b^a(\mathcal{B}_* v_m) &= (\mathcal{B}^{-1})_c^a(x) d\mathcal{B}_b^c(\mathcal{B}_* v_m) = (\mathcal{B}^{-1})_c^a(x) v^\mu(x) d\mathcal{B}_b^c(\mathcal{B}_* \partial_\mu|_m) \\ &= (\mathcal{B}^{-1})_c^a(x) v^\mu(x) (\mathcal{B}_* \partial_\mu|_m) \mathcal{B}_b^c = (\mathcal{B}^{-1})_c^a(x) v^\mu(x) \partial_\mu(\mathcal{B}^* \mathcal{B}_b^c)(m) \\ &= (\mathcal{B}^{-1})_c^a(x) v^\mu(x) \partial_\mu \mathcal{B}_b^c(\mathcal{B}(m)) = v^\mu(x) (\mathcal{B}^{-1} \partial_\mu \mathcal{B})_b^a(x). \end{aligned} \quad (2.111)$$

Mit den Komponenten $\mathcal{A}_\mu(x) := \mathcal{A}(\partial_\mu|_m)$ nimmt (2.106) schließlich die bekannte Form einer Eichtransformation an:

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu(x) = (\mathcal{B}(x))^{-1} \mathcal{A}_\mu(x) \mathcal{B}(x) + (\mathcal{B}(x))^{-1} \partial_\mu \mathcal{B}(x) \quad (2.112)$$

$$\Leftrightarrow: \hat{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}_\mu \mathcal{B} + \mathcal{B}^{-1} \partial_\mu \mathcal{B}. \quad (2.113)$$

Dieses Ergebnis ermöglicht eine geometrische Interpretation der Eichpotentiale aus Abschnitt 2.1 und deren Eichtransformationen. Die Eichpotentiale \mathcal{A}_μ bezeichnen wir als *Komponenten der Zusammenhangsform ω bezüglich eines Schnitts*²⁰ σ , analog zu den Komponenten eines Vektors in einem linearen Raum bezüglich eines bestimmten Koordinatensystems:

$$\omega \xleftrightarrow{\sigma} \{\mathcal{A}_\mu\}. \quad (2.114)$$

Angenommen es gibt zwei Schnitte σ und σ' , sodass die Komponenten zweier verschiedener Zusammenhangsformen ω und ω' bezüglich σ und σ' übereinstimmen, dann hat ω' bezüglich σ die Komponenten $\{\mathcal{A}'_\mu\} = \{\mathcal{B} \mathcal{A}_\mu \mathcal{B}^{-1} + \mathcal{B} \partial_\mu \mathcal{B}^{-1}\}$ mit $\mathcal{B} = \rho(B)$ und $\sigma'(x) = \mathcal{R}_{\mathcal{B}(x)} \sigma(x)$. Es gilt also

$$\omega \xleftrightarrow{\sigma} \{\mathcal{A}_\mu\} \xleftrightarrow{\sigma'} \omega' \xleftrightarrow{\sigma} \{\mathcal{A}'_\mu\} = \{\mathcal{B} \mathcal{A}_\mu \mathcal{B}^{-1} + \mathcal{B} \partial_\mu \mathcal{B}^{-1}\}. \quad (2.115)$$

Die Existenz von Orbits im Raum \mathcal{F} der Eichpotentiale lässt sich damit auf \mathcal{C} übertragen. So gehören zwei verschiedene Zusammenhangsformen ω und ω' demselben Orbit an, falls es einen Schnitt σ gibt, sodass die Komponenten $\{\mathcal{A}_\mu\} \xleftrightarrow{\sigma} \omega$ und $\{\mathcal{A}'_\mu\} \xleftrightarrow{\sigma} \omega'$ durch eine Eichtransformation verknüpft werden können, d.h. es wird durch (2.28) eine Äquivalenzrelation in \mathcal{C} induziert

$$\omega \sim \omega' : \Leftrightarrow \{\mathcal{A}_\mu\} \sim \{\mathcal{A}'_\mu\}. \quad (2.116)$$

Die Äquivalenzrelation ist unabhängig vom Schnitt σ , da es für einen beliebigen anderen Schnitt Σ immer eine Abbildung $B' : \mathcal{M} \rightarrow G$ gibt, sodass $\Sigma(x) = \mathcal{R}_{B'(x)} \sigma(x)$ und dann eine Eichtransformation zwischen den Komponenten der Zusammenhangsformen bezüglich des Gruppenelements $B'^{-1} \mathcal{B} B'$ existiert.

²⁰Falls keine globalen ($\mathcal{O} = M$) Schnitte existieren, müssen wir mehrere lokale Schnitte benutzen, um einen großen Bereich oder ganz M abzudecken. Um die Komplexität der Notation in Grenzen zu halten, werden wir diese Genauigkeit im Folgenden vernachlässigen.

Die Quotientenmenge $\mathcal{C} := \mathcal{E} / \sim$, d.h. der Raum der Orbits in \mathcal{E} ist der physikalisch relevante Teil von \mathcal{E} . Unter bestimmten Bedingungen²¹ ist \mathcal{C} eine Mannigfaltigkeit. Damit können wir \mathcal{C} als Basis eines Faserbündels $\mathfrak{p} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$ auffassen, wobei die Fasern durch die Orbits der Eichtransformationen gegeben sind (vgl. Abb. 2.6).

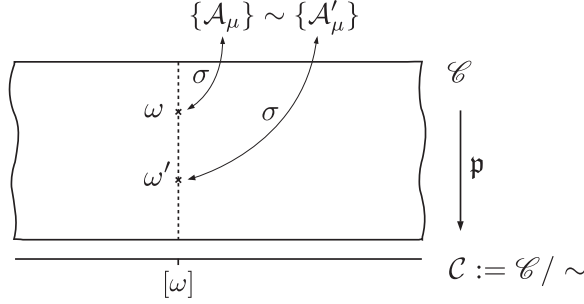


Abbildung 2.6: Der Orbitraum \mathcal{C} ist die Basis eines Faserbündels mit Totalraum \mathcal{E} .

Eichtransformation äquivarianter Funktionen und horizontaler 1-Formen. Um die Form der Eichtransformationen äquivarianter Funktionen vom Typ ρ , $\phi \in U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V)$ und äquivarianter horizontaler 1-Formen, $\alpha \in \bar{U}_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V)$ zu finden, berechnen wir jeweils die Rücktransporte bezüglich verschiedener Schnitte. Seien $\varphi := \sigma^*\phi$ und $\hat{\varphi} := \hat{\sigma}^*\phi$, dann gilt für $x \in \mathcal{M}$

$$\hat{\varphi}(x) = (\hat{\sigma}^*\phi)(x) = \phi(\hat{\sigma}(x)) = \phi(\mathcal{R}_{B(x)}\sigma(x)) = \rho(B(x)^{-1})(\sigma^*\phi)(x). \quad (2.117)$$

Für äquivariante horizontale 1-Formen $\alpha \in \bar{U}_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V)$ gilt (mit $v \in T_x\mathcal{M}$, $\lambda := \sigma^*\alpha$ und $\hat{\lambda} := \hat{\sigma}^*\alpha$)

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(v) &:= (\hat{\sigma}^*\alpha)(v) = \alpha(\hat{\sigma}_*v) \stackrel{(2.101)}{=} \alpha(\xi_X(\hat{\sigma}(x)) + \mathcal{R}_{B(x)*}(\sigma_*v)) \\ &= \alpha(\mathcal{R}_{B(x)*}\sigma_*v) = \mathcal{R}_{B(x)}^*\alpha(\sigma_*v) \stackrel{(2.93)}{=} \rho(B(x)^{-1})(\sigma^*\alpha)(v). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Falls für verschiedene äquivariante Funktionen ϕ und ϕ' bzw. horizontale 1-Formen α und α' die Rücktransporte bezüglich zweier Schnitte σ und σ' übereinstimmen, $\sigma^*\phi = \varphi = \sigma'^*\phi'$ bzw. $\sigma^*\alpha = \lambda = \sigma'^*\alpha'$, so gibt es eine Eichtransformation, die φ mit $\varphi' := \sigma^*\phi'$ und λ mit $\lambda' := \sigma^*\alpha'$ verbindet. Mit $\sigma'(x) := \mathcal{R}_{B(x)}\sigma(x)$ erhalten wir

$$\varphi'(x) = \rho(B(x))\varphi(x), \quad \lambda'(v) = \rho(B(x))\lambda(v). \quad (2.119)$$

Bemerkung

Haben die Funktionen und 1-Formen Werte im k -dimensionalen Vektorraum W (d.h. $V = W$), auf dem G in der *Matrixdarstellung* ρ wirkt, so ergibt sich mit $\rho_{B(x)} := \mathcal{B}(x) \in GL(k, \mathbb{R})$ die Transformation $\varphi'(x) = \mathcal{B}(x)\varphi(x)$, d.h. die Eichtransformationen äquivarianter Funktionen haben in Matrixdarstellung die Form der Transformationen (2.6) der Materiefelder φ aus Abschnitt 2.1.

Die Darstellung von Zusammenhangsformen und horizontalen äquivarianten 1-Formen eines G -Hauptfaserbündels in *Komponenten* im Sinne von Seite 32, d.h. durch die Matrixdarstellung der Rücktransporte (bezüglich eines Schnitts) in einem Vektorraum W , ermöglicht gemeinsam

²¹Siehe im Appendix von [13] und [17].

mit deren Transformationsverhalten die Interpretation des Objekts $\Omega := \omega + \tau$, mit $\omega \in \mathcal{C}$, $\tau \in \bar{U}_{\mathcal{P}}^{\text{Ad}}(T^*\mathcal{P} \otimes \mathcal{G}) =: \mathcal{T}$. Seien σ, σ' zwei Schnitte von \mathcal{P} , $B : \mathcal{M} \rightarrow G$ eine durch $\sigma'(x) = \mathcal{R}_{B(x)}\sigma(x)$ definierte G -wertige Funktion, welche die Eichtransformation erzeugt, $i := \sigma^*\tau$ der Rücktransport von τ auf die Basis, $\iota := \rho' \circ i$ die Matrixdarstellung der Lie-Algebra-wertigen 1-Form i in \mathcal{M} und $\iota_\mu(x)dx^\mu$ deren Zerlegung in Koordinaten-1-Formen mit Komponenten $\iota_\mu(x) \in \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$, kurz $\tau \xleftrightarrow{\sigma} \{\iota_\mu\}$. Nach (2.119) ist

$$\tau \xleftrightarrow{\sigma} \{\iota_\mu\} \xleftrightarrow{\sigma'} \tau' \xleftrightarrow{\sigma} \{\rho'(\text{Ad}_{B(x)}i(\partial_\mu|_x))\} \stackrel{(2.107)}{=} \{\mathcal{B}\iota_\mu\mathcal{B}^{-1}\} \quad (2.120)$$

und damit

$$\Omega \xleftrightarrow{\sigma} \{\mathcal{A}_\mu + \iota_\mu\} \xleftrightarrow{\sigma'} \Omega' \xleftrightarrow{\sigma} \{\mathcal{B}(\mathcal{A}_\mu + \iota_\mu)\mathcal{B}^{-1} + \mathcal{B}\partial_\mu\mathcal{B}^{-1}\}, \quad (2.121)$$

d.h. $\Omega = \omega + \tau \in \mathcal{C}$. Folglich ist $(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ ein affiner Raum mit Punktraum \mathcal{C} und Verschiebungsvektorraum \mathcal{T} . Jeder Punkt in $\omega \in \mathcal{C}$ kann dann mit einem Tangentialraum $T_\omega\mathcal{C} \equiv \mathcal{T}$ ausgestattet werden (vgl. [14]).

Kovariante Ableitung. Sei $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ ein G -Hauptfaserbündel mit Zusammenhangsform ω und V ein Vektorraum, auf dem die Gruppe G durch die Darstellung ρ wirkt. Die *äußere kovariante Ableitung bezüglich ω* einer äquivarianten Funktion vom Typ ρ , $\phi : \mathcal{P} \rightarrow V$, ist definiert durch

$$D_\omega\phi := \text{hor } d\phi. \quad (2.122)$$

Wenn klar ist bezüglich welcher Zusammenhangsform die kovariante Ableitung zu bilden ist, wird meist nur $D\phi$ geschrieben. Der Ausdruck (2.122) kann äquivalent durch die Vorschrift

$$D_\omega\phi = d\phi + \rho'(\omega)\phi \quad (2.123)$$

dargestellt werden. Um dies zu sehen, zerlegen wir $v_p \in T_p\mathcal{P}$ in den horizontalen und vertikalen Anteil, $v_p = \text{hor } v_p + \xi_X(p)$, und überprüfen die Behauptung separat. Für den horizontalen Anteil ist Gl. (2.123) wegen $D\phi(\text{hor } v_p) := \text{hor } d\phi(\text{hor } v_p) = d\phi(\text{hor hor } v_p) = d\phi(\text{hor } v_p)$ und $\omega(\text{hor } v_p) = 0$ erfüllt. Der vertikale Teil, der Vektor des Fundamentalfelds ξ_X im Punkt p , wird durch $D\phi$ annulliert: $D\phi(\xi_X(p)) = d\phi(\text{hor } \xi_X(p)) = 0$. Wegen $\omega(\xi_X(p)) = X$ und

$$d\phi(\xi_X(p)) = \xi_X(p)\phi = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \phi(\mathcal{R}_{\exp tX} p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \rho(-e^{tX})\phi(p) = -\rho'(X)\phi(p) \quad (2.124)$$

ist $d\phi(\xi_X(p)) + \rho'(X)\phi(p) = 0$, d.h. Gl. (2.123) wird erfüllt.

Da wir in Abschnitt 2.1 die kovariante Ableitung für Funktionen $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow W$ auf der Basis \mathcal{M} mit Werten $(\varphi^1, \dots, \varphi^k)$ in einem k -dimensionalen Vektorraum W eingeführt haben, wollen wir (2.122) für solche Funktionen modifizieren: Die *äußere kovariante Ableitung \mathfrak{D} auf der Basis* ist gegeben durch

$$\mathfrak{D} \circ \sigma^* = \sigma^* \circ D. \quad (2.125)$$

Wenden wir \mathfrak{D} auf eine Funktion $\varphi := \sigma^*\phi : \mathcal{M} \rightarrow V$ an, d.h. auf den Rücktransport einer äquivarianten Funktion ϕ vom Typ ρ , und benutzen

$$(\sigma^*d\phi)(v) = d\phi(\sigma_*v) = (\sigma_*v)\phi = v(\sigma^*\phi) = d(\sigma^*\phi)(v), \quad (2.126)$$

d.h. $\sigma^* \circ d = d \circ \sigma^*$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\varphi &= (\mathfrak{D} \circ \sigma^*)\phi = \sigma^*(D\phi) = \sigma^*(d\phi + \rho'(\omega)\phi) = d(\sigma^*\phi) + \rho'(\sigma^*\omega)\sigma^*\phi \\ &= d\varphi + \rho'_A \varphi.\end{aligned}\tag{2.127}$$

Bemerkungen

(i) Ist $V = W$ mit der Matrixdarstellung ρ , so gilt mit der Notation aus (2.108): $\mathfrak{D}\varphi = d\varphi + \mathcal{A}\varphi$ und die Komponenten $\mathfrak{D}_\mu\varphi$ bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{D}\varphi = \mathfrak{D}_\mu\varphi(x) dx^\mu$ in Basis-1-Formen dx^μ stimmen mit der kovarianten Ableitung (2.15) aus Abschnitt 2.1 überein. Wir bezeichnen deshalb beide Objekte mit *kovariante Ableitung*.

(ii) In einer Basis $\{e_i\}$ von W , $\varphi(x) = e_i \varphi^i(x)$, gilt

$$\mathfrak{D}\varphi = e_i d\varphi^i + e_i (\mathcal{A}\varphi)^i = e_i (d\varphi^i + \mathcal{A}_j^i \varphi^j) =: e_i \mathfrak{D}\varphi^i\tag{2.128}$$

mit den Koordinatenfunktionen $\varphi^i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

(iii) Manchmal wird mit dem Symbol $\nabla_U\varphi := \mathfrak{D}\varphi(U)$ die *kovariante Ableitung entlang eines Vektorfelds* $U \in T\mathcal{M}$ bezeichnet. Dies ist eine Abbildung auf \mathcal{M} mit Werten in W : $\nabla_U\varphi = U\varphi + \mathcal{A}(U)\varphi : \mathcal{M} \rightarrow W, x \mapsto \nabla_{U_x}\varphi$. Für $U = \partial_\mu$ ergibt sich

$$\nabla_\mu\varphi := \nabla_{\partial_\mu}\varphi = \mathfrak{D}\varphi(\partial_\mu) = d\varphi(\partial_\mu) + \mathcal{A}(\partial_\mu)\varphi = \partial_\mu\varphi + \mathcal{A}_\mu\varphi \equiv \mathfrak{D}_\mu\varphi.\tag{2.129}$$

Gehen wir zurück in den Totalraum \mathcal{P} und untersuchen die Abbildung $D\phi(\zeta) : \mathcal{P} \rightarrow V$ für ein Vektorfeld $\zeta \in T\mathcal{P}$ und einen Vektorraum V . Wenn diese Abbildung äquivariant ist, können wir $D\phi$ der Menge $\bar{U}_\mathcal{P}^\rho(T^*\mathcal{P} \otimes V)$ der horizontalen äquivarianten 1-Formen in \mathcal{P} mit Werten in V zuordnen. $D\phi(\zeta)$ am Punkt $\mathcal{R}_g p$ ergibt

$$\begin{aligned}(D\phi(\zeta) \circ \mathcal{R}_g)(p) &= D\phi(\zeta_{\mathcal{R}_g p}) = d\phi(\zeta_{\mathcal{R}_g p}) + \rho'(\omega(\zeta_{\mathcal{R}_g p}))\phi(\mathcal{R}_g p) \\ &\stackrel{(2.89)}{=} d\phi(\zeta_{\mathcal{R}_g p}) + \rho'(\text{Ad}_{g^{-1}}\omega(\zeta_p))\phi(\mathcal{R}_g p) \\ &\stackrel{(2.107)}{=} d\phi(\zeta_{\mathcal{R}_g p}) + \rho_{g^{-1}}\rho'(\omega(\zeta_p))\rho_g\phi(\mathcal{R}_g p) \\ &= \zeta_{\mathcal{R}_g p}\phi + \rho_{g^{-1}}\rho'(\omega(\zeta_p))\rho_g\rho_{g^{-1}}\phi(p) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0\phi(\mathcal{R}_g\gamma(t)) + \rho_{g^{-1}}\rho'(\omega(\zeta_p))\phi(p) \\ &= \rho_{g^{-1}}\left.\frac{d}{dt}\right|_0\phi(\gamma(t)) + \rho_{g^{-1}}\rho'(\omega(\zeta_p))\phi(p) \\ &= \rho_{g^{-1}}[\zeta_p\phi + \rho'(\omega(\zeta_p))\phi(p)] = (\rho_{g^{-1}} \circ D\phi(\zeta))(p).\end{aligned}\tag{2.130}$$

Somit ist $D_\omega\phi$ eine horizontale äquivariante 1-Form vom Typ ρ aus $\bar{U}_\mathcal{P}^\rho(T^*\mathcal{P} \otimes V)$. Die äußere kovariante Ableitung bezüglich ω ist folglich eine Abbildung

$$D_\omega : U_\mathcal{P}^\rho(V) \rightarrow \bar{U}_\mathcal{P}^\rho(T^*\mathcal{P} \otimes V).\tag{2.131}$$

2.3.3 Volumenelement in \mathcal{C}

Die wesentlichen Elemente der folgenden Ausführungen wurden zuerst in [12] und [13] vorgeschlagen und u.a. in [14] weiterentwickelt.

Skalarprodukt äquivarianter Abbildungen. Falls in V ein Skalarprodukt vorhanden ist, lassen sich auch die Mengen $U_\mathcal{P}^\rho(V)$ und $U_\mathcal{P}^\rho(T^*\mathcal{P} \otimes V)$ in natürlicher Weise mit einem

Skalarprodukt ausstatten. Sei h ein ρ -invariantes²² Skalarprodukt in V , $\{E_a\}$ eine Basis in V , $\sigma : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{P}$ ein Schnitt des G -Hauptfaserbündels $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ über $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ und $\phi, \psi \in U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V)$ äquivariante Funktionen vom Typ ρ . Für die Rücktransporte $\sigma^*\phi =: \Phi$ und $\sigma^*\psi =: \Psi$ mit den Zerlegungen $\Phi(x) = \Phi^a(x)E_a$ und $\Psi(x) = \Psi^a(x)E_a$ ist durch

$$(\Phi, \Psi) := \int_{\mathcal{O}} h(\Phi(x), \Psi(x)) d^n x = \int_{\mathcal{O}} h_{ab} \Phi^a(x) \Psi^b(x) d^n x \quad (2.132)$$

ein Skalarprodukt definiert. Für Rücktransporte Φ' und Ψ' bezüglich eines anderen Schnitts σ' ergibt sich aus der ρ -Invarianz von h :

$$\begin{aligned} h(\Phi'(x), \Psi'(x)) &= h(\phi(\sigma'(x)), \psi(\sigma'(x))) = h(\phi(\mathcal{R}_{B(x)}\sigma(x)), \psi(\mathcal{R}_{B(x)}\sigma(x))) \\ &= h(\rho_{B(x)^{-1}}\Phi(x), \rho_{B(x)^{-1}}\Psi(x)) = h(\Phi(x), \Psi(x)), \end{aligned} \quad (2.133)$$

d.h. das Skalarprodukt (2.132) ist unabhängig von der Wahl des Schnitts bezüglich dem die äquivarianten Funktionen ϕ und ψ rücktransportiert werden. Insbesondere dient (2.132) damit als Skalarprodukt der äquivarianten Funktionen selbst: $(\phi, \psi) := (\Phi, \Psi)$ mit $\phi, \psi \in U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V)$.

Analog können wir in $U_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V)$ ein Skalarprodukt einführen, denn die Komponenten $\hat{\alpha}_{\mu}(x) = \hat{\alpha}(\partial_{\mu}) := (\sigma^*\alpha)(\partial_{\mu})$ der Rücktransporte $\hat{\alpha}$ der 1-Formen $\alpha \in U_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V)$ verhalten sich bezüglich dem Wechsel zwischen Schnitten σ, σ' gleich wie die Rücktransporte $\Phi = \sigma^*\phi$ der äquivarianten Funktionen ϕ :

$$\hat{\alpha}'_{\mu}(x) = \hat{\alpha}'(\partial_{\mu}|_x) = \alpha((\mathcal{R}_{B(x)}\sigma)_* \partial_{\mu}|_x) = \mathcal{R}_{B(x)}^* \alpha(\sigma_* \partial_{\mu}|_x) \stackrel{(2.93)}{=} \rho_{B(x)^{-1}} \hat{\alpha}_{\mu}(x). \quad (2.134)$$

Insgesamt erhalten wir für $\phi, \psi \in U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V)$ und $\alpha, \beta \in U_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V)$

$$(\phi, \psi) = \int_{\mathcal{O}} h(\Phi(x), \Psi(x)) d^n x \quad (2.135)$$

$$(\alpha, \beta) = \int_{\mathcal{O}} h(\hat{\alpha}^{\mu}(x), \hat{\beta}_{\mu}(x)) d^n x. \quad (2.136)$$

Adjunkte der kovarianten Ableitung. Wir bezeichnen die *Adjunkte* der äußeren kovarianten Ableitung bezüglich der oben eingeführten Skalarprodukte mit D_{ω}^{\dagger} , d.h. für $\phi \in U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V)$ und $\alpha \in \bar{U}_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V)$ ist $(D_{\omega}^{\dagger}\alpha, \phi) := (\alpha, D_{\omega}\phi)$. D_{ω}^{\dagger} ist also eine Abbildung

$$D_{\omega}^{\dagger} : \bar{U}_{\mathcal{P}}^{\rho}(T^*\mathcal{P} \otimes V) \rightarrow U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V). \quad (2.137)$$

Die Komposition der kovarianten Ableitung und ihrer Adjunkten liefert einen Operator auf $U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V)$

$$\square_{\omega} := D_{\omega}^{\dagger} D_{\omega} : U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V) \rightarrow U_{\mathcal{P}}^{\rho}(V). \quad (2.138)$$

Für alle $\omega \in \mathcal{C}$ existiert die Inverse²³ von \square_{ω} , die wir mit \mathcal{I}_{ω} bezeichnen. Wir können analog zu (2.125) auch die *adjunkte kovariante Ableitung auf der Basis* einführen, durch $\mathfrak{D}^{\dagger} \circ \sigma^* := \sigma^* \circ D^{\dagger}$.

²²Ein Skalarprodukt h in V ist ρ -invariant, falls $h(\rho_g v, \rho_g w) = h(v, w) \equiv h_{ab} v^a w^b$, für alle $g \in G$. In [10] wird gezeigt, wie aus einem beliebigen Skalarprodukt in V für kompakte Lie-Gruppen immer ein ρ -invariantes Skalarprodukt konstruiert werden kann.

²³Aufgrund der in Fußnote 19 vermerkten Einschränkungen der Zusammenhangsformen ω aus \mathcal{C} ist \square_{ω} invertierbar (siehe [13] und [14]).

Lie-Algebra in adjunkter Darstellung und Killing-Cartan-Form. Im Folgenden interessieren wir uns vor allem für Funktionen und 1-Formen mit Werten in \mathcal{G} , d.h. wir wählen als Vektorraum V die Lie-Algebra \mathcal{G} . Die Lie-Gruppe G wirkt in \mathcal{G} in adjunkter Darstellung Ad und die Lie-Algebra wirkt in sich selbst durch die von Ad abgeleitete Darstellung $\text{Ad}' = \text{ad}$. Diese Darstellung hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) Die darstellende Matrix der Wirkung der Generatoren E_a wird durch $\text{ad}_{E_a} E_b =: (\text{ad}_{E_a})_b^c E_c$ definiert. Andererseits ist $\text{ad}_{E_a} E_b = [E_a, E_b] = c_{ab}^c E_c$, d.h. es gilt $(\text{ad}_{E_a})_b^c = c_{ab}^c$.
- (ii) Wir beschränken uns auf Lie-Gruppen mit halbeinfacher Lie-Algebra, denn nach dem Kriterium von Cartan ist dann die sog. *Killing-Cartan-Form* $K(X, Y) := \text{Sp}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) \equiv E^a(\text{ad}_X \text{ad}_Y E_a)$ nicht-entartet²⁴ und liefert deshalb ein Skalarprodukt in \mathcal{G} , das sogar Ad -invariant ist:

$$K(\text{Ad}_g X, \text{Ad}_g Y) = \text{Sp}(\text{Ad}_g \text{ad}_X \text{Ad}_{g^{-1}} \text{Ad}_g \text{ad}_Y \text{Ad}_{g^{-1}}) = \text{Sp}(\text{ad}_X \text{ad}_Y) = K(X, Y). \quad (2.139)$$

- (iii) Für $X, Y \in \mathcal{G}$ können wir in einer Basis $\{E_a\}$ der Lie-Algebra die Kurzschreibweise

$$K(X, Y) = X^a Y^b K(E_a, E_b) =: k_{ab} X^a Y^b = X_a Y^a \quad (2.140)$$

verwenden, d.h. $k_{ab} X^b =: X_a$. Die Matrix $(k_{ab})_{a,b=1,\dots,N}$ lässt sich durch die Strukturkonstanten der Lie-Algebra darstellen:

$$\begin{aligned} K(E_a, E_b) &= E^c(\text{ad}_{E_a} \text{ad}_{E_b} E_c) = E^c([E_a, [E_b, E_c]]) = c_{bc}^d E^c([E_a, E_d]) \\ &= c_{bc}^d c_{ad}^e E^c(E_e) = c_{bc}^d c_{ad}^e. \end{aligned} \quad (2.141)$$

- (iv) Die Ad -invarianz der Killing-Cartan-Form kann benutzt werden, um eine nützliche Eigenschaft der Strukturkonstanten zu erhalten. Für $g = \exp tZ$ ist $K(\text{Ad}_{\exp tZ} X, \text{Ad}_{\exp tZ} Y) = K(X, Y)$. Leiten wir diese Gleichung nach t ab und setzen anschließend $t = 0$, so ergibt sich aus der Definition der abgeleiteten Darstellung $\text{Ad}' = \text{ad}$

$$K(\text{ad}_Z X, Y) + K(X, \text{ad}_Z Y) = 0. \quad (2.142)$$

Wenn wir für X, Y und Z die Generatoren E_a, E_b und E_c einsetzen, erhalten wir

$$k_{db} c_{ca}^d + k_{ad} c_{cb}^d =: c_{bca} + c_{acb} = 0. \quad (2.143)$$

Da die Strukturkonstanten c_{bc}^a per Definition in den Indizes b und c antisymmetrisch sind, folgt aus (2.143) die Antisymmetrie in allen Indizes.

Separation des Tangentialraums $T_\omega \mathcal{C}$. Sei $\tau \in \text{Ker } D_\omega^\dagger \subset \mathcal{T} := \bar{U}_{\mathcal{P}}^{\text{Ad}}(T^* \mathcal{P} \otimes \mathcal{G})$ und $\xi \in U_{\mathcal{P}}^{\text{Ad}}(\mathcal{G})$ so ist $0 = (D_\omega^\dagger \tau, \xi) = (\tau, D_\omega \xi)$, d.h. alle Bilder $D_\omega \xi \in \text{Im } D_\omega$, sind orthogonal zu den Elementen des Kerns $\text{Ker } D_\omega^\dagger$. Tatsächlich gibt es nur Elemente aus \mathcal{T} , die entweder Bilder von D_ω sind oder dem Kern von D_ω^\dagger angehören, denn in [18] wird explizit gezeigt, dass jeder Tangentialraum $T_\omega \mathcal{C} = \mathcal{T}$ in die zwei orthogonale Unterräume separiert werden kann:

$$T_\omega \mathcal{C} = \text{Im } D_\omega \oplus \text{Ker } D_\omega^\dagger. \quad (2.144)$$

Diese Zerlegung ist nützlich, wenn wir \mathcal{C} als Totalraum des Faserbündels $\mathfrak{p} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ auffassen.

Die Gleichung $\hat{\omega} := \omega + \varepsilon D_\omega \xi$ definiert eine Zusammenhangsform, die relativ zu ω um einen kleinen Parameter $\varepsilon > 0$ in Richtung $D_\omega \xi \in T_\omega \mathcal{C}$ verschoben wurde. Damit wir die Komponenten $\{\hat{\mathcal{A}}_\mu\} \xrightarrow{\varepsilon} \hat{\omega}$ angeben können, berechnen wir zuerst die Komponenten von $D_\omega \xi$: Bezeichnet $Y := \sigma^* \xi$ den Rücktransport der äquivarianten Funktion $\xi \in U_{\mathcal{P}}^{\text{Ad}}(\mathcal{G})$ auf die Basis, so ergibt sich wegen (2.125) und (2.127): $\sigma^*(D_\omega \xi) = \mathfrak{D}_\omega Y = dY + \text{ad}_A Y$. Mit der Notation $\mathcal{Y} := \rho' \circ Y$ für die

²⁴Eine Bilinearform $K(X, Y)$ ist nicht-entartet, falls aus der Gültigkeit der Gleichung $K(X, Y) = 0$, für alle Y , folgt $X = 0$. Der Zusammenhang zwischen halbeinfachen Lie-Algebren und der Killing-Cartan-Form wird z.B. in [10] formuliert.

Matrixdarstellung des Rücktransports Y im Vektorraum W erhalten wir für die Komponenten von $\hat{\omega}$ bezüglich σ

$$\omega + \varepsilon D_\omega \xi \xrightarrow{\sigma} \{\mathcal{A}_\mu + \varepsilon \partial_\mu \mathcal{Y} + \varepsilon \rho'([A_\mu, Y])\} = \{\mathcal{A}_\mu + \varepsilon (\partial_\mu \mathcal{Y} + [A_\mu, \mathcal{Y}])\}. \quad (2.145)$$

Andererseits gibt es in der Nähe von ω Zusammenhangsformen ω' , die über infinitesimale Eichtransformationen aus ω hervorgehen. Diese haben nach (2.17) die Komponenten

$$\omega' \xrightarrow{\sigma} \{\mathcal{A}_\mu^{1+\varepsilon\theta}\} = \{\mathcal{A}_\mu - \varepsilon([A_\mu, \theta] + \partial_\mu \theta)\}. \quad (2.146)$$

Aus (2.145) und (2.147) schließen wir, dass die Zusammenhangsform $\omega + \varepsilon D_\omega \xi$ durch eine infinitesimale Eichtransformation mit der Matrix $\mathbb{1} - \varepsilon \mathcal{Y}$ aus ω hervorgeht. Das bedeutet, dass der Vektor $D_\omega \xi \in T_\omega \mathcal{C}$ tangential zur Faser des Bündels $\mathfrak{p} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ im Punkt ω liegt. Die orthogonale Zerlegung (2.144) des Tangentialraums $T_\omega \mathcal{C}$ ist damit sogar eine Zerlegung in eine vertikale $\mathcal{V}_\omega := \text{Im } D_\omega$ und horizontale $\mathcal{H}_\omega := \text{Ker } D_\omega^\dagger$ Distribution des Bündels $\mathfrak{p} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$

$$T_\omega \mathcal{C} = \mathcal{V}_\omega \oplus \mathcal{H}_\omega. \quad (2.147)$$

Die Komposition $\Lambda_\omega := D_\omega \mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger$ projiziert jeden Vektor aus $T_\omega \mathcal{C}$ in den vertikalen Teilraum $\mathcal{V}_\omega \subset T_\omega \mathcal{C}$, denn für eine Zerlegung von $v_\omega \in T_\omega \mathcal{C}$ gemäß (2.147), $v_\omega = D_\omega \xi + v_\omega^h$, erhalten wir

$$\Lambda_\omega v_\omega = D_\omega \mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger v_\omega = D_\omega \underbrace{\mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger D_\omega}_=1 \xi + D_\omega \mathcal{I}_\omega \underbrace{D_\omega^\dagger v_\omega^h}_=0 = D_\omega \xi \in \mathcal{V}_\omega. \quad (2.148)$$

Durch $\Pi_\omega := \mathbb{1} - D_\omega \mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger$ wird dann ein Projektor $\Pi_\omega : T_\omega \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}_\omega$ definiert, der in die horizontale Distribution abbildet und für den gilt $\Pi_\omega^2 = \Pi_\omega = \Pi_\omega^\dagger$.

Metrischer Tensor in \mathcal{C} und \mathcal{C} . Mit dem Skalarprodukt in $\mathcal{T} = \bar{U}_\mathcal{P}^{\text{Ad}}(T^*\mathcal{P} \otimes \mathcal{G})$ lässt sich in jedem Punkt $\omega \in \mathcal{C}$ eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform $g : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren, also ein metrischer Tensor über dem affinen Raum \mathcal{C} mit Verschiebungsraum \mathcal{T}

$$g_\omega(\tau, v) := (\tau, v) \equiv \int_{\mathcal{O}} K(\hat{\tau}^\mu(x), \hat{v}_\mu(x)) d^n x \equiv \int \hat{\tau}_a^\mu(x) \hat{v}_\mu^a(x) d^n x \quad (2.149)$$

mit der Killing-Cartan-Form K und den Rücktransporten $\hat{\tau}$ und \hat{v} bezüglich eines beliebigen Schnitts. Angenommen, wir werten g_ω an einer anderen Stelle ω' im gleichen Orbit aus, d.h. in $\omega' \sim \omega$, so folgt aus der Ad-Invarianz der Killing-Cartan-Form: $g_{\omega'}(\tau', v') = g(\tau, v)$, d.h. g_ω ist eichinvariant. Sei nun $a \in \mathcal{C}$ und $\omega \in \mathfrak{p}^{-1}(a)$ ein Punkt aus dem Orbit über a . Für zwei Vektoren $u, v \in T_a \mathcal{C}$ gibt es eindeutige horizontale Lifte $u_\omega^h, v_\omega^h \in \mathcal{H}_\omega \subset T_\omega \mathcal{C}$ mit $\mathfrak{p}_* u_\omega^h = u$ und $\mathfrak{p}_* v_\omega^h = v$. Da g_ω eichinvariant ist, können wir in \mathcal{C} durch

$$g(u, v) := g_\omega(u_\omega^h, v_\omega^h) \equiv (u_\omega^h, v_\omega^h) \quad (2.150)$$

einen metrischen Tensor einführen. g ist wohldefiniert, da die rechte Seite der Definition nicht davon abhängt, welcher Punkt $\omega \in \mathfrak{p}^{-1}(a)$ des Orbits gewählt wird.

Ein metrischer Tensor auf einer Mannigfaltigkeit M ermöglicht die Definition eines natürlichen Volumenelements durch die sog. *Volumenform*, eine Differentialform höchster Ordnung, die in lokalen Koordinaten x^i durch $w_g = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =: \sqrt{|\det g|} d^n x$ gegeben ist (vgl. [10]). Das Volumen von $\mathcal{O} \subset M$ wird dann durch $\int_{\mathcal{O}} w_g$ bestimmt, das Integral einer Funktion

f über \mathcal{O} durch $\int_{\mathcal{O}} w_g f(x)$. Mit dem metrischen Tensor in \mathcal{C} lässt sich somit ein natürliches Volumenelement im Orbitraum definieren. Die geometrische Interpretation der Faddeev-Popov-Determinante gründet genau auf dieser Möglichkeit, Volumen zu definieren.

Hintergrundeichung. Wir legen einen Punkt $a_0 \in \mathcal{C}$ und $\omega_0 \in \mathfrak{p}^{-1}(a_0)$ fest und definieren einen Unterraum von \mathcal{C} durch

$$\mathcal{S}_0 := \{\omega \in \mathcal{C} \mid D_{\omega_0}^\dagger(\omega - \omega_0) = 0\}. \quad (2.151)$$

\mathcal{S}_0 besteht also aus allen Zusammenhangsformen ω , die über die horizontalen Vektoren $\tau \in \mathcal{H}_{\omega_0}$ aus ω_0 durch $\omega = \omega_0 + \tau$ hervorgehen. Die Festlegung dieses Teilraums wird als *Hintergrundeichung* bezeichnet. Innerhalb einer genügend kleinen Umgebung²⁵ von a_0 dient \mathcal{S}_0 als lokaler Schnitt $\Gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ des Bündels $\mathfrak{p} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ (vgl. Abb. 2.7), also gewissermaßen als Repräsentation eines Teils des Orbitraums \mathcal{C} in \mathcal{C} . So wird einem Punkt $a \in \mathcal{C}$ in der Umgebung von a_0 der Schnittpunkt des Orbits $\mathfrak{p}^{-1}(a)$ mit \mathcal{S}_0 zugeordnet, $\omega := \mathfrak{p}^{-1}(a) \cap \mathcal{S}_0$. Das heißt, es wird jeder Äquivalenzklasse $a = [\omega]$ in dieser Umgebung ein Repräsentant $\omega \in \mathcal{C}$ zugeordnet, was der Definition einer Eichbedingung $f(\mathcal{A}) = 0$ aus Abschnitt 2.2 entspricht. Zwei Vektoren $u, v \in T_a\mathcal{C}$ werden durch $U := \Gamma_*u$ und $V := \Gamma_*v$ in $T_\omega\mathcal{S}_0 \equiv \mathcal{H}_{\omega_0} =: \mathcal{H}_0$ dargestellt, d.h. $D_{\omega_0}^\dagger U = D_{\omega_0}^\dagger V = 0$.

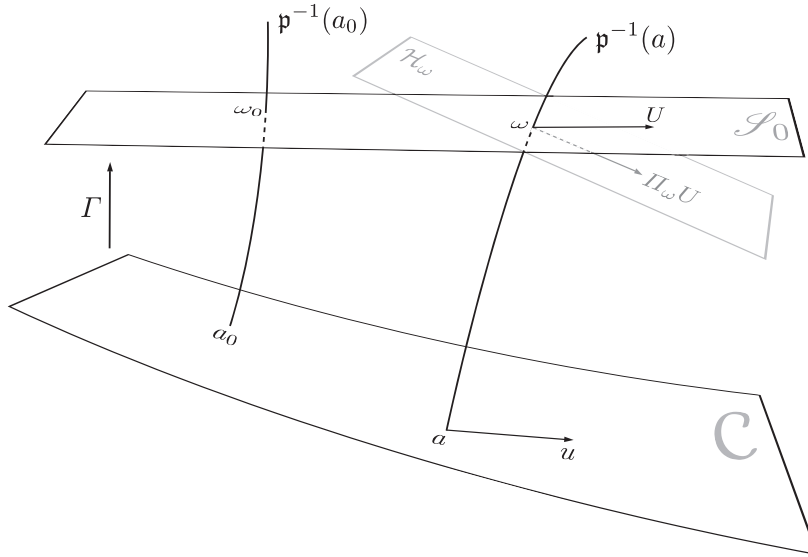


Abbildung 2.7: Hintergrundeichung.

Wegen $\mathfrak{p} \circ \Gamma = \text{id}$ ist $\mathfrak{p}_*U = u$. Damit wird durch \mathfrak{p}^*g in \mathcal{S}_0 ein metrischer Tensor induziert, $(\mathfrak{p}^*g)(U, V) = g(\mathfrak{p}_*U, \mathfrak{p}_*V) = g(u, v)$. Der horizontale Lift von u lässt sich aus U durch die Projektion $\Pi_\omega U$ bestimmen, denn es gilt $\mathfrak{p}_*U = \mathfrak{p}_*(\Pi_\omega U) = u$. Wir erhalten somit einen metrischen

²⁵Schnitte eines Faserbündels dienen als Darstellung der Basis im Totalraum. Durch die Wahl von genügend lokalen Eichbedingungen wie (2.151) wird ein Schnitt (siehe [19]) über einem hinreichend großen Gebiet von \mathcal{C} definiert, der den Orbitraum \mathcal{C} durch die Wahl je eines Repräsentanten der entsprechenden Äquivalenzklasse in \mathcal{C} darstellt. Die Orbits $\mathfrak{p}^{-1}(a)$ der Punkte eines lokalen Schnitts dürfen im Schnittpunkt ω nicht tangential zu \mathcal{S}_0 verlaufen, denn sonst gilt $\Pi_\omega V = 0$ und damit $g = 0$. Das Auftreten dieser Singularitäten der Koordinatensysteme steht in direktem Zusammenhang mit der bereits angesprochenen *gribov ambiguity*, also der Tatsache, dass im Allgemeinen jede durch eine globale Eichbedingung definierte Hyperfläche mehrmals von Orbits geschnitten wird.

Tensor \mathfrak{g} über dem affinen Raum \mathcal{S}_0 mit Verschiebungsraum \mathcal{H}_0 durch

$$\mathfrak{g}(U, V) := (\mathfrak{p}^* \mathfrak{g})(U, V) = \mathfrak{g}(u, v) = g_\omega(\Pi_\omega U, \Pi_\omega V) \equiv (\Pi_\omega U, \Pi_\omega V) = (U, \Pi_\omega V), \quad (2.152)$$

wobei wir $\Pi_\omega^\dagger = \Pi_\omega$ und $\Pi_\omega^2 = \Pi_\omega$ benutzt haben.

Faddeev-Popov-Determinante in Hintergrundeichung. Mit den bisher erarbeiteten Mitteln lässt sich die Faddeev-Popov-Determinante (2.42),

$$\Delta[\mathcal{A}] = \det \left(\frac{\delta f^a(\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(x))}{\delta \theta^b(y)} \right)_{\theta=0}, \quad (2.153)$$

bereits in eine für deren geometrische Interpretation nützliche Form bringen. Es gilt

$$\frac{\delta f^a(\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(x))}{\delta \theta^b(y)} \Big|_{\theta=0} = \int d^n z \frac{\delta f^a(\mathcal{A}(x))}{\delta \mathcal{A}_\mu^c(z)} \frac{\delta (\mathcal{A}^{\mathcal{B}})_\mu^c(z)}{\delta \theta^b(y)} \Big|_{\theta=0}. \quad (2.154)$$

Das Eichpotential $\mathcal{A}^{\mathcal{B}}$ geht durch eine Eichtransformation mit $\mathcal{B} = \exp(\theta) = \mathbf{1} + \theta + \mathcal{O}(\theta^2)$ aus \mathcal{A} hervor, d.h.

$$\mathcal{A}_\mu^{\mathcal{B}} \stackrel{(2.17)}{=} \mathcal{A}_\mu - [\mathcal{A}_\mu, \theta] - \partial_\mu \theta + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.155)$$

mit der Matrix $\theta(x) = \rho'(\vartheta(x))$ und $\vartheta(x) \in \mathcal{G}$. Die kovariante Ableitung von $\vartheta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$ ist nach (2.127) durch $\mathfrak{D}\vartheta = d\vartheta + \rho'_A \vartheta$ gegeben, wobei hier ρ'_A die von Ad abgeleitete Darstellung von \mathcal{G} in sich selbst ist, da ϑ ihre Werte in \mathcal{G} hat, also $\rho'_A = \text{Ad}'_A \equiv \text{ad}_A$. Für die Matrixdarstellung $\theta = \rho' \circ \vartheta$ gilt wegen $\text{ad}_A \vartheta = [A, \vartheta]$ und $\mathcal{A} = \rho' \circ A$

$$\mathfrak{D}\theta = d\theta + [\mathcal{A}, \theta] = (\partial_\mu \theta + [\mathcal{A}_\mu, \theta]) dx^\mu =: \mathfrak{D}_\mu \theta dx^\mu. \quad (2.156)$$

Die Transformation (2.155) lässt sich somit durch $\mathcal{A}_\mu^{\mathcal{B}} = \mathcal{A}_\mu - \mathfrak{D}_\mu \theta + \mathcal{O}(\theta^2)$ darstellen. Mit den Strukturkonstanten c_{bc}^a der Lie-Algebra ($[\mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c] = c_{bc}^a \mathcal{E}_a$) ergibt sich explizit

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\mu \theta(x) &= (\partial_\mu \theta^a(x) + c_{bc}^a \mathcal{A}_\mu^b(x) \theta^c(x)) \mathcal{E}_a = (\delta_c^a \partial_\mu |_x + c_{bc}^a \mathcal{A}_\mu^b(x)) \theta^c(x) \mathcal{E}_a \\ &=: (\mathfrak{D}_\mu |_x)_c^a \theta^c(x) \mathcal{E}_a, \end{aligned} \quad (2.157)$$

d.h. $(\mathcal{A}^{\mathcal{B}})_\mu^c(z) = \mathcal{A}_\mu^c(z) + (\mathfrak{D}_\mu |_z)_d^c \theta^d(z) + \mathcal{O}(\theta^2)$. Wir erhalten damit aus (2.154)

$$\frac{\delta f^a(\mathcal{A}^{\mathcal{B}}(x))}{\delta \theta^b(y)} \Big|_{\theta=0} = - \int d^n z \frac{\delta f^a(\mathcal{A}(x))}{\delta \mathcal{A}_\mu^c(z)} (\mathfrak{D}_\mu |_z)_b^c \delta(z - y). \quad (2.158)$$

Die adjunkte kovariante Ableitung auf der Basis \mathfrak{D}^\dagger ist die Adjunkte von \mathfrak{D} bezüglich des Skalarprodukts im Raum der Funktionen über \mathcal{M} , $(\varphi, \psi)_0 = \int \varphi(x) \psi(x) d^n x$ und des Skalarprodukts der 1-Formen, $(\alpha, \beta)_1 := (\alpha^\mu, \beta_\mu)_0$, d.h.²⁶

$$(\alpha, \mathfrak{D}\varphi)_1 = (\mathfrak{D}^\dagger \alpha, \varphi)_0. \quad (2.159)$$

²⁶Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen von D^\dagger und \mathfrak{D}^\dagger .

Explizit gilt für $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$ und $\alpha = \alpha_\mu dx^\mu$ mit $\alpha_\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
 (\alpha, \mathfrak{D}\varphi)_1 &= (\alpha_a^\mu, \partial_\mu \varphi^a + \mathcal{A}_\mu^b \varphi^c c_{bc}^a)_0 \\
 &= - \int d^n x \partial^\mu \alpha_\mu^a(x) \varphi_a(x) + \int d^n x \mathcal{A}_\mu^b(x) \alpha_a^\mu(x) c_{bc}^a \varphi^c(x) \\
 &\stackrel{(2.143)}{=} - \int d^n x [\partial^\mu \alpha_\mu^a(x) \varphi_a(x) + \mathcal{A}^{\mu b}(x) \alpha_\mu^a(x) c_{ba}^c \varphi_c(x)] \\
 &= -((\delta_a^c \partial^\mu + c_{ba}^c \mathcal{A}^{\mu b}) \alpha_\mu^a, \varphi_c)_0 = ((\mathfrak{D}^{\dagger\mu})_a^c \alpha_\mu^a, \varphi_c)_0. \tag{2.160}
 \end{aligned}$$

Die Hintergrundeichbedingung $D_{\omega_0}^\dagger(\omega - \omega_0) = 0$ ist in Koordinatendarstellung (im Sinne von Seite 32) mit $\mathfrak{D}_0^\dagger := \mathfrak{D}_{\omega_0}^\dagger$:

$$D_{\omega_0}^\dagger(\omega - \omega_0) \xleftrightarrow{\sigma} \{\mathfrak{D}_0^\dagger(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0) =: f(\mathcal{A})\}. \tag{2.161}$$

Wegen $f(\mathcal{A}) = (\mathfrak{D}_0^\dagger(\mathcal{A} - \mathcal{A}_0))^a \mathcal{E}_a = (\mathfrak{D}_0^{\dagger\mu})_b^a (\mathcal{A}_\mu^b - \mathcal{A}_{0\mu}^b) \mathcal{E}_a = f^a(\mathcal{A}) \mathcal{E}_a$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\delta f^a(\mathcal{A}^B(x))}{\delta \theta^b(y)} \right|_{\theta=0} &= - \int d^n z \left[(\mathfrak{D}_0^{\dagger\mu}|_x)_c^a \delta(x-z) \right] \left[(\mathfrak{D}_\mu|_z)_b^c \delta(z-y) \right] \\
 &\stackrel{(2.160)}{=} \int d^n z \left[(\delta_c^a \partial^\mu|_x + c_{bc}^a \mathcal{A}_0^{\mu b}(x)) \delta(x-z) \right] \left[(\mathfrak{D}_\mu|_z)_b^c \delta(z-y) \right] \\
 &= \int d^n z \left[(-\delta_c^a \partial^\mu|_z + c_{bc}^a \mathcal{A}_0^{\mu b}(x)) \delta(x-z) \right] \left[(\mathfrak{D}_\mu|_z)_b^c \delta(z-y) \right] \\
 &\stackrel{p.l.}{=} \int d^n z \delta(x-z) (\mathfrak{D}_0^{\dagger\mu}|_z)_c^a (\mathfrak{D}_\mu|_z)_b^c \delta(z-y) \\
 &= (\delta_x, (\mathfrak{D}_0^\dagger \mathfrak{D})_b^a \delta_y)_0 \tag{2.162}
 \end{aligned}$$

mit $\delta_y(z) = \delta(z-y)$. (2.162) kann als Verallgemeinerung der Matrixdarstellung eines Operators bezüglich einer Basis interpretiert werden. Die Delta-Distributionen sind zwar nicht Teil des entsprechenden Funktionenraums, dienen dennoch als eine Art Basis, nach der Funktionen gemäß $\varphi = \int d^n y \varphi(y) \delta_y$ entwickelt werden können. Die Faddeev-Popov-Determinante für die Hintergrundeichung ist demnach die Determinante

$$\Delta[\mathcal{A}] = \det(\mathfrak{D}_0^\dagger \mathfrak{D}). \tag{2.163}$$

Die Kombination $\mathfrak{D}_0^\dagger \mathfrak{D}$ angewendet auf den Rücktransport $\varphi = \sigma^* \phi$ einer Lie-Algebra-wertigen Funktion $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$ ergibt $\mathfrak{D}_0^\dagger \mathfrak{D}(\sigma^* \phi) = \mathfrak{D}_0^\dagger \sigma^*(D_\omega \phi) = \sigma^*(D_{\omega_0}^\dagger D_\omega \phi)$, d.h.

$$\mathfrak{D}_0^\dagger \mathfrak{D} \circ \sigma^* = \sigma^* \circ D_{\omega_0}^\dagger D_\omega, \tag{2.164}$$

womit die Faddeev-Popov-Determinante $\Delta[\mathcal{A}]$ der Koordinatendarstellung von $\det(D_{\omega_0}^\dagger D_\omega)$ entspricht:

$$\Delta[\omega] := \det(D_{\omega_0}^\dagger D_\omega) \xleftrightarrow{\sigma} \Delta[\mathcal{A}] = \det(\mathfrak{D}_0^\dagger \mathfrak{D}). \tag{2.165}$$

Determinante von g . Unter der Determinante eines metrischen Tensors g versteht man üblicherweise die Determinante einer Matrix mit den Einträgen $g_{ij} := g(E_i, E_j)$ in einer Basis $\{E_i\}$ des entsprechenden Vektorraums V . Ist V ein Innenproduktraum, so kann diese Matrix auch als darstellende Matrix eines Operators $\hat{g} : V \rightarrow V$ auf diesem Vektorraum interpretiert werden, $g_{ij} = (E_i, \hat{g} E_j)$. Die Determinante von g kann somit auch aus dem Produkt der Eigenwerte von \hat{g} berechnet werden.

Für $U, V \in T_\omega \mathcal{S}_0 = \mathcal{H}_0$ ist nach (2.152) $g(U, V) = (U, \Pi_\omega V)$. Der Projektor $\Pi_\omega : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H}_\omega$ ist jedoch kein Operator auf \mathcal{H}_0 . Mit $\Pi_0 := \Pi_{\omega_0}$ lässt sich aber leicht der Operator \hat{g} konstruieren, der den metrischen Tensor in \mathcal{H}_0 repräsentiert. Aus $U = \Pi_0 U, V = \Pi_0 V$ folgt

$$g(U, V) = (\Pi_0 U, \Pi_\omega \Pi_0 V) = (U, \Pi_0 \Pi_\omega \Pi_0 V), \quad (2.166)$$

d.h. $\hat{g} := \Pi_0 \Pi_\omega \Pi_0|_{\mathcal{H}_0} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$. Für die Berechnung von $\det \hat{g}$ führen wir (vgl. [12]) zunächst eine Abbildung $Q : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ ein, definiert durch $Q := \Pi_0 D_\omega \mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger \equiv \Pi_0 \Lambda_\omega$. Deren Adjunkte ist $Q^\dagger = D_\omega \mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger \Pi_0 \equiv \Lambda_\omega \Pi_0$. Wegen $Q Q^\dagger = \Pi_0 \Lambda_\omega \Pi_0 = \Pi_0 (\mathbb{1} - \Pi_\omega) \Pi_0 = \Pi_0 - \Pi_0 \Pi_\omega \Pi_0$ ist

$$\hat{g} = \Pi_0 - Q Q^\dagger. \quad (2.167)$$

Definieren wir einen weiteren Operator $\gamma : U_{\mathcal{P}}^{\text{Ad}}(\mathcal{G}) \rightarrow U_{\mathcal{P}}^{\text{Ad}}(\mathcal{G})$ durch $\gamma := \mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger D_{\omega_0} \mathcal{I}_{\omega_0} D_{\omega_0}^\dagger D_\omega$, so ergibt sich wegen $\det \mathcal{I}_\omega = (\det \square_\omega)^{-1}$

$$\det \gamma = \frac{\det(D_\omega^\dagger D_{\omega_0}) \det(D_{\omega_0}^\dagger D_\omega)}{\det \square_{\omega_0} \det \square_\omega} = \frac{(\det(D_{\omega_0}^\dagger D_\omega))^2}{\det \square_{\omega_0} \det \square_\omega} \quad (2.168)$$

Für die kovariante Ableitung $D_\omega : U_{\mathcal{P}}^{\text{Ad}}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{V}_\omega$ existiert die Umkehrabbildung $D_\omega^{-1} := \mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger$, denn $D_\omega^{-1}(D_\omega \phi) = \mathcal{I}_\omega \square_\omega \phi = \phi$. Hiermit können wir γ in \mathcal{V}_ω darstellen $\hat{\gamma} := D_\omega \gamma D_\omega^{-1} : \mathcal{V}_\omega \rightarrow \mathcal{V}_\omega$. Es ist $\det \hat{\gamma} = \det \gamma$. Mit der Definition von γ und D_ω^{-1} gilt

$$\hat{\gamma} = D_\omega \mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger D_{\omega_0} \mathcal{I}_{\omega_0} D_{\omega_0}^\dagger D_\omega \mathcal{I}_\omega D_\omega^\dagger = \Lambda_\omega \Lambda_0 \Lambda_\omega. \quad (2.169)$$

Nun ist $Q^\dagger Q = \Lambda_\omega \Pi_0 \Lambda_\omega = \Lambda_\omega (\mathbb{1} - \Lambda_0) \Lambda_\omega = \Lambda_\omega - \Lambda_\omega \Lambda_0 \Lambda_\omega$, also

$$\hat{\gamma} = \Lambda_\omega - Q^\dagger Q. \quad (2.170)$$

Der Definitionsbereich von γ kann auf ganz \mathcal{T} erweitert werden, denn es ist $\hat{\gamma}|_{\mathcal{H}_\omega} = 0$. Somit gilt $\det_{\mathcal{V}_\omega} \hat{\gamma} = \det_{\mathcal{T}} \hat{\gamma}$. Analog ist \hat{g} auch auf Elemente aus \mathcal{V}_0 anwendbar, mit $\hat{g}|_{\mathcal{V}_0} = 0$, wodurch sich ergibt $\det_{\mathcal{H}_0} \hat{g} = \det_{\mathcal{T}} \hat{g}$. Angenommen $u \in \mathcal{V}_\omega$ ist ein Eigenvektor von $Q^\dagger Q$ mit Eigenwert λ , d.h. $\hat{\gamma} u = \Lambda_\omega u - Q^\dagger Q u = (1 - \lambda)u$. Bilden wir u durch $Q = \Pi_0 \Lambda_\omega$ in den Raum \mathcal{H}_0 ab, so ergibt sich $Q Q^\dagger Q u = \lambda Q u$, d.h. $Q u$ ist ein Eigenvektor von $Q Q^\dagger$ mit demselben Eigenwert λ . Umgekehrt können wir mit Q^{-1} die Eigenvektoren von $Q Q^\dagger$ zu Eigenvektoren von $Q^\dagger Q$ machen: Aus $Q Q^\dagger v = \alpha v$ folgt $Q^\dagger Q Q^{-1} v = Q^{-1} Q Q^\dagger v = \alpha Q^{-1} v$. Die Abbildung Q bildet somit die Eigenräume von $Q Q^\dagger$ und $Q^\dagger Q$ ineinander ab und damit gleichzeitig die Eigenräume von \hat{g} und $\hat{\gamma}$ (vgl. [12]). Insgesamt erhalten wir das Ergebnis

$$\det g = \det \hat{g} = \det \hat{\gamma} = \det \gamma = \frac{(\det(D_{\omega_0}^\dagger D_\omega))^2}{\det \square_{\omega_0} \det \square_\omega} \stackrel{(2.165)}{=} \frac{(\Delta[\omega])^2}{\det \square_{\omega_0} \det \square_\omega}. \quad (2.171)$$

Geometrische Interpretation der Faddeev-Popov-Determinante. Die Faddeev-Popov-Determinante ist somit proportional zur Determinante des metrischen Tensors in \mathcal{S}_0 . Wegen $g(u, v) = \mathbf{g}(U, V)$ (siehe (2.152)) können wir $\det \mathbf{g}$ durch die Determinante des metrischen Tensors im Orbitraum \mathcal{C} ersetzen und erhalten

$$\Delta[\omega] = (\det g)^{\frac{1}{2}} (\det \square_{\omega_0})^{\frac{1}{2}} (\det \square_{\omega})^{\frac{1}{2}}. \quad (2.172)$$

Das erzeugende Funktional einer reinen Yang-Mills-Theorie, deren Form wir im letzten Abschnitt mit der von Faddeev und Popov entwickelten Methode bestimmt haben, kann als Koordinatendarstellung ($\omega \leftrightarrow \{\mathcal{A}_\mu\}$) von

$$Z[J] = \mathcal{N} \int_{\mathcal{C}} d\omega \delta[f(\omega)] \Delta[\omega] e^{iS[\omega, J]} \quad (2.173)$$

interpretiert werden (mit einem Faktor \mathcal{N} , der für das unendliche Volumen der Gruppe der Eichtransformationen steht). Mit der Faddeev-Popov-Determinante (2.172) und der Eichbedingung (2.151) ergibt sich

$$Z[J] = \mathcal{N} \int_{\mathcal{C}} d\omega \delta[D_{\omega_0}^\dagger(\omega - \omega_0)] (\det \square_{\omega_0})^{\frac{1}{2}} (\det \square_{\omega})^{\frac{1}{2}} (\det g)^{\frac{1}{2}} e^{iS[\omega, J]}. \quad (2.174)$$

Die δ -Distribution schränkt das Integral in \mathcal{C} auf \mathcal{S}_0 ein. Nach [12] kann (2.174) in ein Integral im Orbitraum \mathcal{C} transformiert werden mit lokalen Koordinaten σ und zugehöriger Jakobi-Determinante $\det \square_{\omega_0}$. Der Faktor $\mathcal{N}(\det \square_{\sigma})^{\frac{1}{2}}$ entspricht laut [12] und [20] (Anhang) dem Volumen $\text{vol}(\sigma)$ des Orbits über σ , gemessen in \mathcal{C} . Es bleibt

$$Z[J] = \int_{\mathcal{C}} d\sigma (\det g)^{\frac{1}{2}} \text{vol}(\sigma) e^{iS[\omega, J]}, \quad (2.175)$$

ein Integral im Orbitraum mit dem natürlichen Volumenelement $d\sigma (\det g)^{\frac{1}{2}}$. Das von Faddeev und Popov gefundene erzeugende Funktional für Eichpotentiale ist somit aus geometrischer Sicht ein formales Integral im Raum der physikalisch inäquivalenten Zusammenhangsformen bezüglich des durch den metrischen Tensor g gegebenen natürlichen Integrationsmaßes.

Kapitel 3

Funktionalintegral für bosonische Strings

3.1 Symmetrien der Polyakov-Wirkung

Die Dynamik eines sich im Raum bewegenden (bosonischen) Strings¹ wird in direkter Verallgemeinerung der Bahnkurve eines Punktteilchens klassisch durch die *Weltfläche* beschrieben, die er in der Raumzeit hinterlässt. Auf dieser Weltfläche WS können Koordinaten $\tau \in [-\infty, \infty]$ und $\sigma \in [0, \pi]$ (für geschlossene Strings; für offene ist $\sigma \in [0, \pi]$) eingeführt werden, wobei τ die Zeitentwicklung und σ die räumliche Ausdehnung des Strings parametrisiert. Mit $X^\mu(\sigma, \tau)$, $\mu = 0, \dots, D-1$, bezeichnen wir die Koordinaten der Weltfläche in der D -dimensionalen Raumzeit \mathcal{M} , das sind D Funktionen bzw. Skalarfelder $X^\mu : \Gamma_{\text{WS}} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\sigma, \tau) \mapsto X^\mu(\sigma, \tau)$ auf dem Parameterraum Γ_{WS} der Weltfläche. In Verallgemeinerung der Wirkung der Weltlinie eines relativistischen Punktteilchens ist die Wirkung der Weltfläche eines relativistischen Strings durch deren Flächeninhalt gegeben. Ist \mathcal{M} mit einem metrischen Tensor η ausgestattet (meist die Minkowski-Metrik $\eta = (-1, 1, 1, \dots, 1)$), so wird durch die Abbildungen X^μ ein metrischer Tensor auf der Weltfläche induziert, dessen Komponenten durch $H_{ab} = \partial_a X^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_b X^\nu$ gegeben sind, mit der Notation $\xi^0 := \sigma$, $\xi^1 := \tau$, $\partial_a := \partial/\partial\xi^a$. Diese Metrik definiert das natürliche Volumenelement $w_H = d^2\xi \sqrt{|\det H|}$ im Parameterraum der Weltfläche, womit sich die sog. Nambu-Goto-Wirkung $S_{\text{NG}}[X] = \text{vol}(\text{WS}) = \int d\sigma d\tau \sqrt{|\det H|}$ ergibt.

Der Funktionalintegral-Ansatz zur bosonischen Stringtheorie wurde 1981 durch A. M. Polyakov vorangetrieben, [21]. Er benutzte eine spezielle Form der Wirkung für bosonische Strings, die sog. Polyakov-Wirkung²,

$$S[X, h] = -\frac{1}{2} \int d\sigma d\tau \sqrt{|\det h|} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (3.1)$$

die zusätzlich zu den Feldern X^μ als dynamische Variable einen intrinsischen metrischen Tensor $h : T\Gamma_{\text{WS}} \times T\Gamma_{\text{WS}} \rightarrow \mathbb{R}$ der Weltfläche beinhaltet. Die Polyakov-Wirkung führt auf dieselben klassischen Bewegungsgleichungen der Felder X^μ wie die Nambu-Goto-Wirkung, wenn für

¹Wir beschränken unsere Diskussion auf geschlossene bosonische Strings.

²Wir setzen die Strings Spannung $T = 1$.

h die induzierte Metrik $h = H$ gewählt wird. Das ist die Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen, die aus der Variation von $S[X, h]$ bezüglich den Komponenten h_{ab} hervorgehen, $\delta S[X, h]/\delta h_{ab}|_H = 0$.

Im erzeugenden Funktional Z für bosonische Strings wird somit neben den Skalarfeldern X^μ über Metriken h der Weltflächen integriert. Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten können mithilfe einer topologisch invarianten Größe, dem *Geschlecht* g der Fläche klassifiziert werden. Das Geschlecht gibt für kompakte Flächen die Anzahl der *Henkel* an, bzw. äquivalent dazu (vgl. [22]) die maximale Anzahl von sich nicht schneidenden geschlossenen Kurven, die die Mannigfaltigkeit zusammenhängend belassen, wenn die Fläche entlang der Kurven separiert wird. Zwischen Flächen mit verschiedenem Geschlecht gibt es keine stetigen Abbildungen, d.h. g ist topologisch invariant. Das erzeugende Funktional Z setzt sich somit aus einer Summe von Funktionalintegralen mit jeweils festem Geschlecht zusammen, $Z = \sum_{g=0}^{\infty} Z_g$. In dieser Arbeit werden wir nur den ersten Term Z_0 dieser Zerlegung untersuchen, wobei wir uns hauptsächlich an [22] orientieren. In [22] findet man auch eine Behandlung der Terme höheren Geschlechts.

Entscheidend für die richtige Summation in Z sind die lokalen Symmetrien der Polyakov-Wirkung, da nur über physikalisch inäquivalente Felder summiert werden darf, d.h. nur über die Paare (X, h) , deren Wirkung sich unterscheidet.

Invarianz unter Diffeomorphismen. Die Polyakov-Wirkung ist invariant unter Diffeomorphismen im Parameterraum der Weltfläche, d.h. unter bijektiven differenzierbaren Abbildungen $f : \Gamma_{\text{WS}} \rightarrow \Gamma_{\text{WS}}, \xi \mapsto f(\xi) =: \tilde{\xi}$, deren Umkehrabbildungen ebenfalls differenzierbar sind. Wir betrachten also die Transformationen

$$\begin{aligned} \xi^a &\mapsto \tilde{\xi}^a(\xi), \\ h_{ab}(\xi) &\mapsto \tilde{h}_{ab}(\xi) = \frac{\partial \xi^c}{\partial \tilde{\xi}^a} \frac{\partial \xi^d}{\partial \tilde{\xi}^b} h_{cd}(\xi), & (\text{Tensorfeld vom Typ } (0,2)) \\ X^\mu(\xi) &\mapsto \tilde{X}^\mu(\xi) = X^\mu(\xi). & (D \text{ Skalarfelder}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mit der Jacobi-Matrix $J_b^a := \partial \tilde{\xi}^a / \partial \xi^b$ und der Notation $\tilde{\partial}_a := \partial / \partial \tilde{\xi}^a$ ist $J_b^a \tilde{\partial}_a X^\mu = \partial_b X^\mu$ und die Komponenten der inversen Metrik $h^{-1} : T^* \Gamma_{\text{WS}} \times T^* \Gamma_{\text{WS}} \rightarrow \mathbb{R}$ transformieren gemäß $h^{ab} \mapsto \tilde{h}^{ab} = J_c^a J_d^b h^{cd}$. Insgesamt erhalten wir für die Transformation der Polyakov-Wirkung

$$\begin{aligned} S[X, h] &\mapsto -\frac{1}{2} \int d^2 \tilde{\xi} |\det \tilde{h}|^{\frac{1}{2}} \tilde{h}^{ab} \tilde{\partial}_a \tilde{X}^\mu \tilde{\partial}_b \tilde{X}_\mu \\ &= -\frac{1}{2} \int d^2 \xi |\det J| |\det(J^{-1} h J^{-1})|^{\frac{1}{2}} h^{cd} J_c^a J_d^b \tilde{\partial}_b X^\mu \tilde{\partial}_a X_\mu \\ &= -\frac{1}{2} \int d^2 \xi |\det h|^{\frac{1}{2}} h^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu = S[X, h]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wir sind also in der Wahl der Parametrisierung der Weltfläche nicht eingeschränkt, da alle metrischen Tensoren, die durch eine Reparametrisierung auseinander hervorgehen, physikalisch äquivalent sind. Das erzeugende Funktional muss deshalb – analog zum vorangegangenen Kapitel – so modifiziert werden, dass nur über Flächen summiert wird, deren Metriken nicht durch Diffeomorphismen auseinander hervorgehen.

Weyl-Symmetrie. Die Invarianz unter Reparametrisierungen ist nicht die einzige lokale Symmetrie der Polyakov-Wirkung. Eine sog. *Weyl-Transformation* der Metrik

$$h_{ab}(\xi) \mapsto \bar{h}_{ab}(\xi) = e^{\phi(\xi)} h_{ab}(\xi) \quad (3.4)$$

lässt S ebenfalls unverändert, denn

$$\begin{aligned} S[X, \bar{h}] &= -\frac{1}{2} \int d^2\xi |e^{2\phi} \det h|^{\frac{1}{2}} e^{-\phi} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \\ &= -\frac{1}{2} \int d^2\xi |\det h|^{\frac{1}{2}} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu = S[X, h]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Diese Symmetrien sind keine zufällig auftretenden Koinzidenzen, vielmehr sind sie Ausprägungen der topologischen Eigenschaften der *konformen Struktur* der Weltflächen.

3.2 Konforme Strukturen auf Riemann-Flächen

Angenommen, es gibt ein Atlas³ einer $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M , dessen Karten ϕ_i offene Mengen aus M homeomorph in offene Mengen von \mathbb{C}^n abbilden. Ein *analytischer* oder *holomorpher* Atlas besteht aus Karten, deren Übergangsfunktionen holomorph⁴ sind. Zwei analytische Atlanten A_1, A_2 sind äquivalent, falls $A_1 \cup A_2$ ebenso analytisch ist (d.h. auch die zusätzlichen Überlappungen besitzen holomorphe Übergangsfunktionen). Eine Äquivalenzklasse $[A]$ wird als *komplexe Struktur* und $(M, [A])$ als n -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit bezeichnet. Eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit heißt *Riemann-Fläche*.

Die Zuordnung eines differenzierbaren metrischen Tensors g in jedem Tangentialraum $T_x M$ heißt *geometrische Struktur* einer *Riemannschen Mannigfaltigkeit* M . Eine geometrische Struktur erlaubt die Definition von Winkeln zwischen zwei Vektoren $u, v \in T_x M$ durch

$$\cos \alpha := \frac{g(v, w)}{\sqrt{g(v, v)} \sqrt{g(w, w)}}. \quad (3.7)$$

Zwei Metriken $g^{(1)}, g^{(2)}$ sind *konform äquivalent*, falls eine positive Funktion $\lambda \in C^\infty$ existiert, sodass $g^{(2)} = \lambda g^{(1)}$. Die Winkel (3.7) zwischen zwei Vektoren $v, w \in T_x M$ bezüglich zwei konform äquivalenter Metriken stimmen überein. Eine Äquivalenzklasse $[h]$ von konform äquivalenten Metriken wird als *konforme Struktur* bezeichnet. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit zusammen mit einer konformen Struktur $(M, [g])$ wird manchmal *konforme Mannigfaltigkeit* genannt. In komplexen Koordinaten (mit infinitesimalen Abständen $dz := dx + idy$) ist eine zur

³Für alle Punkte x einer differenzierbaren N -dimensionalen reellen Mannigfaltigkeit M gibt es eine offene Umgebung U_x und eine Abbildung ϕ_x , die U_x homeomorph in eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^N abbildet und somit Koordinaten in U_x definiert. Als Atlas A von M bezeichnet man die Menge aller Tupel (U_i, ϕ_i) offener Teilmengen U_i mit zugehörigen Homeomorphismen $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^N$, wobei die Gesamtheit der U_i die Mannigfaltigkeit überdecken muss, $M = \bigcup U_i$. (M, A) bildet eine *topologische* Mannigfaltigkeit. Für *differenzierbare* Mannigfaltigkeiten müssen zusätzlich alle Übergangsfunktionen zweier Karten unendlich oft differenzierbar sein, d.h. falls $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, so muss $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ aus C^∞ sein. Zwei Atlanten A_1, A_2 einer reellen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M sind *äquivalent*, falls $A_1 \cup A_2$ ebenfalls ein (C^∞) -Atlas von M ist. Eine Äquivalenzklasse $[A]$ heißt *differenzierbare Struktur* und eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

⁴Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist *holomorph*, falls die Ableitung $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (f(z + \Delta z) - f(z)) / \Delta z$ existiert. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{mit } z =: x + iy \text{ und } f(z) =: u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.6)$$

erfüllt werden (vgl. [22]). Der wesentliche Schritt besteht darin, den Grenzübergang einmal mit konstantem Imaginärteil, $\Delta z = \Delta x$, und einmal mit konstantem Realteil, $\Delta z = i\Delta y$, durchzuführen. Wenn der Grenzwert $f'(z)$ existiert, müssen die Ergebnisse jeweils übereinstimmen ($f'(z) = \partial f / \partial x = -i \partial f / \partial y$).

flachen euklidischen Metrik δ konforme Metrik durch $ds^2 = \lambda(z) |dz|^2$ gegeben. Solche Metriken nennt man *konform flach* und die zugehörigen Koordinaten *isotherm*.

Holomorphe invertierbare Abbildungen $f : C \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind winkeltreu bzw. *konform*. Dies sehen wir durch Anwendung der Cauchy-Riemann-Gleichungen in der zugehörigen Jacobi-Matrix,

$$J = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & -\partial v/\partial x \\ \partial v/\partial x & \partial u/\partial x \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Wenn wir nun $\partial u/\partial x =: c \cos \alpha$, $\partial v/\partial x =: c \sin \alpha$ setzen, ergibt sich

$$J = cU = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} U, \quad (3.9)$$

mit einer orthogonalen Matrix U . Die flache Metrik δ in C wird durch f in die Metrik $f_*\delta$ abgebildet, in Koordinaten

$$\delta_{ab} \mapsto h_{ab} = (J^{-1})^c_a (J^{-1})^d_b \delta_{cd} = c(z)(U^T)^c_a \delta_{cd} (U^T)^d_b = c(z)U^c_d \delta_{ac} (U^T)^d_b = c(z)\delta_{ab}. \quad (3.10)$$

Für eine invertierbare Abbildung f ist $\det J \neq 0$, was wegen (3.8) und (3.9) bedeutet: $(\partial u/\partial x)^2 + (\partial v/\partial x)^2 = c(z)^2 \neq 0$. Invertierbare holomorphe Abbildungen f bilden δ somit in konform flache Metriken ab, sind also winkeltreu. Eine holomorphe Funktion f ist bereits konform in z_0 falls $f'(z_0) \neq 0$, denn dann ist ebenfalls $c(z) \neq 0$.

Sei F eine Riemann-Fläche, d.h. eine (reell-)zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur $[A]$. Die homeomorphen Karten $\phi_i : U_i \in F \rightarrow \mathbb{C}$ können benutzt werden, um die flache euklidische Metrik δ zurück auf die Mannigfaltigkeit F zu transportieren. Die komplexe Struktur $[A]$ beinhaltet für jede Umgebung eines Punktes in F mehrere Karten, die durch holomorphe invertierbare Übergangsfunktionen auseinander hervorgehen. Damit stehen verschiedene Metriken in F zur Verfügung, d.h. verschiedene geometrische Strukturen, die aber alle einer konformen Äquivalenzklasse angehören, da holomorphe invertierbare Abbildungen winkeltreu sind. So entsteht aus einer komplexen Struktur $[A]$ eine konforme Struktur.

Sei umgekehrt eine zweidimensionale konforme Mannigfaltigkeit, $(F, [g])$, gegeben, d.h. eine (reell-)zweidimensionale Mannigfaltigkeit F mit konformer Äquivalenzklasse $[g]$. Eine beliebige Metrik auf F kann durch geeignete Wahl von μ und λ immer durch

$$ds^2 = a(x, y) dx^2 + b(x, y) dx dy + c(x, y) dy^2 = \lambda(z) |dz + \mu(z) d\bar{z}|^2 \quad (3.11)$$

in komplexen Koordinaten dargestellt werden. Angenommen ein Diffeomorphismus f erfüllt die sog. *Beltrami-Gleichung* $\partial_{\bar{z}} f = \mu \partial_z f$ (mit $\partial_z = (\partial_x + i\partial_y)/2$ und $\partial_{\bar{z}} = (\partial_x - i\partial_y)/2$), so können wir f benutzen um (3.11) in isothermen Koordinaten $w := f(z)$ darzustellen, denn dann gilt

$$|dw|^2 = |\partial_z w dz + \partial_{\bar{z}} w d\bar{z}|^2 = |\partial_z w|^2 |dz + \mu d\bar{z}|^2. \quad (3.12)$$

Jede Metrik auf F kann also mithilfe einer Lösung der Beltrami-Gleichung in eine konform flache Form gebracht werden. Die konforme zweidimensionale Mannigfaltigkeit F ist in jedem Punkt mit einer Metrik ausgestattet. In zwei benachbarten Teilmengen $U, V \subset F$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ können jeweils isotherme komplexe Koordinaten (U, z) , (V, w) gefunden werden, wobei in der Schnittmenge $U \cap V$ die entsprechenden Metriken übereinstimmen müssen, woraus folgt

$$\sqrt{\lambda_U(z)} |dz| = \sqrt{\lambda_V(w)} |dw|. \quad (3.13)$$

Die Übergangsfunktion Ψ_{UV} bildet in $U \cap V$ die Koordinaten z von U in die Koordinaten w von V ab. Gl. (3.13) impliziert $|\Psi'_{UV}(z)| = |w'(z)| \neq 0$. Ψ_{UV} ist somit holomorph und konform. So entsteht aus einem Atlas isothermer Koordinaten auf F ein holomorpher Atlas, d.h. ein Atlas mit Karten $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ und holomorphen Übergangsfunktionen. Durch eine konforme Struktur wird also gleichzeitig eine komplexe Struktur definiert.

Eine Riemann-Fläche (eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit) kann somit auch als zweidimensionale konforme Mannigfaltigkeit, als differenzierbare Fläche mit Metrik und konformer Struktur, definiert werden.

Es gibt drei wichtige konform inäquivalente Riemann-Flächen: Die komplexe Ebene \mathbb{C} , die offene Einheitskreis $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und die *Riemann-Kugel* $\Sigma := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die eine Kompaktifizierung der komplexen Ebene darstellt (durch stereografische Projektion kann jeder Punkt der Einheitskugel auf die komplexe Ebene abgebildet werden, außer der Nordpol, dem ein Punkt in der Unendlichkeit zugeordnet wird). Der *verallgemeinerte Riemannsche Abbildungssatz* (siehe [22]) besagt, dass alle einfach zusammenhängenden⁵ Riemann-Flächen entweder zu \mathbb{C} , \mathbb{D} oder zu Σ konform äquivalent sind. Da Σ von diesen drei Riemann-Flächen die einzige kompakte Fläche ist, ist jede kompakte einfach zusammenhängende Riemann-Fläche konform äquivalent zur Riemann-Kugel.

Die Menge aller konformen Äquivalenzklassen von kompakten Riemann-Flächen vom Geschlecht g wird als *Modulraum* \mathbb{M}_g bezeichnet. \mathbb{M}_0 besteht also nur aus einem einzigen Element, der Äquivalenzklasse der Riemann-Kugel $\mathbb{M}_0 = \{[\Sigma]\}$. Bezeichnet \mathbb{G}_g die Menge aller Metriken auf kompakten Flächen vom Geschlecht g , so kann der Modulraum \mathbb{M}_g als Teilmenge von \mathbb{G}_g repräsentiert werden, da jede Metrik durch ihre konforme Äquivalenzklasse eine komplexe Struktur definiert. Die Weyl-Transformationen (3.4) verändern nur den konformen Faktor der Metrik, sind also konforme Transformationen und operieren deshalb ausschließlich innerhalb einer konformen Äquivalenzklasse. Zwei Metriken die durch eine Weyl-Transformation ineinander übergehen führen somit zur gleichen komplexen Struktur. Bezeichnen wir mit *Weyl* die Menge aller Weyl-Transformationen, die bezüglich Komposition eine Gruppe bilden, so muss \mathbb{M}_g als Teilmenge der Quotientenmenge $\mathbb{G}_g / \text{Weyl}$ dargestellt werden. Auch Diffeomorphismen mit $w = f(z)$ können eine Metrik konform abbilden, falls (3.11) in $ds^2 = \tilde{\lambda} |dw + \mu d\bar{w}|^2$ transformiert wird. Obwohl nicht alle Diffeomorphismen nur zu konformen Skalierungen der Metrik führen, erhalten diffeomorphe Reparametrisierungen, d.h. Diffeomorphismen einer Fläche in sich selbst, trotzdem die komplexe Struktur, die durch die entsprechende Metrik bestimmt wird. Denn der metrische Tensor einer Mannigfaltigkeit ist nicht koordinatenbehaftet; er ist eine unabhängig von Koordinaten definierte Größe, die die intrinsische Geometrie der Mannigfaltigkeit repräsentiert. Die Gruppe der Diffeomorphismen einer Fläche bezeichnen wir mit *Diff*. Alle anderen Änderungen einer Metrik führen zu konform inäquivalenten Flächen (vgl. [22] und [24]), weshalb sich der Modulraum darstellen lässt durch

$$\mathbb{M}_g \sim \frac{\mathbb{G}_g}{\text{Weyl} \times \text{Diff}}. \quad (3.14)$$

Da die Polyakov-Wirkung dieselben Symmetrien besitzt wie der Modulraum \mathbb{M}_g , unterscheidet sie sich nur für verschiedene konforme Äquivalenzklassen von Riemann-Flächen. Das erzeugende Funktional für bosonische Strings ist somit ein Integral in \mathbb{M}_g . Um das korrekte Integrationsmaß zu definieren, wird – wie im letzten Kapitel – der wesentliche Schritt daraus bestehen, eine Art Eichfixierung durchzuführen, d.h. Metriken aus \mathbb{G}_g auszuwählen, die konform inäquivalent

⁵Alle Kurven auf einer einfach zusammenhängenden Fläche mit denselben Endpunkten können stetig ineinander transformiert werden.

sind und in die jede Metrik mithilfe von Weyl-Transformationen und Reparametrisierungen abgebildet werden kann. Ein formaler Koordinatenwechsel wird eine Funktionaldeterminante mit sich bringen und die Möglichkeit bieten, das (unendliche) Volumen von *Weyl* und *Diff* zu separieren. Bevor wir diese Methode anwenden können, benötigen wir allerdings noch ein wenig mathematisches Rüstzeug.

3.3 Riemann-Zusammenhang und Lie-Ableitung

Linearer Zusammenhang. Die abstrakten Begriffe *Zusammenhang* und *kovariante Ableitung*, die wir im letzten Kapitel für G -Hauptfaserbündel eingeführt haben, sind ursprünglich aus anschaulicheren Problemstellungen entstanden und wurden erst später für den abstrakten Formalismus der Hauptfaserbündel verallgemeinert. Angenommen wir betrachten die Tangentialvektoren $\dot{\gamma}$ einer Kurve γ auf einer Mannigfaltigkeit M und wollen feststellen, wie sich die Tangentialvektoren entlang γ ändern (anschaulich betrachtet wollen wir die Änderung der Geschwindigkeitsvektoren eines Punktes wissen, der sich entlang γ bewegt, d.h. dessen Beschleunigung). Ein Vergleich zweier Vektoren v_x und v_y aus verschiedenen Tangentialräumen T_xM und T_yM ist aber nur dann möglich, wenn es Abbildungen zwischen den einzelnen Tangentialräumen gibt. Die Menge dieser Abbildungen wird unter dem Begriff des *Paralleltransports* auf M zusammengefasst, durch den ein sog. *linearer Zusammenhang* auf M in Form einer *kovarianten Ableitung* definiert wird. Wenn also für eine beliebige Kurve γ in M und zwei Punkte x, y auf γ eine Vorschrift existiert, die Vektoren aus T_xM eindeutig den Vektoren aus T_yM zuordnet, d.h. eine Abbildung

$$\tau_{y,x}^\gamma : T_xM \rightarrow T_yM, v \mapsto \tau_{y,x}^\gamma v, \quad (3.15)$$

so gibt es auf M eine Regel für den Paralleltransport. Insbesondere muss gelten

$$\tau_{x,x}^\gamma = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \tau_{z,y}^\gamma \circ \tau_{z,x}^\gamma = \tau_{z,x}^\gamma. \quad (3.16)$$

Dies ermöglicht uns die Definition der *totalen Ableitung* eines Vektorfelds $V : x \mapsto V_x \in T_xM$ entlang einer Kurve γ , die die Änderung von V angibt, wenn wir uns entlang γ bewegen. Wir wollen also $V(t) := V_{\gamma(t)}$ mit $V(t+\varepsilon)$ vergleichen, was nur mithilfe des Paralleltransports entlang γ von $V(t+\varepsilon)$ zum Punkt $\gamma(t)$ möglich ist,

$$V_\varepsilon^\parallel(t) := \tau_{\gamma(t),\gamma(t+\varepsilon)}^\gamma V(t+\varepsilon). \quad (3.17)$$

Für die totale Ableitung von V entlang γ bei bekanntem Paralleltransport ergibt sich

$$\frac{DV(t)}{Dt} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V_\varepsilon^\parallel(t) - V(t)}{\varepsilon}. \quad (3.18)$$

Die zugehörige kovariante Ableitung ∇_W in Richtung eines Vektorfelds W wird dann definiert durch (vgl. [10])

$$\nabla_{\dot{\gamma}} V := \frac{DV(t)}{Dt}. \quad (3.19)$$

Äquivalent dazu kann das Konzept eines linearen Zusammenhangs auf M auch umgekehrt eingeführt werden. Dabei wird die kovariante Ableitung ∇_W zunächst unabhängig von der totalen Ableitung eingeführt, als Operator mit den Eigenschaften

$$\nabla_{au+bv}w = a\nabla_uw + b\nabla_vw, \quad (3.20)$$

$$\nabla_u(av + bw) = a\nabla_uv + b\nabla_uw, \quad (3.21)$$

$$\nabla_u f = u(f) \equiv u^i \partial_i f, \quad (3.22)$$

$$\nabla_u(s \otimes t) = (\nabla_u s) \otimes t + s \otimes (\nabla_u t), \quad (3.23)$$

$$\nabla_u \circ C = C \circ \nabla_u, \quad (3.24)$$

wobei $C : t \rightarrow Ct := t(\dots, \partial_i, \dots; \dots, dx^i, \dots)$ eine (beliebige) Kontraktion, u, v, w Vektorfelder in M , f eine Funktion in M , s, t beliebige Tensorfelder in M und a, b konstante reelle Zahlen sind. Anschließend definiert (3.19) die totale Ableitung bei bekannter kovarianter Ableitung. Per Konstruktion ist die kovariante Ableitung eines Vektorfelds selbst ein Vektorfeld. Werden die sog. *Zusammenhangs-Koeffizienten* (oder *Christoffel-Symbole*) Γ_{ij}^k durch $\nabla_{\partial_i} \partial_j =: \Gamma_{ij}^k \partial_k$ definiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla_u v &= u^i \nabla_{\partial_i} (v^j \partial_j) = u^i (\partial_i v^j \partial_j + v^j \nabla_{\partial_i} \partial_j) = u^i (\partial_i v^j \partial_j + v^j \Gamma_{ij}^k \partial_k) \\ &= u^i (\partial_i v^j + \Gamma_{ik}^j v^k) \partial_j = (\nabla_u v)^j \partial_j. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Da die Anwendung einer 1-Form α in M auf ein Vektorfeld v einerseits eine Funktion in M darstellt, $\alpha(v) : x \mapsto \alpha_x(v_x)$, und andererseits als Kontraktion $\alpha(v) = C(\alpha \otimes v)$ aufgefasst werden kann, können wir (3.22), (3.23), (3.24) und (3.25) nutzen, um die kovariante Ableitung $\nabla_u \alpha$ von α entlang eines Vektorfelds u zu berechnen:

$$\nabla_u(\alpha(v)) \stackrel{(3.22)}{=} u^i \partial_i (\alpha_j v^j) = u^i \partial_i \alpha_j v^j + u^i \alpha_j \partial_i v^j \quad (3.26)$$

$$\nabla_u(\alpha(v)) \stackrel{(3.24)}{=} (\nabla_u \alpha)(v) + \alpha(\nabla_u v) \stackrel{(3.25)}{=} (\nabla_u \alpha)(v) + \alpha_j u^i (\partial_i v^j + \Gamma_{ik}^j v^k). \quad (3.27)$$

Daraus ergibt sich

$$\nabla_u \alpha = u^i (\partial_i \alpha_j - \Gamma_{ij}^k \alpha_k) dx^j = (\nabla_u \alpha)^j dx^j \quad (3.28)$$

und für einen Tensor beliebigen Rangs $t : v, \dots, w, \alpha, \dots, \beta \mapsto t(v, \dots, w; \alpha, \dots, \beta) \in \mathbb{R}$ mit Komponenten $t_{k\dots l}^{i\dots j} := t(\partial_k, \dots, \partial_l; dx^i, \dots, dx^j)$

$$(\nabla_u t)_{k\dots l}^{i\dots j} = u^m (\partial_m t_{k\dots l}^{i\dots j} + \Gamma_{mn}^i t_{k\dots l}^{n\dots j} + \dots + \Gamma_{mn}^j t_{k\dots l}^{i\dots n} - \Gamma_{mk}^n t_{n\dots l}^{i\dots j} - \dots - \Gamma_{ml}^n t_{k\dots n}^{i\dots j}). \quad (3.29)$$

Ein linearer Zusammenhang heißt *torsionsfrei*, wenn die zugehörige kovariante Ableitung die Gleichung $\nabla_u v - \nabla_v u = [u, v]$ erfüllt. Die Christoffel-Symbole torsionsfreier Zusammenhänge sind symmetrisch in den unteren Indizes: $0 = [\partial_i, \partial_j] = \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k - \Gamma_{ji}^k \partial_k$.

RLC-Zusammenhang. Es gibt viele Möglichkeiten die Zusammenhangs-Koeffizienten Γ_{ij}^k , d.h. die kovariante Ableitung auf einer Mannigfaltigkeit zu definieren und damit einen linearen Zusammenhang festzulegen. Ist M mit einer Metrik g ausgestattet, so gibt es einen mit dieser *Metrik kompatiblen Zusammenhang*, der mit der zusätzlichen Forderung nach Torsionsfreiheit eindeutig definiert ist (siehe [10]) und als *Riemann-Zusammenhang*, *Levi-Civita-Zusammenhang* oder wie in [10] als *RLC-Zusammenhang* bezeichnet wird. *Kompatibel* bedeutet, dass die von

x nach y entlang eines beliebigen Pfades paralleltransportierte Metrik mit der Metrik in y übereinstimmt. Für zwei Vektorfelder U, V , die entlang γ konstant sind, $DV(t)/Dt \equiv \nabla_{\dot{\gamma}}V = 0 = \nabla_{\dot{\gamma}}U$ definiert die Metrik g eine Funktion auf γ durch $f(\gamma(t)) := g(V(t), U(t))$. Für den RLC-Zusammenhang muss dann gelten: $0 = \dot{f} = \dot{\gamma}(f) = \nabla_{\dot{\gamma}}f$, d.h.

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}}(g(V, U)) = (\nabla_{\dot{\gamma}}g)(U, V) + g(\nabla_{\dot{\gamma}}U, V) + g(U, \nabla_{\dot{\gamma}}V) = (\nabla_{\dot{\gamma}}g)(U, V). \quad (3.30)$$

Ein mit der Metrik kompatibler Zusammenhang wird somit durch $\nabla_{\dot{\gamma}}g = 0$ definiert (mit beliebiger Kurve γ). In Koordinatendarstellung ergeben sich für den RLC-Zusammenhang die Bedingungen

$$\partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^n g_{nj} - \Gamma_{kj}^n g_{in} \stackrel{(3.29)}{=} 0, \quad (3.31)$$

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0. \quad (3.32)$$

Benutzen wir diese Gleichungen, um folgenden Ausdruck zu berechnen,

$$\begin{aligned} \partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} &= \Gamma_{ki}^n g_{nj} + \Gamma_{kj}^n g_{in} + \Gamma_{ji}^n g_{nk} + \Gamma_{jk}^n g_{in} \\ &= 2\Gamma_{jk}^n g_{in} + \Gamma_{ik}^n g_{jn} + \Gamma_{ij}^n g_{nk} \\ &= 2\Gamma_{jk}^n g_{in} + \partial_i g_{jk}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

so ergibt sich schließlich für die Christoffel-Symbole des RLC-Zusammenhangs

$$\Gamma_{jk}^m = \frac{1}{2} g^{mi} (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}). \quad (3.34)$$

Lie-Ableitung. Neben dem Paralleltransport gibt es eine weitere nützliche Methode um Tensoren auf einer Mannigfaltigkeit zu transportieren. Dazu benutzt man den sog. *lokalen Fluss* Φ_t , der von einem Vektorfeld v erzeugt wird (vgl. [10], [22]). Für $v = \dot{\gamma}$ ist Φ_t ein Diffeomorphismus von M in sich selbst, der alle Punkte aus M eine Parameterlänge t entlang der Integralkurven γ des Vektorfelds v verschiebt:

$$\Phi_t : M \rightarrow M, p = \gamma(t_0) \mapsto \gamma(t_0 + t). \quad (3.35)$$

Ein beliebiges Tensorfeld in M kann nun durch den sog. *Lie-Transport* Φ_t^* entlang den Integrallinien von v transportiert werden, d.h. ein Tensorfeld A wird durch $\Phi_t^* A$ vom Punkt $\phi_t(x) \equiv \gamma(t_0 + t)$ eine Parameterlänge t zurück in den Punkt $x \equiv \gamma(t_0)$ transportiert. Die Änderungsrate eines Tensorfelds A während eines Lie-Transports entlang des von v erzeugten Flusses ist durch die sog. *Lie-Ableitung* \mathcal{L}_v gegeben,

$$\mathcal{L}_v A := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi_{\varepsilon}^* A - A}{\varepsilon} \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi_t^* A. \quad (3.36)$$

Die Lie-Ableitung erfüllt die folgenden Gleichungen (vgl. [10]):

$$\mathcal{L}_v(A + \lambda B) = \mathcal{L}_v A + \lambda \mathcal{L}_v B, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{L}_v(A \otimes B) = (\mathcal{L}_v A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{L}_v B), \quad (3.38)$$

$$\mathcal{L}_v \circ C = C \circ \mathcal{L}_v, \quad (3.39)$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$, C eine beliebige Kontraktion ist und A, B Vektorfelder in M sind. Für eine Funktion ψ in M ergibt sich

$$(\mathcal{L}_v \psi)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\Phi_t^* \psi)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \psi(\Phi_t(x)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \psi(\gamma(t)) = v(\psi) = v^i(x) \partial_i \psi(x). \quad (3.40)$$

Für eine 1-Form $\alpha = \alpha_i dx^i$ in M erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v \alpha &= \mathcal{L}_v(\alpha_i dx^i) = (\mathcal{L}_v \alpha_i) dx^i + \alpha_i \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \Phi_t^* dx^i = v(\alpha_i) dx^i + \alpha_i \left. \frac{d}{dt} \right|_0 d(\Phi_t^* x^i) \\ &= v^j \partial_j \alpha_i dx^i + \alpha_i d(\mathcal{L}_v x^i) = v^j \partial_j \alpha_i dx^i + \alpha_i d(v(x^i)) = v^j \partial_j \alpha_i dx^i + \alpha_i dv^i \\ &= (v^j \partial_j \alpha_i + \partial_i v^j \alpha_j) dx^i. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Wegen $\alpha(u) = C(\alpha \otimes u)$ können wir (3.39), (3.40) und (3.41) verwenden, um die Lie-Ableitung eines Vektorfelds u zu berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(\alpha(u)) &\stackrel{(3.40)}{=} v^j \partial_j (\alpha_i u^i) = v^j \partial_j \alpha_i u^i + v^j \alpha_i \partial_j u^i \\ &\stackrel{(3.39)}{=} (\mathcal{L}_v \alpha)(u) + \alpha(\mathcal{L}_v u) \stackrel{(3.41)}{=} (v^j \partial_j \alpha_i + \partial_i v^j \alpha_j) u^i + \alpha(\mathcal{L}_v u), \end{aligned} \quad (3.42)$$

was ergibt

$$\alpha(\mathcal{L}_v u) = v^j \alpha_i \partial_j u^i - \partial_i v^j \alpha_j u^i = \alpha_i (v^j \partial_j u^i - u^j \partial_j v^i) \equiv \alpha_i [v, u]^i \equiv \alpha([v, u]), \quad (3.43)$$

d.h. die Lie-Ableitung eines Vektorfelds u entlang eines Vektorfelds v entspricht dem Kommutator der beiden Felder, $\mathcal{L}_v u = [v, u]$. Wir haben die Lie-Ableitung an dieser Stelle eingeführt, da wir uns im nächsten Abschnitt für die Änderung eines Metriktensors h unter einem infinitesimalen Diffeomorphismus

$$\Phi_\varepsilon^* h = h + \varepsilon \mathcal{L}_v h + \mathcal{O}(\varepsilon^2) =: h + \delta h \quad (3.44)$$

interessieren, wobei das Vektorfeld v den entsprechenden Diffeomorphismus durch den Fluss Φ_t erzeugt. Die Lie-Ableitung eines Tensorfelds⁶ vom Typ (0,2) lässt sich wegen $h(u, w) \equiv CC(h \otimes u \otimes w)$ aus (3.39), (3.41) und (3.43) berechnen:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_v h)(u, w) &= \mathcal{L}_v(h(u, w)) - h(\mathcal{L}_v u, w) - h(u, \mathcal{L}_v w) \\ &= v^i \partial_i (h_{jk} u^j w^k) - h([v, u], w) - h(u, [v, w]) \\ &= v^i \partial_i h_{jk} u^j w^k + h_{jk} u^i \partial_i v^j w^k + h_{jk} u^j w^i \partial_i v^k \\ &= (v^i \partial_i h_{jk} + h_{ik} \partial_j v^i + h_{ji} \partial_k v^i) u^j w^k. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Das ergibt für die Komponenten

$$(\mathcal{L}_v h)_{ij} = v^k \partial_k h_{ij} + \partial_i v^k h_{kj} + \partial_j v^k h_{ik}. \quad (3.46)$$

⁶Genauso kann die Lie-Ableitung eines beliebigen Tensorfelds A berechnet werden zu

$$(\mathcal{L}_v A)_{k \dots l}^{i \dots j} = v^m \partial_m A_{k \dots l}^{i \dots j} + \partial_k v^m A_{m \dots l}^{i \dots j} + \dots - \partial_m v^j A_{k \dots l}^{i \dots m}.$$

Diesen Ausdruck können wir auch mit der kovarianten Ableitung des RLC-Zusammenhangs darstellen. Dazu berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
 (\nabla_i v)_j &= (\nabla_i v)^l h_{lj} \stackrel{(3.25)}{=} h_{lj} \partial_i v^l + h_{lj} \Gamma_{ik}^l v^k \\
 &= \partial_i v_j - v^l \partial_i h_{lj} + \frac{1}{2} h_{lj} h^{ln} (\partial_k h_{ni} + \partial_i h_{nk} - \partial_n h_{ik}) v^k \\
 &= \partial_i v_j - \frac{1}{2} v^l \partial_i h_{lj} - \frac{1}{2} v^l \partial_j h_{il} + \frac{1}{2} v^l \partial_l h_{ij}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

und

$$\begin{aligned}
 (\nabla_i v)_j + (\nabla_j v)_i &= \partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{1}{2} v^l \partial_i h_{lj} - \frac{1}{2} v^l \partial_j h_{il} + \frac{1}{2} v^l \partial_l h_{ij} \\
 &\quad - \frac{1}{2} v^l \partial_j h_{li} - \frac{1}{2} v^l \partial_i h_{jl} + \frac{1}{2} v^l \partial_l h_{ji} \\
 &= \partial_i v_j + \partial_j v_i - v^l \partial_i h_{lj} - v^l \partial_j h_{il} + v^l \partial_l h_{ij} \\
 &= \partial_i (v^l h_{lj}) - v^l \partial_i h_{lj} + \partial_j (v^l h_{li}) - v^l \partial_j h_{li} + v^l \partial_l h_{ij} \\
 &= \partial_i v^l h_{lj} + \partial_j v^l h_{li} + v^l \partial_l h_{ij}.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Ein Vergleich mit (3.46) zeigt, dass die Lie-Ableitung eines Metrikensors h mit der kovarianten Ableitung des mit h kompatiblen Zusammenhangs dargestellt werden kann durch

$$(\mathcal{L}_v h)_{ij} = (\nabla_i v)_j + (\nabla_j v)_i. \tag{3.49}$$

3.4 Faddeev-Popov-Methode für Z_0

Orthogonale Zerlegung von $T_h \mathbb{G}_0$. Eine infinitesimale Änderung $\delta h =: \varepsilon \zeta$ eines Metrikensors aus \mathbb{G}_g wird durch einen Vektor $\zeta \in T_h \mathbb{G}_g$ erzeugt. Wegen (3.14) gibt es Vektoren ζ^M in $T_h \mathbb{G}_g$, die eindeutig Elementen von $T_{[h]} \mathbb{M}_g$ zugeordnet werden können. Diese Elemente erzeugen Änderungen der Metrik, die nicht von Weyl-Transformationen und Diffeomorphismen erzeugt werden. Um diese Vektoren zu finden hat A. M. Polyakov eine geeignete Metrik G in \mathbb{G}_g eingeführt, in der die ζ^M senkrecht zu den Vektoren sind, die Weyl-Transformationen (ζ^W) und Diffeomorphismen (ζ^D) erzeugen. Für $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)} \in T_h \mathbb{G}_g$ ist G gegeben durch

$$\langle \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)} \rangle := G(\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}) := \int d^2 \xi \sqrt{|\det h|} h^{ac} h^{bd} \zeta_{ab}^{(1)} \zeta_{cd}^{(2)}. \tag{3.50}$$

Eine infinitesimale Weyl-Transformation ist gegeben durch $h \mapsto \exp(\varepsilon \phi) h = h + \varepsilon \phi h + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Mit (3.44) und (3.52) erhalten wir für die Tangentialvektoren, die in $T_h \mathbb{G}_g$ die Elemente aus *Weyl* und *Diff* repräsentieren

$$\zeta_{ab}^W = \phi h_{ab}, \tag{3.51}$$

$$\zeta_{ab}^D = (\mathcal{L}_v h)_{ab} \equiv (\nabla_a v)_b + (\nabla_b v)_a. \tag{3.52}$$

Eine einfache Rechnung

$$\begin{aligned}
 \langle \zeta^W, \zeta^D \rangle &= \int d^2 \xi \sqrt{|\det h|} h^{ac} h^{bd} \phi h_{ab} (\mathcal{L}_v h)_{cd} = \int d^2 \xi \sqrt{|\det h|} \delta_b^c \phi h^{bd} (\mathcal{L}_v h)_{cd} \\
 &= \int d^2 \xi \sqrt{|\det h|} \phi h^{cd} ((\nabla_c v)_d + (\nabla_d v)_c) = 2 \int d^2 \xi \sqrt{|\det h|} \phi (\nabla_c v)^c \neq 0
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

zeigt, dass ζ^W und ζ^D nicht orthogonal zueinander sind. Es wird sich als nützlich herausstellen, die kombinierten Effekte von Weyl-Transformationen und Diffeomorphismen orthogonal zu zerlegen. Entfernen wir die Spur von (3.52), indem wir durch $(Pv)_{ab} := (\nabla_a v)_b + (\nabla_b v)_a - h_{ab}(\nabla_c v)^c$ eine Abbildung P definieren, die Vektoren in spurfreie Tensoren vom Rang (0,2) abbildet, d.h. ordnen wir $\zeta_{ab}^W + \zeta_{ab}^D$ um in $\psi h_{ab} + (Pv)_{ab}$ mit $\psi := \phi + (\nabla_c v)^c$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \psi h, Pv \rangle &= \langle \zeta^W + (\nabla_c v)^c h, \zeta^D - (\nabla_c v)^c h \rangle \\ &= \langle \zeta^W, \zeta^D \rangle + \langle (\nabla_c v)^c h, \zeta^D \rangle - \langle \zeta^W, (\nabla_c v)^c h \rangle - \langle (\nabla_c v)^c h, (\nabla_d v)^d h \rangle \\ &= \int d^2\xi \sqrt{|\det h|} \left[2\phi(\nabla_c v)^c + (\nabla_c v)^c (\zeta^D)_a^a - 2\phi(\nabla_c v)^c - (\nabla_c v)^c (\nabla_d v)^d \delta_a^a \right] \\ &= \int d^2\xi \sqrt{|\det h|} \left[(\nabla_c v)^c 2(\nabla_a v)^a - 2(\nabla_c v)^c (\nabla_d v)^d \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Die Elemente ψh und Pv bilden somit eine orthogonale Zerlegung im Unterraum von $T_h \mathbb{G}_g$, der durch ζ^D und ζ^W aufgespannt wird. Mit ζ^\perp bezeichnen wir die zu ζ^D und ζ^W orthogonale Komponente, d.h. $\text{span}(\zeta^D, \zeta^W, \zeta^\perp) = \text{span}(Pv, \psi h, \zeta^\perp) = T_h \mathbb{G}_g$. Ist durch $\langle v, w \rangle_h := \int d^2\xi \sqrt{|\det h|} h_{ab} v^a w^b$ das Skalarprodukt für Vektorfelder v, w auf einer Weltfläche mit Metrik h definiert und bezeichnet P^\dagger die Adjunkte von P bezüglich den beiden eingeführten Skalarprodukten, so gilt für eine beliebiges Vektorfeld v

$$0 = \langle \zeta^\perp, Pv \rangle = \langle P^\dagger \zeta^\perp, v \rangle_h, \quad (3.55)$$

d.h. $\zeta^\perp \in \text{Ker } P^\dagger$. P^\dagger lässt sich aus der expliziten Form von Pv und der Skalarprodukte mithilfe von partieller Integration berechnen (vgl. [22]), mit dem Ergebnis

$$(P^\dagger \zeta^\perp)_a = -2\nabla^b \zeta_{ab}^\perp. \quad (3.56)$$

Koordinatentransformation in der Quantenwirkung. Wie bereits erwähnt, beschränken wir uns im Folgenden auf Weltflächen vom Geschlecht $g = 0$, d.h. wir wollen einen Ausdruck für die Quantenwirkung

$$Z_0 = \mathcal{N} \int_{g=0} \mathcal{D}X \mathcal{D}h e^{iS[X, h]} \quad (3.57)$$

finden, mit der Polyakov-Wirkung $S[X, h] = -\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{|\det h|} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$. Durch eine *Wick-Rotation* auf der Weltfläche und in der D -dimensionalen Minkowski-Raumzeit \mathcal{M} erhalten wir jeweils euklidische Koordinaten, $X^0 \mapsto X^D := iX^0$, $\tau \equiv \xi^0 \mapsto \xi^2 := i\xi^0$. Die Polyakov-Wirkung ändert sich somit gemäß $S \mapsto iS$, sodass das Argument der Exponentialfunktion in Z_0 reell wird. Die drei unabhängigen Komponenten h_{11}, h_{12} und h_{22} einer Metrik h aus \mathbb{G}_0 können wir als Koordinaten von h wählen, $h \leftrightarrow (h_{11}, h_{12}, h_{22})$. Für das Integrationsmaß in \mathbb{G}_0 gilt

$$\mathcal{D}h \sim \sqrt{\det G} \mathcal{D}h_{11} \mathcal{D}h_{12} \mathcal{D}h_{22}, \quad \text{mit } \mathcal{D}h_{ab} = \prod_{\xi} dh_{ab}(\xi). \quad (3.58)$$

Eine infinitesimale Änderung von h hat die Koordinaten $\delta h \leftrightarrow (\delta h_{11}, \delta h_{12}, \delta h_{22})$. δh kann auch mit den drei Vektoren

$$\zeta_{(1)} := \delta h_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_{(2)} := \frac{\delta h_{12}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta_{(3)} := \delta h_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

durch $\delta h = \zeta_{(1)} + \zeta_{(2)} + \zeta_{(3)}$ beschrieben werden. Diese Elemente spannen den Tangentialraum $T_h \mathbb{G}_0$ auf und sind paarweise orthogonal bezüglich G . Beispielsweise ist⁷

$$\langle \zeta_{(1)}, \zeta_{(2)} \rangle = \int d^2 \xi \sqrt{|h|} (\zeta_{(1)})_d^c (\zeta_{(2)})_c^d = 0. \quad (3.60)$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \|\delta h\|^2 &= \langle \delta h, \delta h \rangle = \|\zeta_{(1)}\|^2 + \|\zeta_{(2)}\|^2 + \|\zeta_{(3)}\|^2 \\ &= \int d^2 \xi \sqrt{|h|} \left[(\delta h_{11})^2 \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(\delta h_{12})^2}{2} \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\delta h_{22})^2 \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \int d^2 \xi \sqrt{|h|} \left((\delta h_{11})^2 + (\delta h_{12})^2 + (\delta h_{22})^2 \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Wenn wir die Notation $\|\delta h\|^2 =: G_{\xi\chi}^{\alpha\beta} \delta h_\alpha^\xi \delta h_\beta^\chi$ einführen, mit $\alpha, \beta \in \{11, 12, 22\}$ und der Integration über doppelt auftretende kontinuierliche Indizes ξ, χ mit Gewichtungsfaktor $(|\det h|)^{1/2}$, so folgt aus (3.61) unmittelbar $\det G = \det(G_{\xi\chi}^{\alpha\beta}) = 1$ und für das Integrationsmaß (3.58) in \mathbb{G}_0 gilt

$$Dh \sim \mathcal{D}h_{11} \mathcal{D}h_{12} \mathcal{D}h_{22}. \quad (3.62)$$

Der nächste Schritt besteht darin, eine Eichfixierung zu wählen, d.h. für jeden Punkt $h \in \mathbb{G}_0$ eine Form \hat{h} der Metrik vorzugeben, in die h durch Weyl-Transformationen und Reparametrisierungen gebracht werden kann. Von der Diskussion um Gl. (3.12) wissen wir, dass immer eine konform flache Form der Metrik gefunden werden kann. Wir wählen deshalb $\hat{h} = e^\phi \delta$, d.h.

$$\hat{h}_{ab} d\xi^a d\xi^b = e^{\phi(\xi)} [(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2] = e^{\phi(z)} |dz|^2, \quad (3.63)$$

mit $z := \xi^1 + i\xi^2$. Weyl-Transformationen ändern den konformen Faktor von \hat{h} , weshalb ζ^W im Tangentialraum $T_h \mathbb{G}_0$ tangential zur Eichfixierung liegt.

Wie wir in Abschnitt (3.2) bemerkt haben, besteht der Modulraum \mathbb{M}_0 nur aus einem einzelnen Punkt, aus der konformen Äquivalenzklasse der Riemann-Kugel Σ . Alle Metriken aus \mathbb{G}_0 sind somit konform äquivalent, d.h. der Tangentialraum $T_h \mathbb{G}_0$ wird vollständig durch ζ^D und ζ^W aufgespannt,

$$\text{span}(\zeta^D, \zeta^W) \equiv \text{span}(Pv, \psi h) = T_h \mathbb{G}_0. \quad (3.64)$$

Für kompakte Riemann-Flächen vom Geschlecht 0 gilt somit $\text{Ker} P^\dagger = 0$. Jeder Punkt in \mathbb{G}_0 ist durch die Kombination einer Weyl-Transformation und eines Diffeomorphismus erreichbar. Wir wollen deshalb einen Koordinatenwechsel von $(\delta h_{11}, \delta h_{12}, \delta h_{22})$ zu den Parametern von Weyl-Transformationen und Diffeomorphismen durchführen. Für $\delta h = \zeta^D + \zeta^W = Pv + \psi h$ gilt

$$\begin{aligned} \|\delta h\|^2 &= \|\psi h\|^2 + \|Pv\|^2 = \|\psi h\|^2 + \langle Pv, Pv \rangle = \|\psi h\|^2 + \langle P^\dagger Pv, v \rangle_h \\ &= \int d^2 \xi \sqrt{|\det h|} h_{ab} (h^{ab} \psi^2 + v^a (P^\dagger Pv)^b). \end{aligned} \quad (3.65)$$

⁷Mit $|h| := |\det h|$.

Wie bereits früher herausgestellt wurde, können Diffeomorphismen auch zu konformen Umskalierungen führen. Um eine doppelte Besetzung von konformen Transformationen zu verhindern, müssen die Koordinaten v^a bezüglich reinen Weyl-Transformationen bereinigt werden. Da die Vektoren Pv und ψh senkrecht zueinander stehen, sind die Vektorfelder \bar{v} , die konforme Transformationen bewirken, Elemente des Kerns von P . Die korrekte Koordinatentransformation führt also zu Parametern (ϕ, v^1, v^2) , wobei $Pv' \neq 0$. Angenommen in Gleichung (3.65) würden bereits die korrekten Koordinaten benutzt werden, so könnten wir die Metrik in den Koordinaten (ψ, v^1, v^2) ablesen, wenn wir schreiben

$$\|\delta h\|^2 = H_{\xi\chi}^{\alpha\beta} \delta \tilde{h}_\alpha^\xi \delta \tilde{h}_\beta^\chi, \quad \text{mit } \delta \tilde{h}_\alpha^\xi \in \{\psi(\xi), v^1(\xi), v^2(\xi)\}. \quad (3.66)$$

Das Volumenelement in diesen Koordinaten wäre dann proportional zu $(\det P^\dagger P)^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}v$. Dieser Ausdruck wird in den korrekten Koordinaten zu

$$\mathcal{D}h \sim (\det' P^\dagger P)^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}v', \quad (3.67)$$

wobei die Determinante $\det' P^\dagger P$ die Abbildung $P^\dagger P$ als beschränkt auf die Elemente v' mit $Pv' \neq 0$ behandelt, d.h. die Nullmoden werden von der Determinante entfernt. Zum selben Ergebnis kommen wir (vgl. [23]), wenn wir die Jacobi-Determinante der Transformation $\delta h = (\psi', Pv') \mapsto (\phi, v')$ mit $\psi' = \phi + (\nabla_c v')^c$ berechnen:

$$\det \left[\frac{\partial(\psi, Pv')}{\partial(\phi, v')} \right] = \det' \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 0 & P \end{pmatrix} = \det' P = (\det' P^\dagger P)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.68)$$

Für (3.57) erhalten wir

$$Z_0 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}\phi \mathcal{D}v' (\det' P^\dagger P)^{1/2} e^{-S[h, X]}. \quad (3.69)$$

Separation des Volumens von Diffeomorphismen. Im nächsten Schritt wollen wir das Volumen $\text{vol}(Diff) = \int \mathcal{D}v$ in Z_0 separieren, denn S ist invariant unter allen Reparametrisierungen. Dazu müssen wir $\int \mathcal{D}v' = \text{vol}(Diff')$ durch $\text{vol}(Diff)$ ausdrücken. Sei $\{\varphi_i | i = 1, \dots, k\}$ eine Basis von $\text{Ker}(P)$, dann lässt sich jedes Element $\bar{v} \in \text{Ker}(P)$ durch eine Linearkombination ausdrücken

$$\bar{v}^a(\xi) \partial_a \equiv \bar{v} = \alpha^i \varphi_i \equiv \alpha^i \varphi_i^a(\xi) \partial_a, \quad (3.70)$$

mit Koeffizienten α^i , die als Koordinaten von \bar{v} in $\text{Ker}(P)$ benutzt werden können. Für $\mathcal{D}v$ wählen wir (vgl. Gl. (1.34)) eine Gaußsche Normierung, $\int \mathcal{D}v e^{-\|v\|^2/2} = 1$. Wegen $\langle Pv', Pv' \rangle \neq 0$ ist $\langle v', P^\dagger Pv' \rangle_h \neq 0$, d.h. $P^\dagger P$ bildet v' in einen Vektor ab, der nicht senkrecht zu v' steht. Außerdem ist $\langle P^\dagger Pv', P^\dagger Pv' \rangle_h \neq 0$, also $\langle PP^\dagger Pv', Pv' \rangle \neq 0$, d.h. der Vektor $w' := P^\dagger Pv'$ ist kein Element des Kerns von P , da $PP^\dagger Pv' \neq 0$. Da $\langle \bar{v}, P^\dagger Pv' \rangle_h = \langle P\bar{v}, Pv' \rangle = 0$, gilt für alle Vektoren $\bar{v} \in \text{Ker}(P)$: $\bar{v} \perp v'$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}v e^{-\|v\|^2/2} = \int \mathcal{D}\bar{v} \mathcal{D}v' \exp \left[-\frac{1}{2} (\|\bar{v}\|^2 + \|v'\|^2) \right] \\ &\sim \int d^k \alpha \exp \left[-\frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j \int d^2 \xi \sqrt{|h|} h_{ab} \psi_i^a(\xi) \psi_j^b(\xi) \right] \int \mathcal{D}v' e^{-\|v'\|^2/2}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Integrale der Form $\int e^{-\mathbf{x}^T A \mathbf{x}/2} d^n x$ mit einer diagonalisierbaren $n \times n$ -Matrix A können vereinfacht dargestellt werden. Hierfür stellen wir \mathbf{x} und A in einer Basis dar, in der A Diagonalgestalt annimmt:

$$\begin{aligned} \int e^{-\mathbf{x}^T A \mathbf{x}/2} d^n x &= \int e^{-\mathbf{x}^T U^T U A U^T U \mathbf{x}/2} d^n x = \int e^{-x_i A_{ii} x_i} d^n x \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\int e^{-A_{ii} (x_i)^2/2} dx_i \right] = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\det A)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

In (3.71) nimmt die Matrix Λ_h mit den Einträgen $(\Lambda_h)_{ij} := \langle \psi_i, \psi_j \rangle_h$ die Rolle von A ein, womit sich ergibt

$$\int \frac{d^k \alpha}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j \int d^2 \xi \sqrt{|h|} h_{ab} \psi_i^a(\xi) \psi_j^b(\xi) \right] = (\det \Lambda_h)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.73)$$

Die Gaußsche Normierung $\int \mathcal{D}\bar{v} e^{-\|\bar{v}\|^2/2} = 1$ verlangt somit $\mathcal{D}\bar{v} \sim (\det \Lambda_h)^{\frac{1}{2}} d^k \alpha$, das bedeutet $\text{vol}(\overline{Diff}) \sim (\det \Lambda_h)^{\frac{1}{2}}$. Daraus folgt

$$\text{vol}(Diff') \sim \frac{\text{vol}(Diff)}{(\det \Lambda_h)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.74)$$

Nun kann in der Quantenwirkung (3.69) das Volumen aller Diffeomorphismen separiert und in der Normierung absorbiert werden, $\mathcal{N} \text{vol}(Diff) \rightarrow \mathcal{N}$,

$$Z_0 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}X \mathcal{D}\phi \left(\frac{\det 'P^\dagger P}{\det \Lambda_{\hat{h}}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-S[X, \hat{h}]}. \quad (3.75)$$

Integration über die Einbettungen X . Für $\mathcal{D}X$ wählen wir erneut eine Gaußsche Normierung, d.h. $1 = \int \mathcal{D}X e^{-\|X\|^2/2}$ mit

$$\|X\|^2 = \langle X^\mu, X_\mu \rangle_h := \int d^2 \xi \sqrt{|h|} X^\mu(\xi) X_\mu(\xi) \quad (3.76)$$

und $\mathcal{D}X \sim \prod_{\mu=1}^D \mathcal{D}X^\mu \sim \prod_{\mu, \xi} dX^\mu(\xi)$. Konstante Skalarfelder $X_0^\mu = \text{const}$, d.h. Nullmoden von ∂_a , müssen separat behandelt werden. Es ist $\|X_0\|^2 = X_0^\mu X_{0\mu} (\int d^2 \xi \sqrt{|h|})$ und deshalb

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}X_0 e^{-\|X_0\|^2/2} &= \int \mathcal{D}X_0 \prod_{\mu} e^{-(X_0^\mu)^2 \int d^2 \xi \sqrt{|h|}/2} \\ &\sim \prod_{\mu} \left[\int dX_0^\mu e^{-(X_0^\mu)^2 \int d^2 \xi \sqrt{|h|}/2} \right] = \left(\frac{2\pi}{\int d^2 \xi \sqrt{|h|}} \right)^{D/2}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Die gewählte Normierung führt zu

$$\mathcal{D}X_0 = \left(\frac{\int d^2 \xi \sqrt{|h|}}{2\pi} \right)^{D/2} dX_0^1 \cdots dX_0^D. \quad (3.78)$$

Sind Y^μ alle nicht-konstanten Skalarfelder auf der Weltfläche, so gilt

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}X e^{-S[h,X]} &= \int \mathcal{D}X_0 \mathcal{D}Y \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{|h|} h^{ab} \partial_a Y^\mu \partial_b Y_\mu\right) \\
 &= \int \mathcal{D}X_0 \mathcal{D}Y \exp\left(\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{|h|} \frac{1}{\sqrt{|h|}} Y^\mu \partial_a (\sqrt{|h|} h^{ab} \partial_b Y_\mu)\right) \\
 &= \mathcal{V} \left(\frac{\int d^2\xi \sqrt{|h|}}{2\pi}\right)^{D/2} \int \mathcal{D}Y \exp\left(\frac{1}{2} \int d^2\xi \sqrt{|h|} Y^\mu \Delta_h Y_\mu\right) \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

mit dem Raumzeit-Volumen $\mathcal{V} := \int d^D X_0$ und dem sog. *Laplace-Beltrami-Operator*

$$\Delta_h := \frac{1}{\sqrt{|h|}} \partial_a (\sqrt{|h|} h^{ab} \partial_b). \quad (3.80)$$

Das Funktionalintegral in (3.79) ist eine unendlich-dimensionale Verallgemeinerung des Gaußintegrals (3.72). Mit $\mathcal{D}Y = \prod_{\mu\xi} (dY^\mu(\xi)/\sqrt{2\pi})$ ergibt sich

$$\int \mathcal{D}X e^{-S[h,X]} = \mathcal{V} \left(\frac{\int d^2\xi \sqrt{|h|}}{2\pi}\right)^{D/2} (\det' \Delta_h)^{-D/2}. \quad (3.81)$$

Dabei bezeichnet $\det' \Delta_h$ die Determinante bzgl. den Feldern Y , d.h. ohne Nullmoden X_0 . Absorbieren wir alle konstanten Faktoren in \mathcal{N} , so erhalten wir für (3.75)

$$Z_0 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \left(\frac{\det' P^\dagger P}{\det \Lambda_{\hat{h}}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\det' \Delta_{\hat{h}}}{\int d^2\xi \sqrt{|\hat{h}|}}\right)^{-D/2}. \quad (3.82)$$

3.5 Konforme Anomalie

Da \mathbb{M}_0 nur ein einzelnes Element enthält, die konforme Äquivalenzklasse der Riemann-Kugel, besteht die Summe über konforme Äquivalenzklassen in Z_0 nur aus einem einzelnen Term. Wenn durch die Faddeev-Popov-Methode die (unendlichen) Volumina der Symmetrie-Gruppen *Diff* und *Weyl* separiert und in der Normierung absorbiert werden, ist es möglich am Ende der Rechnung $Z_0 = 1$ zu setzen. Die verbleibenden Faktoren in (3.82) sind jedoch nicht Weyl-invariant, sodass das Integral über den konformen Faktor ϕ nicht separiert werden kann. Diese ϕ -Abhängigkeit wird als *konforme Anomalie* bezeichnet. In [22] werden die Funktionaldeterminanten aus (3.82) explizit berechnet. Das Ergebnis liefert eine Bedingung, unter der die konforme Anomalie nicht auftritt. Eine genaue Ausführung dieser technisch aufwändigen Rechnungen ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, weshalb wir auf [22] verweisen und die Ergebnisse direkt angeben:

$$\ln \left(\frac{\det' \Delta_{\hat{h}}}{\int d^2\xi \sqrt{|\hat{h}|}}\right) = \ln \left(\frac{\det' \Delta_{\hat{h}_0}}{\int d^2\xi \sqrt{|\hat{h}_0|}}\right) - \frac{1}{24\pi} \int d^2\xi \left(\frac{1}{2}(\partial_a \phi)^2 + \mu^2(e^\phi - 1)\right) \quad (3.83)$$

$$\ln \left(\frac{\det' P^\dagger P}{\det \Lambda_{\hat{h}}}\right) = \ln \left(\frac{\det' P_0^\dagger P_0}{\det \Lambda_{\hat{h}_0}}\right) - \frac{26}{24\pi} \int d^2\xi \left(\frac{1}{2}(\partial_a \phi)^2 + \mu^2(e^\phi - 1)\right) \quad (3.84)$$

mit $\hat{h}_0 = \hat{h}_{\phi=0} \equiv \delta$, $P_0 := P|_{\hat{h}_0}$ und einer Konstanten μ^2 . (3.83) und (3.84) in (3.82) eingesetzt und konstante Faktoren in \mathcal{N} absorbiert ergibt

$$Z_0 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{26-D}{48\pi} \int d^2\xi \left(\frac{1}{2} (\partial_a \phi)^2 + \mu^2 (e^\phi - 1) \right) \right]. \quad (3.85)$$

Die konforme Anomalie verschwindet also in $D = 26$ Raumzeit-Dimensionen, da in diesem Fall auch das Volumen $\int \mathcal{D}\phi =: \text{vol}(Weyl)$ separiert und absorbiert werden kann, sodass schließlich $Z_0 = 1$ gesetzt werden kann.

Wir haben hier nur die Quantenwirkung für Riemann-Flächen vom Geschlecht 0 untersucht. Die Weyl-Symmetrie und Reparametrisierungsinvarianz der Polyakov-Wirkung bewirken, dass sich diese nur für verschiedene konforme Äquivalenzklassen unterscheidet und deshalb in der Quantenwirkung über \mathbb{M}_g , also über konforme Äquivalenzklassen, summiert wird. Da alle Riemann-Flächen vom Geschlecht 0 konform äquivalent sind, erfordert eine konsistente Quantisierung $Z_0 = 1$, was jedoch nur in 26 Dimensionen möglich ist. Die Symmetrien der Polyakov-Wirkung bleiben beim Übergang von der klassischen zur Quantentheorie also nur in 26 Dimensionen erhalten.

In [23] wird ausgehend von Gl. (3.69) ein grundlegend verschiedener Weg gewählt. Analog zu den Faddeev-Popov-Geistern in Yang-Mills-Theorien wird $\det' P^\dagger P$ durch ein Funktionalintegral über Geistfelder dargestellt. Die zugehörige Wirkung, die nun neben den Raumzeit-Einbettungen und der Metrik der Weltflächen auch von den Geistern abhängt, führt einerseits zu einem Energie-Impuls-Tensor der Geistfelder und andererseits zu deren Bewegungsgleichungen. Die kanonische Quantisierung des Geister-Systems und die Zerlegung der Geistfelder in Fourier-Komponenten führt – wie in der kanonischen Quantisierung der Weltflächeneinbettungen X – zu sog. Virasoro-Operatoren L_m , deren Kommutatorrelationen $[L_m, L_n]$ aufgrund eines zusätzlichen Terms, $A(m)$, keine geschlossene Algebra bilden, $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n}$. Wird das gesamte System aus Einbettungen und Geistern betrachtet, so hebt sich der kombinierte Effekt beider Algebra-Anomalien gerade in $D = 26$ Raumzeit-Dimensionen auf.

Diese sehr unterschiedlichen Wege, die zur selben Bedingung für die Raumzeit-Dimension bosonischer Strings führen, werden durch einen Weiteren ergänzt. Wie ebenfalls in [23] dargelegt wird, führt die Forderung nach Lorentz-Invarianz im Rahmen der kanonischen Quantisierung der Einbettungen X zur exakt selben Dimension $D = 26$. Dadurch wird eindrucksvoll die Äquivalenz der beiden Methoden der Quantisierung verdeutlicht, genauer die Äquivalenz zwischen der Einführung von kanonischen Vertauschungsrelationen der dynamischen Variablen innerhalb der *kanonischen Quantisierung* und der Methode der Pfad- bzw. Funktionalintegration, mit der wir uns in der vorliegenden Arbeit durch die Anwendung auf Eichpotentiale und bosonische Strings beschäftigt haben.

Literaturverzeichnis

- [1] R. P. Feynman: *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. 20 367-387 (1948)
- [2] H. Kleinert: *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets (4th edition)*, World Scientific (2006)
- [3] E. Zeidler: *Quantum Field Theory I – Basics in Mathematics and Physics*, Springer (2006)
- [4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder: *Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books Publishing (1995)
- [5] M. Kaku: *Quantum Field Theory – A Modern Introduction*, Oxford University Press (1993)
- [6] M. Chaichian: *Path Integrals in Physics, Volume II: Quantum Field Theory, Statistical Physics and other Modern Applications*, Institute of Physics Publishing (2001)
- [7] C. N. Yang, R. L. Mills: *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. 96 191-195 (1954)
- [8] L. D. Faddeev, V. N. Popov: *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, Phys. Lett. 25B 29-30 (1967)
- [9] U. Mosel *Introduction to Path Integrals in Field Theory*, manuscript based on lectures given at the University of Giessen (2002)
- [10] M. Fecko: *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*, Cambridge University Press (2006)
- [11] M. Daniel, C. M. Viallet: *The geometrical setting of gauge theories of the Yang-Mills type*, Rev. Mod. Phys. 52 175-197 (1980)
- [12] O. Babelon, C.M. Viallet: *The geometrical interpretation of the Faddeev-Popov determinant*, Phys. Lett. 85B 246-248 (1979)
- [13] O. Babelon, C. M. Viallet: *The Riemannian geometry of the configuration space of gauge theories*, Commun. Math. Phys. 81 515-525 (1981)
- [14] G. Rudolph, M. Schmidt, I. P. Volobuev: *On the gauge orbit space stratification: a review*, J. Phys. A: Math. Gen. 35 R1-R50 (2002)
- [15] A. Trautmann: *Fibre bundles associated with space-time*, Rep. Math. Phys. 1 29-62 (1970)
- [16] G. Gaeta: *Reducible Connections in Gauge Theories*, Lett. Math. Phys. 45 121-129 (1998)
- [17] P. K. Mitter, C. M. Viallet: *On the Bundle of Connections and the Gauge Orbit Manifold in Yang-Mills Theory*, Commun. Math. Phys. 79 457-472 (1981)
- [18] J. Rogulski: *Operators with H^k Coefficients and Generalized Hodge-De Rahm Decompositions*, Demonstratio Mathematica XVIII 1 77-89 (1985)
- [19] M. Daniel, C. M. Viallet: *The gauge fixing problem around classical solutions of the Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. 76B 458 (1978)
- [20] A. S. Schwarz: *Instantons and Fermions in the Field of Instanton*, Commun. math. Phys. 64 233-268 (1979)

- [21] A. M. Polyakov: *Quantum Geometry of Bosonic Strings*, Phys. Lett. 103B 207-20 (1981)
- [22] B. Hatfield: *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Frontiers in Physics Vol. 75, Westview Press (1992)
- [23] D. Lüst, S. Theisen: *Lectures on String Theory*, Lecture Notes in Physics 346, Springer-Verlag (1989)
- [24] C. Nash: *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic press (1991)

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, die Bachelorarbeit selbständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen verfasst zu haben.

Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

München, den 7.10.2009

Sebastian Gottwald