TIII: Elektrodynamik

LMU München, Sommersemester 2008 Vorlesungsskriptum von Sebastian Gottwald

> Vorlesung: Prof. Dr. Gerhard Buchalla Skriptum (inoffiziell): Sebastian Gottwald

Letzte Aktualisierung: 28. Januar 2009

Hinweis

In diesem Semester wird kein offizielles Vorlesungsskriptum für die Vorlesung in theoretischer Physik (T3: Elektrodynamik) angeboten. Das vorliegende Dokument ist lediglich als unabhängige Mitschrift anzusehen und entzieht sich deshalb jedem Anspruch auf Vollständigkeit – insbesondere der korrekten Wiedergabe der Vorlesung. Ich nehme mir außerdem die Freiheit, diese Mitschrift um nicht behandelte Inhalte zu ergänzen.

Für Korrektur- und Verbesserungsvorschläge bin ich sehr dankbar: gottwald_AT_gmx.org.

Inhaltsverzeichnis

Ι	Di	e Maxwell-Gleichungen	1
1	Gru	undgleichungen von Elektrizität und Magnetismus vor Maxwell	2
	1.1	Wirkung auf Probeladungen	2
	1.2	Gleichungen zur Bestimmung der Felder	2
2	Die	Maxwellgleichungen im Vakuum	4
3	Die	elektrodynamischen Potentiale	6
4	Ene	rgie- und Impulserhaltung	8
	4.1	Energie und Energiedichte der Materie	8
	4.2	Das Poynting-Theorem: Lokale Energieerhaltung	8
	4.3	Lokale Impulserhaltung	10
5	Die	Maxwellgleichungen in Materie	12
	5.1	Ladungen und Ströme	12
	5.2	Maxwellgleichungen in Materie	13
	5.3	Einfachste Modelle	14
	5.4	Randbedingungen an Grenzflächen	16
II	\mathbf{E}	lektrostatik	19
6	Allę	gemeine Formulierung	20
	6.1	Elektrostatisches Feld	20
	6.2	Elektrostatisches Potential	21
	6.3	Leiter in der Elektrostatik	23
7	Felo	lenergie	24
	7.1	Diskrete Punktladungen	24

	7.2	Kontinuierliche Ladungsverteilung	24
8	Mul	tipolentwicklung	26
	8.1	Allgemeine Entwicklung des Potentials	27
	8.2	Spezialfälle	27
	8.3	Elektrisches Feld und Wechselwirkung von Dipolen	29
9	Ran	dwertprobleme	30
	9.1	Randbedingungen und Eindeutigikeit	30
	9.2	Eigenschaften der Lösungen der Laplace-Gleichung	31
	9.3	Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	32
	9.4	Formale Lösung der Poisson-Gleichung	35
	9.5	Spiegelladungen	36
II	IN	Agnetostatik	38
10	Allg	emeine Formulierung	39
	10.1	Magnetostatisches Feld	39
	10.2	Magnetostatisches Vektorpotential	40
11	Ran	dwertprobleme	42
12	Mul	tipolentwicklung	43
	12.1	Vektorpotential und Magnetfeld eines Dipols	43
	12.2	Spezielle Konfigurationen	45
	12.3	Idealer Punktdipol	46
IV	/ Ι	Die kovariante Formulierung der Elektrodynamik	49
13	Das	Relativitätsprinzip	50
	13.1	Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen	50
	13.2	Abstände	51
	13.3	Eigenzeit	52
	13.4	Die Lorentz-Transformation	54
	13.5	Eigenlänge	55
	13.6	Transformation von Geschwindigkeiten	55
14	Vie	rervektoren und Tensoren	57

14.1 Vierervektoren	 57
14.2 Tensoren höheren Ranges	 59
14.3 Differentiation und Integration	 61
15 Relativistische Mechanik	64
15.1 Lagrange funktion eines relativistischen Teilchens $\ \ldots \ $	 64
15.2 Energie und Impuls	 65
16 Relativität und Elektrodynamik	67
16.1 Bewegungsgleichung einer Ladung im Feld	 67
16.2 Ladungserhaltung und Eichinvarianz	 71
16.3 Die Maxwell-Gleichungen	 72
16.4 Lorentz-Transformation der Feldstärken	 74
16.5 Invarianten	 76
V Elektromagnetische Wellen	77
17 Ebene Wellen	78
17.1 Die Wellengleichung	 78
17.2 Monochromatische ebene Wellen	 79
17.3 Energiedichte und Intensität	 79
17.4 Polarisation	 80
17.5 Allgemeine ebene Welle	 81
18 Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen	82
18.1 Reflexion und Brechung	 82
18.2 Die Fresnelschen Formeln	 83
18.3 Anwendungen der Fresnelschen Formeln	 84
18.4 Totalreflexion	 85
19 Elektromagnetische Wellen in leitenden Medien	87
19.1 Ladungsverteilung in leitenden Medien	 87
19.2 Wellengleichung und Dispersionsrelation	 88
20 Dispersion	90
20.1 Klassisches Oszillatormodell	 90
20.2 Niederfrequenzlimes	 92
20.3 Hochfrequenzlimes	 93

4

21 Wellenpakete in dispersiven Medien	94
21.1 Eindimensionales Wellenpaket	. 94
22 Wellenleiter	97
VI Strahlung	100
23 Allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen	101
23.1 Allgemeine Lösung der homogenen Gleichungen	. 101
23.2 Die retardierten Potentiale	. 102
24 Liénard-Wiechert-Potentiale	105
25 Strahlung einer beschleunigten Punktladung	108
25.1 Strahlungsfeld	. 108
25.2 Strahlungsverlust	. 110
26 Dipolstrahlung	113
26.1 Potentiale der Dipolstrahlung	. 113
26.2 Felder der Dipolstrahlung	. 115
26.3 Energiestrom und Leistung	. 115
27 Streuung von Licht	118
VII Anhang	120
A Mehrdimensionale Analysis	121
A.1 Felder, Tensoren und Drehungen	. 121
A.2 Mehrdimensionale Differentiation	. 124
A.3 Kurvenintegrale	. 132
A.4 Oberflächenintegrale	. 136
A.5 Integralsätze \ldots	. 138
A.6 Kontinuitätsgleichung	. 144
A.7 Krummlinige Koordinaten	. 145

Teil I

Die Maxwell-Gleichungen

Kraft auf

Grundgleichungen von Elektrizität und Magnetismus vor Maxwell

Wirkung auf Probeladungen 1.1

Befindet sich eine Punktladung q in einem elektrischen Feld E und Magnetfeld B, so erfährt sie die Kraft Punktladung

$$\boldsymbol{F} = q \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} \right) \tag{1.1}$$

1.2Gleichungen zur Bestimmung der Felder

1.2.1Gaußsches Gesetz

Das Gaußsche Gesetz besagt: Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes, bzw. in Gaußsches Gesetz differentieller Form:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi \varrho \tag{1.2}$$

oder in integraler Form: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\sigma} = 4\pi Q$ (mit dem Gaußschen Satz aus der differentiellen Form ableitbar).

Beispiel 1.1 (Punktladung)

Mithilfe dem Gaußschen Gesetz kann man z.B. das elektrische Feld einer Punktladung berechnen:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = E(r) \ 4\pi r^2 \equiv \int 4\pi \varrho \ dV = 4\pi Q \qquad \Rightarrow \ \mathbf{E}(r) = \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

1.2.2 Ampèresches Gesetz

Ampèresches Gesetz Nach Ampère erzeugen elektrische Ströme magnetische Wirbelfelder:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \tag{1.3}$$

bzw. in integraler Form: $\int \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} \equiv \frac{4\pi}{c} \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} =: \frac{4\pi}{c} J$. Dabei ist \boldsymbol{j} die in Gl. (A.43) definierte Stromdichte.

1.2.3 Das Magnetfeld ist quellenfrei

 $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$

Das magnetische Feld besitzt keine Quellen, d.h. es gibt keine magnetischen Ladungen (bzw. Monopole):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.4}$$

1.2.4 Induktionsgesetz

Induktionsgesetz

etz Von Michael Faraday wurde das sog. Induktionsgesetz entdeckt, welches besagt, dass zeitlich veränderliche Magnetfelder elektrische Wirbel erzeugen:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.5}$$

Die bekanntere Form ist die Integraldarstellung $(\frac{1}{c}\int \partial_t \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial\sigma} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l})$:

3

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{1.6}$$

mit dem magnetischen Fluss $\Phi := \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$.

Die Maxwellgleichungen im Vakuum

James Clerk Maxwell fasste zwischen 1861 und 1864 die im vorigen Abschnitt vorgestellten Gesetze zu einer einheitlichen Theorie zusammen und ergänzte sie um den *Maxwellschen Verschiebungsstrom*, welcher die Konsistenz mit der Kontinuitätsgleichung gewährleistet.

Maxwellsche Gleichungen

$\operatorname{div} \boldsymbol{E}$	=	$4\pi\varrho$		(2.1)
$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} - rac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{E}$	=	$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$		(2.2)
$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{B}$	=	0		(2.3)
$\operatorname{div} \boldsymbol{B}$	=	0		(2.4)

Bemerkung 2.1 (Grund für die Einführung des Verschiebungsstroms) Bildet man die Divergenz des Ampèreschen Gesetzes, erhält man die Gleichung

Verschiebungsstrom

Maxwellscher

 $0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \propto \operatorname{div} \boldsymbol{j}$

Die Maxwellschen Gleichungen

Damit gäbe es keine Quelle des elektrischen Stromes, beziehungsweise laut Kontinuitätsgleichung $-\partial_t \varrho = \operatorname{div} \boldsymbol{j}$ wäre keine zeitlich veränderliche Ladungsträgerdichte möglich. Maxwell modifizierte das Ampèresche Gesetz deshalb um einen Zusatzterm:

$$\frac{4\pi}{c}j = \operatorname{rot} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{K}$$

Somit ist $-\partial_t \varrho = \operatorname{div} \boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} \boldsymbol{K}$. Mit dem Gaußschen Satz $4\pi \varrho = \operatorname{div} \boldsymbol{E}$ ergibt sich dann

$$K \equiv -rac{1}{c}\partial_t E$$

Bemerkungen 2.2

- (i) Die Gleichungen (2.1) (2.2) bilden ein gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung (für E und B). Die ersten beiden Gleichungen sind inhomogen, die letzten beiden homogen.
- Superpositionsprinzip
- (ii) Da die Maxwellgleichungen linear in E, B, ρ und j sind, gilt das Superpositionsprinzip: Falls E_n und B_n Lösungen zu ϱ_n und j_n sind (n = 1, 2), so sind $E_1 + E_2$ und $B_1 + B_2$ Lösungen $zu \ \varrho_1 + \varrho_2 \ und \ j_1 + j_2.$
- (iii) Die Maxwell-Gleichungen sind konsistent mit der speziellen Relativitätstheorie.
- (iv) Der Maxwellsche Verschiebungsstrom in den Maxwellgleichungen führt zur Vorhersage von elektromagnetischen Wellen mit der Geschwindigkeit c. Insbesondere kann damit Licht als elektromagnetische Welle verstanden werden.
- (v) Die Maxwellgleichungen bilden eine vereinheitlichte Theorie für Elektrizität, Magnetismus und Optik.

Invarianz unter

- Raumspiegelungen
- (vi) Die Ladungsträgerdichte ρ ist eine Skalarfeld (kein Pseudoskalarfeld). Mit Gl. (2.1) folgt dann, dass E ein Vektorfeld ist und aus (2.3), dass B ein Pseudovektorfeld darstellt. Aus (2.2) wird ersichtlich, dass j ein Vektorfeld ist. Damit ist die Elektrodynamik invariant unter Raumspiegelungen.

(vii) Statischer Fall:

Elektro- und Magnetostatik

Für $\partial_t E = \partial_t B = 0$ entkoppeln die Maxwellgleichungen in die Gleichungen der Elektrostatik $(\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi \rho, \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0)$ und der Magnetostatik $(\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 4\pi j/c).$

Die elektrodynamischen Potentiale

Laut der Maxwellgleichung (2.4) ist **B** quellenfrei. Es existiert also ein Vektorfeld **A** – ein sog. Vektorpotential – mit rot $A(x) \equiv B(x)$. Setzen wir diesen Ausdruck für B in Gl. (2.3) ein, so erhalten wir rot $(E + \frac{1}{c}\partial_t A) = 0$. Ein rotationsfreies Feld ist das Gradientenfeld eines Skalarfelds. Damit können wir die Potentialfunktionen der Elektrodynamik definieren:

Definition 3.1 (Die Potentiale der Elektrodynamik).

Seien A ein Vektorfeld, φ ein Skalarfeld und E, B Lösungen der Maxwellgleichungen. Obige Elektrodynamische Überlegungen zeigen, dass die Felder E und B durch die Gleichungen

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{A} \tag{3.2}$$

beschrieben werden können, sobald φ und A bekannt sind.

Bemerkung 3.1 (Eichtransformation)

Eichinvarianz der Felder

Def.:

Potentiale

Die oben definierten Potentiale sind nicht eindeutig festgelegt. Die Felder A', ϕ' , welche über die Eichtransformation¹

$$A' = A + \nabla \chi \tag{3.3}$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \chi \tag{3.4}$$

definiert sind, beschreiben durch die Gleichungen (3.1) und (3.2) dieselben Felder E und B wie Aund φ . Die Funktion χ dient als frei wählbarer Parameter.

Da durch diese Eichtransformation der Potentiale die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik unverändert bleiben, ist sie eine Eichtheorie.

 $^{^{1}}$ Als Eichtransformation bezeichnet man eine Transformation, in der eine frei wählbare Funktion als Parameter auftritt.

Satz 3.1 (Wellengleichungen für die elektrodynamischen Potentiale)

Wellengleichungen Die folgenden beiden Wellengleichungen für \mathbf{A} und φ sind äquivalent zu den Maxwellgleider Potentiale chungen:



mit dem d'Alembert-Operator $\Box := \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \bigtriangleup$.

Beweis: Zunächst setzen wir $B = \operatorname{rot} A$ für das magnetische Feld und den Ausdruck für das Elektrische Feld aus Gl. (3.2) in die zweite Maxwellgleichung ein:

$$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} = \underbrace{\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right)}_{=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\triangle\boldsymbol{A}} + \frac{1}{c}\operatorname{grad}\partial_{t}\varphi + \frac{1}{c^{2}}\partial_{t}^{2}\boldsymbol{A} = \Box\boldsymbol{A} + \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\partial_{t}\varphi\right)$$

Gleichung (3.6) ist erfüllt, wenn der Ausdruck $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \varphi$ verschwindet. Dies können wir durch eine Eichung der elektrodynamischen Potentiale erreichen, da diese der oben vorgestellten Eichfreiheit unterliegen²:

$$0 \stackrel{!}{=} \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \partial_t \varphi' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \triangle \chi + \frac{1}{c} \partial_t \varphi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \chi = -\Box \chi + \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \varphi \right)$$

Die Parameterfunktion χ kann als Lösung dieser (inhomogenen) Wellengleichung gewählt werden, womit die gewünschte Wellengleichung für **A** erfüllt wird.

Für Gl. (3.5) setzen wir zunächst $E = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \partial_t A$ in die erste Maxwellgleichung ein:

$$4\pi \varrho = \operatorname{div} \boldsymbol{E} = -\bigtriangleup \varphi - \frac{1}{c} \partial_t (\nabla \cdot \boldsymbol{A})$$

Wenn φ entsprechend der Lorenz-Eichung gewählt wird, ist $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \partial_t \varphi$ und damit

$$\Box \varphi = 4\pi \varrho \qquad \Box$$

Bemerkung 3.2 (Rest-Eichfreiheit)

Erfüllen die Potentiale A und φ die Lorenz-Eichbedingung $\nabla \cdot A + \frac{1}{c}\partial_t \varphi = 0$, so sind diese aber noch nicht eindeutig festgelegt, denn es gibt A', φ' mit $\Box \chi = 0$, welche die Bedingung ebenfalls erfüllen.

²Diese spezielle Eichung zur Entwicklung der Wellengleichungen für die Potentiale wird als *Lorenz-Eichung* bezeichnet (nach Ludvig Lorenz benannt, nicht Hendrik Antoon Lorentz).

Energie- und Impulserhaltung

4.1 Energie und Energiedichte der Materie

Vorweg wollen wir einen nützlichen Ausdruck für die zeitliche Änderung der relativistischen Energie $\mathcal{E}_M := \gamma mc^2$ eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld gewinnen. Es ist

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\gamma m v\right) = \dots = \frac{m \dot{\boldsymbol{v}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} = \dots = \frac{m \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \cdot \boldsymbol{v}$$

Zeitliche Änderung der Energie eines Teilchens im Feld

Setzen wir nun für
$$\dot{p}$$
 nach dem zweiten Newtonschen Gesetz den Ausdruck (1.1) für die Lorentzkraft ein, so ergibt sich

$$\frac{d\mathcal{E}_M}{dt} = q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} \tag{4.1}$$

Energiedichte der Materie Gibt es eine kontinuierliche Ladungsverteilung ϱ in einem Volumen V, so ist es sinnvoll die *Energiedichte* $\mathcal{W}_M := \mathcal{E}_M/V$ der Materieteilchen einzuführen. Damit können wir eine Beziehung zur Stromdichte j herstellen:

$$\partial_t \mathcal{W}_M = \partial_t \mathcal{E}_M / V \stackrel{(4.1)}{=} \varrho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}$$

$$\tag{4.2}$$

4.2 Das Poynting-Theorem: Lokale Energieerhaltung

Multipliziert man die zweite Maxwellgleichung mit -E, die dritte mit B und fasst sie in einer Gleichung zusammen, so ergibt sich

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{E}\cdot\partial_{t}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{B}\cdot\partial_{t}\boldsymbol{B} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2c}\partial_{t}(\boldsymbol{E}^{2} + \boldsymbol{B}^{2}) = -\frac{4\pi}{c}\partial_{t}\mathcal{W}_{M} - \operatorname{div}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right)$$
(4.3)

Man bezeichnet den Vektor

Definition 4.1 (Poynting-Vektor).

Def.: Poynting-Vektor

$$\boldsymbol{S} := \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{4.4}$$

als Poynting-Vektor.

Wir integrieren Gl. (4.3) über dem ganzen Raum \mathbb{R}^3 und wenden gleichzeitig den Satz von Gauß für die Divergenz des Poynting-Vektors an. Damit erhalten wir

$$\partial_t \int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV = -\partial_t \int \mathcal{W}_M \, dV - \oint S \cdot d\sigma$$

Da die elektromagnetischen Felder E und B im Unendlichen verschwinden, verschwindet das Flussintegral des Poynting-Vektors:

$$\frac{d}{dt}\left(\int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dV + \mathcal{E}_M\right) = 0 \tag{4.5}$$

Also ist für ein System aus dem elektromagnetischen Feld und der Teilchen darin der Term innerhalb der Klammern eine Erhaltungsgröße. \mathcal{E}_M steht für die Gesamtenergie der Teilchen, womit der andere Term die Energie des Feldes beschreiben muss. Die Größe

$$\mathcal{W} := \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \tag{4.6}$$

gibt somit die *Energiedichte des Felds* an. Falls wir Gl. (4.3) nicht über den ganzen Raum, sondern über ein endliches Volumen V integrieren, verschwindet das Flussintegral $\oint \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ nicht, sondern gibt also die Änderung der Energie innerhalb des Volumens an und damit den Energiefluss durch den Rand des Volumens. \mathbf{S} erhält damit die Bedeutung der *Energieflussdichte* des elektromagnetischen Felds. Diese Überlegungen werden durch den Satz von Poynting zusammengefasst:

Satz 4.1 (Der Satz von Poynting)

Lokale Energieerhaltung

Die Energiedichte des elektromagneti-

schen Felds

Die Gesamtenergie, die sich aus der Energie des elektromagnetischen Felds und der Energie der Materie zusammensetzt, ist lokal erhalten:

$\partial_t (\mathcal{W}_F + \mathcal{W}_M) = -\operatorname{div} \boldsymbol{S}$ (4.7)	
---	--

Eine Änderung der Gesamtenergiedichte in einem Volumen, führt also unweigerlich zu einem Fluss der Größe S durch den Rand des Volumens. S wird deshalb als Energiestromdichte interpretiert¹.

¹Dabei wird angenommen, dass keine Teilchen den Rand des betrachteten Volumens passieren. Wäre dies doch der Fall, so müsste man einen Zusatzterm auf der rechten Seite der Gleichung einführen.

4.3 Lokale Impulserhaltung

In der Elektrodynamik bleibt der Gesamtimpuls von wechselwirkenden geladenen Teilchen nur erhalten, wenn dem elektromagnetischen Feld ein eigener Impuls zugeordnet wird.

Sei $g_M(x,t)$ eine Impulsdichte, d.h. $\int_V d^3x \ g_M(x,t) =: p_M$ ist der Gesamtimpuls eines Volumens V. Das zweite Newtonsche Axiom mit der Lorentzkraft $\dot{p}_m = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}/c)$ kann damit geschrieben werden als

$$\partial_t \boldsymbol{g}_M = \varrho \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} \tag{4.8}$$

Benutzt man nun die Maxwellgleichungen um Ladungs- und Stromdichte zu eliminieren $(\ddot{U}bung)$, so erhält man folgende Gleichung (für die *i*-te Komponente):

Impulserhaltung (differentielle Form)

$$\partial_t (g_{F,i} + g_{M,i}) = \partial_j T_{ij} \tag{4.9}$$

Impulsdichte und Flächenstromdichte des Impulses wobei

$$\boldsymbol{g}_F := \frac{1}{4\pi c} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \tag{4.10}$$

als *Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes* interpretiert wird und der sog. Maxwellsche Spannungstensor

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2) \right)$$
(4.11)

als Flächenstromdichte der Impulskomponente p_i in j-Richtung, bzw. die Kraft pro Fläche in *i*-Richtung auf ein Flächenelement in j-Richtung. Diese Interpretation wird durch die integrale Form der lokalen Impulserhaltung anschaulicher. Dafür integrieren wir (4.9) über einem Volumen V:

$$\int_{V} \partial_{t} g_{F,i} + g_{M,i} d^{3}x = \int_{V} \partial_{j} T_{ij} d^{3}x$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} (p_{F,i} + p_{M,i}) = \oint_{\partial V} T_{ij} d\sigma_{j}$$

Impulserhaltung (integrale Form)

Es gilt also (mit
$$T_{i}$$
:= $(T_{i1} \ T_{i2} \ T_{i3})^T$

$$\frac{d}{dt}(p_{F,i} + p_{M,i}) = \oint_{\partial V} \boldsymbol{T}_{i} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$
(4.12)

Die zeitliche Änderung der Komponente $p_i := p_{F,i} + p_{M,i}$ des Gesamtimpulses innerhalb eines Volumens ist also nur durch einen Fluss der Größe T_i . durch den Rand des Volumens möglich. Ein einzelner Eintrag T_{ij} gibt damit den Wert der Änderung von p_i pro Fläche in *j*-Richtung an².

²Beispielsweise ist der Fluss $T_2 \cdot d\sigma$ durch eine infinitesimale Fläche mit Orientierung in \hat{e}_1 -Richtung gegeben durch $T_2 \cdot \hat{e}_1 d\sigma = T_{21}$.

Bemerkung 4.1 (Impulsdichte des elektromagnetischen Felds) Durch den Ausdruck $g_F := \frac{1}{4\pi c} (E \times B)$ wird dem elektromagnetischen Feld eine Impulsdichte zugeordnet. Diese ist proportional zum Energiestrom S:

$$g \equiv \frac{1}{c^2} S \tag{4.13}$$

Das heißt, die Impulsdichte ist äquivalent zum Energiestrom. Diese Beziehung ist konsistent mit dem Zusammenhang zwischen Impuls und Energie eines relativistischen Punktteilchens:

$$\boldsymbol{p}_M = \gamma m \boldsymbol{v} = rac{1}{c^2} \boldsymbol{v} \gamma m c^2 = rac{1}{c^2} \mathcal{E}_M \boldsymbol{v}$$

Die Maxwellgleichungen in Materie

In Festkörpern sind die Maxwellgleichungen natürlich ebenso gültig, wie im Vakuum. Es ist im Allgemeinen aber relativ kompliziert die Gleichungen beispielsweise auf 10²³ Atomkerne und Elektronen anzuwenden, und dabei quantenmechanische Effekte miteinzubeziehen. Diese Behandlung übersteigt unseren derzeitigen Kenntnisstand der Festkörperphysik. Man bedient sich an dieser Stelle deshalb einem makroskopischen Modell der Elektrodynamik, wofür die Maxwellgleichungen geringfügig umgeschrieben werden müssen.

5.1 Ladungen und Ströme

Gebundene und freie Ladungen Bringt man ein Dielektrikum in ein äußeres elektrisches Feld (z.B. zwischen zwei Kondensatorplatten), so kommt es zu einer Ladungsverschiebung der einzelnen Moleküle des Materials (siehe E2-Vorlesung). Dadurch treten an bestimmten Stellen (z.B. an den Stirnflächen) des Dielektrikums *Polarisationsladungen* auf. Solche Ladungen innerhalb der Materie, die nur indirekt beeinflussbar sind, bezeichnen wir als *gebundene Ladungen* mit der Ladungsdichte ϱ_b .

Diese Ladungen sind zu unterscheiden von den *freien Ladungen*, die in den Leitern frei beweglich sind (Ladungsdichte ρ_f). Für diese Ladungen muss die Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho_f + \text{div } \boldsymbol{j}_f = 0$ erfüllt sein. Da wir dies für die gesamte Ladungsdichte $\rho := \rho_f + \rho_b$ ebenso fordern, sind die gebundenen Ladungen ebenso erhalten.

Satz 5.1

Für eine Ladungsdichte ϱ , die die Kontinuitätsgleichung erfüllt, existieren zwei Vektorfelder P und M mit

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}, \ \boldsymbol{j} = \partial_t \boldsymbol{P} + c \operatorname{rot} \boldsymbol{M}$$

$$(5.1)$$

Beweis: Gelte zunächst die rechte Seite obiger Äquivalenz, dann ist

 $\partial_t \rho + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = -\partial_t \operatorname{div} \boldsymbol{P} + \operatorname{div} \partial_t \boldsymbol{P} = 0.$

Sei nun die Kontinuitätsgleichung für j und ϱ erfüllt und sei ein Vektorfeld P definiert durch

$$P_x := -\int_0^x d'_x \, \varrho(x', y, z, t) \, , \ P_y = P_z = 0.$$

Dann ist $-{\rm div}\, {\boldsymbol P} = \varrho$ und die Kontinuitätsgleichung wird zu

 $\operatorname{div}\left(\boldsymbol{j}-\partial_t\boldsymbol{P}\right)=0.$

Das heißt, wir können mit einem weiteren Vektorfeld M schreiben:

$$\boldsymbol{j} - \partial_t \boldsymbol{P} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{M}$$

Bemerkung 5.1

Die durch Satz 5.1 definierten Felder P und M sind nicht eindeutig festgelegt. So sind ρ und j unbeeinflusst, falls sie aus den Feldern P' und M' hervorgehen, die durch die Eichtransformation

 $P' = P + c \operatorname{rot} F$, $M' = M - \partial_t F$

gegeben sind.

Durch die Gleichungen

Wir wenden Satz 5.1 auf die gebundenen Ladungen, also auf die Ladungsdichte ρ_b und und die Stromdichte j_b an und erhalten die

Definition 5.1 (Polarisierungs- und Magnetisierungsdichte).

Def.: Polarisierungsund Magnetisierungsdichte

$$\varrho_b = -\operatorname{div} \boldsymbol{P} \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{j}_b = \partial_t \boldsymbol{P} + c \operatorname{rot} \boldsymbol{M} \tag{5.3}$$

werden die Polarisierungsdichte P und die Magnetisierungsdichte M definiert.

5.2 Maxwellgleichungen in Materie

Nun sind wir soweit die Maxwellgleichungen entsprechend umzuschreiben. Aus (2.1) folgt:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi(\varrho_f + \varrho_b) = 4\pi\varrho_f - 4\pi\operatorname{div} \boldsymbol{P}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{div} \ (\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}) = 4\pi\varrho_f$$

Analog erhält man aus der zweiten Maxwellgleichung:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_f + \frac{4\pi}{c} \partial_t \boldsymbol{P} + 4\pi \operatorname{rot} \boldsymbol{M}$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{rot} (\boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{M}) - \frac{1}{c} \partial_t (\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}) = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_f$$

T3: Elektrodynamik

Definition 5.2 (Verschiebungsdichte und H-Feld). Man definiert über Def.: Verschiebungsdichte, $D := E + 4\pi P$ (5.4)H-Feld $H := B - 4\pi M$ (5.5)die Verschiebungsdichte D und das H-Feld H. Mit dieser Definition können wir obige Gleichungen zusammenfassen: Die Maxwellschen Gleichungen in Mate Maxwellsche Gleichungen in Materie div $D = 4\pi \rho_f$ $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{D} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_f$ $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{B} = 0$ $\operatorname{div} \boldsymbol{B} =$

Um mit diesen Gleichungen arbeiten zu können, benötigt man zusätzliche entsprechende Modelle, aus denen man durch Festlegung von P, M und j_f Gleichungen¹ für D und H und damit schließlich die Felder E und B ermitteln kann.

Bemerkung 5.2

Es ist wichtig, immer darauf zu achten, dass die Quellen von D und H nur die freien Ladungen ρ_f und Ströme j_f sind, wohingegen für E und B alle Ladungen und Ströme berücksichtigt werden müssen.

5.3 Einfachste Modelle

Dielektrikum

(i) **Ideales Dielektrikum** (linear, isotrop) Die KG sind gegeben durch

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t) = \chi \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) , \quad \boldsymbol{M} = 0$$
(5.10)

mit der dielektrischen Suszeptibilität χ . Per Definition ist damit

$$\boldsymbol{D} = (1 + 4\pi\chi)\boldsymbol{E} =: \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E} , \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$$
(5.11)

mit der dielektrischen Konstante² $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$.

Magnetikum

⁽ii) Ideales Magnetikum

 $^{^1{\}rm Man}$ nennt diese Gleichungen dann konstituierende Gleichungen (KG). $^2{\rm Im}$ Vakuum ist folglich $\chi=0$ und $\varepsilon=1.$

Die KG sind gegeben durch

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},t) = \chi_m \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) , \quad \boldsymbol{P} = 0$$
(5.12)

mit der magnetischen Suszeptibilität χ_m . Per Definition ist damit

$$D = E$$
, $\mu H := (1 - 4\pi \chi_m)^{-1} H = B$ (5.13)

mit der *Permeabilität* $\mu = (1 - 4\pi\chi_m)^{-1}$. Ist $\mu > 1$, so nennt man den Stoff paramagnetisch, ist $\mu < 1$ diamagnetisch.

(iii) Ohmscher Leiter

Die KG für die freie Stromdichte in einem Ohmschen Leiter lautet

$$\mathbf{j}_f(\mathbf{x},t) = \kappa \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \tag{5.14}$$

mit der Leitfähigkeit κ .

Mit diesem Ausdruck können wir wegen $\partial_t \mathcal{W}_M = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ beispielsweise die Energieänderung beim Fluss eines Ohmschen Stroms berechnen:

$$\partial_t \mathcal{E}_M = \int d^3x \; \partial_t \mathcal{W}_M = -\int d^3x \; \boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{E} = -\kappa \int d^3x \; \boldsymbol{E}^2$$

Der Wert ist negativ, da das Feld Energie abgibt, aufgrund des elektrischen Widerstands des Leiters.

Im Spezialfall eines idealen Leiters $(\kappa \to \infty)$ ist $E = \frac{1}{\kappa} j_f = 0$. Damit wäre nach (2.3) $\partial_t B = 0$ und laut (2.1) $\rho = 0$.

Beispiel 5.1 (Leiter)

Wir betrachten einen Leiter der Länge L mit Radius r und Leitfähigkeit κ . Der Strom I durch den Leiter ist dann gegeben durch

 $I = j_f A = j_f \pi r^2 = \pi r^2 \kappa E$

Mit dem Potential $\varphi(x)=-\int_0^x Edx=E~x$ und der Spannung $U:=\phi(L)-\phi(0)=E~L$ ist

$$I = \frac{\pi r^2}{L} \kappa \ U =: \frac{1}{R} U,$$

wobei $R := \frac{L}{\pi r^2} \frac{1}{\kappa}$ der Ohmsche Widerstand des Leiters ist.

T3: Elektrodynamik

Leiter

Beispiel 5.2 (Homogenes Dielektrikum)

Sei ein homogenes Dielektrikum zwischen zwei Kondensatorplatten mit der freien Oberflächenladung $\xi_f := Q/A > 0$ bzw. $-\xi_f$ gegeben. Da wir die freie Ladung kennen, können wir die Verschiebungsdichte D bestimmen:

$$DA = 4\pi \int d^3 x \varrho_f = 4\pi \xi_f A \quad \Rightarrow \quad D = 4\pi \xi_f$$

Damit ist das elektrische Feld $E = \frac{1}{\varepsilon}D = \frac{4\pi\xi_f}{\varepsilon}$ (homogen) und die Polarisierungsdichte $P = \chi E = \chi \frac{4\pi\xi_f}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\xi_f$ (homogen) bekannt. Außerdem ist die gebundene Ladungsdichte im Inneren des Mediums $\varrho_b = -\text{div } \boldsymbol{P} = 0$. Auf der Oberfläche gilt jedoch:

$$-\oint \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = Q_b \quad \Leftrightarrow \quad -PA = \xi_b A$$

Und mit dem bereits berechneten Ausdruck für P können wir die Dichte der gebundenen Ladung bestimmen:

$$\xi_b = -P = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \xi_f \tag{5.15}$$

Dabei fällt auf, dass die Vorzeichen von ξ_f und ξ_b verschieden sind; dass für $\varepsilon \to \infty$, $\xi_b = -\xi_f$ wird – also das Dielektrikum vollständig abschirmt – und, dass für $\varepsilon = 1$ die Bedingungen eines Vakuums herrschen ($\xi_b = 0$).

5.4 Randbedingungen an Grenzflächen

Die Maxwellgleichungen in Materie erlauben es, das Verhalten der Felder an den Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien zu untersuchen.

(i) Verschiebungsdichte D

Wir integrieren Gl. (5.6) über ein kleines Volumen V in Form eines Quaders, das ein Stück der Grenzfläche einschließt, wobei zwei der Seitenflächen (mit Inhalt A) parallel zur Grenzfläche stehen und die restlichen eine verschwindende Breite besitzen sollen:

$$\int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{D} \ d^{3}x = \oint_{\partial V} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = (D_{1}^{\perp} - D_{2}^{\perp})A = 4\pi Q_{f}$$

Dabei bezeichnet D_i^{\perp} die Komponente der Verschiebungsdichte senkrecht zur Grenzfläche (und damit auch senkrecht zu A), wobei i die Seite relativ zur Grenzfläche angibt. Führt man die *Flächenladungsdichte* $\xi_f := Q_f/A$ ein, so ergibt sich für den Sprung der senkrechten Komponente von D:

$$D_1^{\perp} - D_2^{\perp} = 4\pi\xi_f \tag{5.16}$$

Der Fluss von D durch die restlichen Flächen (mit der verschwindenden Dicke) verschwindet, falls D insgesamt endlich bleibt. Diese Bedingung ist automatisch erfüllt, da nur endliche Ladungen vorhanden sein können.

Sprungbedingung für die Verschiebungsdichte

(ii) H-Feld

Nun wollen wir ein Flächenintegral über ein Rechteck R mit dem Rand Γ ausführen, wobei zwei der Seiten (mit der Länge l) parallel zur Grenzfläche verlaufen und die anderen beiden eine verschwindende Länge besitzen sollen. Durch die eingeschlossene Linie auf der Grenzfläche fließe ein Strom der Stärke $I = \eta_f \cdot (\hat{n} \times l)$ mit der *Linien*stromdichte η_f und dem Normalenvektor \hat{n} der Grenzfläche. Integration von (5.7) über die Fläche ergibt

$$\int_{R} (\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{c} \partial_{t} \boldsymbol{D}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \equiv \frac{4\pi}{c} \int \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Da zwei der Seiten von R verschwinden sollen, verschwindet auch das Flussintegral von D durch die Fläche, womit sich die Gleichung

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \left(\boldsymbol{H}_{1}^{\parallel} - \boldsymbol{H}_{2}^{\parallel}\right) \cdot \boldsymbol{l} \equiv \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{\eta}_{f} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{l}) = \frac{4\pi}{c} (\boldsymbol{\eta}_{f} \times \hat{\boldsymbol{n}}) \cdot \boldsymbol{l}$$

Sprungbedingung des **H**-Felds

ergibt. Womit wir eine Sprungbedingung des
$$H$$
-Felds erhalten:

$$\boldsymbol{H}_{1}^{\parallel} - \boldsymbol{H}_{2}^{\parallel} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{\eta}_{f} \times \hat{\boldsymbol{n}}$$

$$(5.17)$$

(iii) Elektrisches Feld

Genauso wollen wir nun Gl. (5.8) benutzen:

$$\int \left(\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{B} \right) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

Damit erhalten wir sofort die Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Felds

$$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0 \tag{5.18}$$

(iv) Magnetisches Feld

Aus div B = 0 folgt mit denselben Überlegungen, wie für die Verschiebungsdichte:

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{B} \ d^3 x = \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$$

Stetigkeit von B^{\perp}

Stetigkeit von E^{\parallel}

Also

$$B_1^{\parallel} - B_2^{\parallel} = 0 \tag{5.19}$$

Bemerkung 5.3

Die Grenzfläche wird bei dieser Beschreibung als *scharf* idealisiert. Das heißt, die Ladungsdichte ϱ_f kann innerhalb dieses Modells durch $\xi_f \delta(x)$ beschrieben werden.

Wichtiger Spezialfall

Spezialfall: $\xi_f = 0, \ \boldsymbol{\eta}_f = 0$

Für lineare Medien,	wie wir sie in	Abschnitt 5.3	behandelt	haben,	gilt speziell	für $\xi_f = 0$
und $\eta_f = 0$:.						

$\varepsilon_1 E_1^{\perp} \stackrel{5.16}{=}$	$\varepsilon_2 E_2^{\perp}$	(5.20)
$rac{1}{\mu_1} oldsymbol{B}_1^{\parallel} \stackrel{5.17}{=}$	$rac{1}{\mu_2} oldsymbol{B}_2^{\parallel}$	(5.21)
$oldsymbol{E}_1^{\parallel} =$	$oldsymbol{E}_2^\parallel$	(5.22)
$oldsymbol{B}_1^\perp$ $=$	B_2^\perp	(5.23)

Teil II

Elektrostatik

Allgemeine Formulierung

Definition 6.1 (Elektrostatik).

In der Elektrostatik behandelt man nur zeitlich konstante Felder und keine elektrischen Ströme. Die Grundgleichungen der Elektrostatik sind deshalb:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi \varrho, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{6.1}$$

6.1 Elektrostatisches Feld

Satz 6.1 (Elektrostatisches Feld)

Aus den Grundgleichungen der Elektrostatik und dem Helmholtz-Theorem folgt B = 0 und die Darstellung des elektrostatischen Felds:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\text{grad} \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 \boldsymbol{x}' = \int \frac{d^3 \boldsymbol{x}' \,\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}$$
(6.2)

Beweis: Nach Satz A.11 können wir das elektrische Feld ausdrücken durch

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\text{grad} \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div} \, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, d^3 \boldsymbol{x}'\right) + \text{rot} \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot} \, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, d^3 \boldsymbol{x}'\right)$$

falls E für $|\mathbf{x}| \to \infty$ schneller verschwindet als $1/|\mathbf{x}|$. Mit den Grundgleichungen der Elektrostatik ist der erste Ausdruck in Gleichung (6.2) sofort klar. Diesen können wir aber weiter vereinfachen:

$$-\operatorname{grad} \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} d^3 \boldsymbol{x}' = -\int d^3 \boldsymbol{x}' \ \varrho(\boldsymbol{x}') \hat{e}_i \partial_i \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \int \frac{d^3 \boldsymbol{x}' \ \varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2} \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \qquad \Box$$

Def.: Elektrostatik

Grundgleichungen der Elektrostatik

Darstellung des

elektrostatischen

Felds

Bemerkungen 6.1

- (i) Ist f
 ür ein konkretes elektrostatisches Problem die Ladungsverteilung bekannt, so kann mithilfe von Gl. (6.2) das elektrostatische Feld berechnet werden.
- (ii) Die Kraft auf eine punktförmige Ladung innerhalb eines elektrostatischen Felds ist gegeben durch F = qE. Dabei geht man in der Elektrostatik immer davon aus, dass die Probeladung beweglich ist, aber diese keinen Einfluss auf die Quelle des Felds E hat (da sonst Zeitabhängigkeiten auftreten würden).
- (iii) Im Falle einer Punktladung kann man die Ladungsverteilung $\rho(x)$ schreiben als

 $\varrho(\boldsymbol{x}) = Q\delta(\boldsymbol{x})$

Damit ergibt sich für das elektrische Feld das Coulombsche Gesetz:

$$oldsymbol{E}(oldsymbol{x}) = rac{Q}{|oldsymbol{x}|^2} rac{oldsymbol{x}}{|oldsymbol{x}|}$$

(iv) Der letzte Term in Gl. (6.2) kann auch als Summation (bzw. Integration) über die elektrischen Felder von Punktladungen $dq = d^3 x \varrho(x)$ aufgefasst werden, die durch das Coulombsche Gesetz gegeben sind.

6.2 Elektrostatisches Potential

In der Elektrostatik ist das elektrische Feld (wegen rot E = 0) das Gradientenfeld eines Skalarfelds φ :

$$E = -\operatorname{grad} \varphi$$

$$-\bigtriangleup\varphi = 4\pi\varrho \tag{6.3}$$

Satz 6.2 (Elektrostatisches Potential)

Als Lösung der Poisson-Gleichung und unmittelbare Folge von Gl. (6.2) erhält man das elektrostatische Potential durch:

$$\varphi = \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, d^3 \mathbf{x}' \tag{6.4}$$

Beweis: Wegen (siehe Übung) $-\triangle \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = 4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ ist $\varphi(\boldsymbol{x})$ aus (6.4) Lösung der Poisson-Gleichung.

Bemerkung 6.2

 φ ist nur bis auf eine Integrationskonstante einde
utig festgelegt. Meistens wählt man φ so, das
s $\lim_{|x|\to\infty}\varphi=0.$

Coulombsches Gesetz

Darstellung des

elektrostatischen Potentials

¹Diese geht für $\rho = 0$ in die Laplace-Gleichung $\Delta \varphi = 0$ über.

Beispiel 6.1 (Eindimensionale Ladungsverteilung)

Sei eine eindimensionale Ladungsverteilung der Länge 2a entlang der x-Achse mit Ladungsdichte

$$\lambda(x) = \begin{cases} q/(2a) & \text{für } |x| \le a\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben (z.B. ein verschwindend dünner Stab). Wir wollen das elektrische Feld in der Mitte des Stabs entlang der Geraden durch x = 0 bestimmen (d.h. uns interessieren nur die Punkte x = (0, y, 0) mit $y \in [0, \infty)$). Dazu benötigen wir zuerst einen Ausdruck für die Ladungsdichte ϱ :

$$\varrho(\boldsymbol{x}) = \lambda \, \delta(y) \, \delta(z) \, \Theta(a - |\boldsymbol{x}|)$$

mit der Indikatorfunktion $\Theta(x) := \mathbb{1}_{x>0}$. Das Potential $\varphi(0, y, 0)$ erhalten wir dann leicht aus Gl. (6.4):

$$\varphi(0, y, 0) = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx$$

Um dieses Integral zu lösen, setzen wir $u := x + \sqrt{x^2 + y^2}$ und erhalten

$$\varphi(0, y, 0) = 2\lambda \int_{u(0)}^{u(a)} \frac{du}{u} = 2\lambda \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\Big|_0^a = 2\lambda \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + y^2}}{y}\right)$$

Damit können wir nun das elektrische Feld $E = -\operatorname{grad} \varphi$ entlang der oben betrachteten Geraden bestimmen:

$$\boldsymbol{E}(0, y, 0) = -\text{grad}\,\varphi = -\hat{\boldsymbol{e}}_y\,\partial_y\varphi(0, y, 0) = \frac{2\lambda a}{y\sqrt{y^2 + a^2}}\hat{\boldsymbol{e}}_y$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie des Problems können wir den Definitionsbereich von E auf die Fläche durch den Punkt z = 0 und senkrecht zur Ladungsverteilung ausweiten:

$$E(x=0,\rho)=\hat{e}_{\rho}\frac{q}{\rho\sqrt{\rho^2+a^2}}\;,\quad \text{für }\rho:=\sqrt{y^2+z^2}$$

Grenzfälle:

- (i) $a \ll \rho$: Das elektrische Feld nimmt die Form $E(\rho) = \frac{q}{\rho^2}$ an (Feld einer Punktladung).
- (ii) $a \gg \rho$: Es ergibt sich die Form² eines unendlich langen geladenen Drahts³: $E(\rho) = \frac{2\lambda}{\rho}$.

²Diese Gleichung erhält man sehr einfach, indem man die erste Maxwellgleichung über einen Zylinder der Höhe *l* integriert, dessen Symmetrieachse mit dem Draht zusammenfällt: $2\pi\rho l E = 4\pi l \lambda$, also $E = 2\lambda/\rho$.

³ Diese Gleichung gilt auch entlang der x-Achse, wobei E auch für $x \to \infty$ konstant bleibt. Dieses Verhalten widerspricht den Bedingungen, die das Helmholtz-Theorem an ein elektrisches Feld stellt, was aber kein Problem darstellen sollte, da die Idealisierung eines unendlich langen Drahtes in Wirklichkeit niemals auftritt. Sie dient letztlich nur dazu, den Fall $a \gg \rho$ einfach zu behandeln.

6.3 Leiter in der Elektrostatik

Wir wollen einige grundlegende Eigenschaften von Leitern in der Elektrostatik zusammentragen:

- Innerhalb eines idealen Leiters gibt es kein elektrisches Feld. In ohmschen Leitern gibt es nur dann ein elektrisches Feld, wenn ein Strom fließt $(j = \kappa E)$, was in der Elektrostatik nie der Fall ist.
 - Aus div $E = 4\pi \rho$ folgt, dass innerhalb von Leitern in der Elektrostatik auch $\rho = 0$ ist. Das heißt, eine eventuell vorhandene Ladung muss sich an der Oberfläche aufhalten.
 - Seien a und b zwei beliebige Punkte innerhalb eines Leiters. Wegen

$$\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a}) = -\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

ist das Potential innerhalb eines Leiters konstant.

• Aufgrund der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Felds beim Übergang zwischen zwei Medien muss die Feldkomponente parallel zur Oberfläche außerhalb des Leiters verschwinden. Das Feld steht also immer senkrecht zur Oberfläche.

Kein Feld in Leitern

Die Ladung sitzt an der Oberfläche

Feldenergie

7.1 Diskrete Punktladungen

Wir wollen zunächst die Energie berechnen, die nötig ist um n raumfeste Punktladungen in eine bestimmte Konfiguration (Lage zueinander im Raum) zu bewegen:

Die erste Ladung lässt sich ohne Krafteinwirkung an eine beliebige Stelle im freien Raum bewegen ($\mathcal{E}_1 = 0$). Die Ladung q_2 wird hingegen bereits ein Feld (das Feld der ersten Punktladung E_1 im Abstand $|x_1 - x_2| =: r_{12}$) spüren:

$$\mathcal{E}_2 = -\int_{\infty}^{x_2} q_2 \, \boldsymbol{E}_1 \cdot d\boldsymbol{l} = q_2 \, \varphi_1(\boldsymbol{x}_2) = \frac{q_2 \, q_1}{r_{12}}$$

Die dritte Ladung muss gegen die beiden Felder der vorhandenen Ladungen bewegt werden:

$$\mathcal{E}_3 = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Gesamtenergie einer Die gesamte Arbeit \mathcal{E}_n , die verrichtet werden muss, um n Punktladungen zu positionieren ist damit gegeben durch

diskreten Ladungsverteilung

$$\mathcal{E}_n = \sum_{i=1}^n \sum_{1 < j < i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$
(7.1)

7.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung

Potentielle EnergieIn direkter Analogie zum diskreten Fall, können wir im kontinuierlichen Fall schreiben:einerkontinuierlichenkontinuierlichen $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x})\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x d^3x' = \frac{1}{2} \int \varrho(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}) d^3x$ Ladungsverteilung $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x})\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x d^3x' = \frac{1}{2} \int \varrho(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}) d^3x$

Bemerkung 7.1 (Punktladungen in der Elektrodynamik)

Bei x' = x ist gibt es im kontinuierlichen Fall keine Singularität für \mathcal{E} , da über ein Volumen integriert wird, welches für $r \to 0$ schneller als 1/r verschwindet.

Für Punktladungen ($\varrho(x) = \sum_i q_i \delta(x - x_i)$) ergibt sich innerhalb dieser Beschreibung folgender Ausdruck für die Feldenergie

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \mathcal{E}_n + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{r_{ii}}$$

Selbstwechselwirkung

Feld- entspricht

Die Reihe, die hier zusätzlich zu \mathcal{E}_n auftritt wird unendlich groß, da $r_{ii} = 0$ für alle i. Man nennt den eigentlich nicht definierten Ausdruck q_i^2/r_{ii} Selbstwechselwirkung und interpretiert sie als Energie, die zum Aufbau einer Punktladung notwendig ist. Der Begriff einer Punktladung ist also jenseits der klassischen Elektrodynamik, weshalb wir im Folgenden die Selbstenergie von Punktladungen konsequent ignorieren.

Satz 7.1 (Feld- und potentielle Energie)

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ist die potentielle Energie $\mathcal E$ des Systems gleich der im Feld vorhandenen Energie: potentieller Energie

$$\frac{1}{2} \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x})\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 x \, d^3 x' \equiv \int \mathcal{W}_F \, d^3 x = \frac{1}{8\pi} \int |\boldsymbol{E}|^2 \, d^3 x \tag{7.3}$$

Beweis:

$$\frac{1}{2} \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x})\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 x \, d^3 x' = \frac{1}{2} \int \varrho(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}) \, d^3 x = \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \, \varphi(\boldsymbol{x}) \, d^3 x$$
$$= \frac{1}{8\pi} \int \left(\operatorname{div} \left(\boldsymbol{E}\,\varphi\right) - \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{grad}\varphi\right) \, d^3 x$$
$$= \frac{1}{8\pi} \oint \varphi \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{8\pi} \int |\boldsymbol{E}|^2 \, d^3 x$$

Da $\varphi(\boldsymbol{x}) \propto \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}$ für $r := |\boldsymbol{x}| \to \infty$ ist $\boldsymbol{E} \stackrel{r \to \infty}{\propto} \frac{1}{r^2}$ und somit

$$\oint \varphi \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \propto \frac{1}{r} \to 0$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Polynome der Form

Multipolentwicklung

Befindet man sich sehr weit von einer Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{x})$ entfernt, so können wir sie näherungsweise durch das Coulombpotential $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{|\boldsymbol{x}|}$ beschreiben. Diese sehr grobe Näherung kann mit mit durch die *Multipolentwicklung* des elektrostatischen Potentials verfeinern. Dazu benötigen wir die *Legendre-Polynome*:

Definition 8.1 (Legendre-Polynom).

Def.: Legendre-Polynome

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$
(8.1)

heißen Legendre-Polynome. Die ersten drei Polynome ergeben sich zu

$$P_0(x) = 1$$
, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

Satz 8.1 (Orthogonalität und Erzeugende)

Die Legendre-Polynome erfüllen die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) \, dx = \frac{2}{2l+1} \,\delta_{ll'} \tag{8.2}$$

Erzeugende Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2-2zx}} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l P_l(x)$$
(8.3)

8.1 Allgemeine Entwicklung des Potentials

Zuerst wollen wir den Abstand $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ in Abhängigkeit von $r := |\mathbf{x}|$ und $r' := |\mathbf{x}'|$ schreiben:

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}'} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'} = r\sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r}\cos\theta}$$

mit dem Winkel θ' zwischen \boldsymbol{x} und \boldsymbol{x}' . Damit ergibt sich für das elektrostatische Potential einer Ladungsverteilung $\varrho(\boldsymbol{x}')$:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x}') d^3 x'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \frac{1}{r} \int d^3 x' \, \varrho(\boldsymbol{x}') \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \theta')$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int d^3 x' \, \varrho(\boldsymbol{x}') r'^l P_l(\cos \theta')$$

Mit der Definition

$$f_l := \int d^3 x' \,\varrho(\boldsymbol{x}') r'^l P_l(\cos\theta') \tag{8.4}$$

Entwicklung des Potentials in Legendre-Polynome

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{f_l}{r^{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(\boldsymbol{x})$$
(8.5)

 ϕ_l nennt man 2^l-Pol-Term.

8.2 Spezialfälle

Wir wollen die ersten drei Entwicklungen genauer untersuchen:

Monopol (l = 0)

Monopol-Term

Wird nur bis zum ersten Glied der Reihe entwickelt, so erhält man

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \approx \varphi_0(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{r} \int d^3 x' \varrho(x') = \frac{q}{r}$$
(8.6)

Wie erwartet, ist die gröbste Näherung durch das Coulomb
potential der Gesamtladung $Q := \int \varrho(x') d^3x'$ gegeben.

T3: Elektrodynamik

Dipol (l=1)

Der zweite Term der Entwicklung ergibt:

$$\varphi_1 = \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \varrho(\boldsymbol{x}') d^3 x'$$

Dipol-Term

Mit $r' \cos \theta' = \frac{x' \cdot x}{|x|} = \hat{n} \cdot x'$ und dem *Dipolmoment* $\mathfrak{p} = \int x' \varrho(x') d^3x'$ ergibt sich

$$\varphi_1 = \frac{1}{r^2} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{p}} \tag{8.7}$$

Ist die Ladung so verteilt, dass zwei gleiche Pole exisiteren und damit Q = 0 ist, dann ist φ_1 der führende Term in der Multipolentwicklung von φ .

Beispiel 8.1

Besteht ein Dipol aus zwei Punktladungen +q (bei x_1) und -q (bei x_2), so ist dessen Dipolmoment gegeben durch

$$\mathfrak{p} = \int \boldsymbol{x}' \varrho(\boldsymbol{x}') d^3 \boldsymbol{x}' = \int \boldsymbol{x}' q(\delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_1) - \delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_2)) d^3 \boldsymbol{x}' = q \boldsymbol{d}$$

mit $d := x_1 - x_2$.

Quadrupol (l=2)

Berechnen wir den dritten Term der allgemeinen Multipolentwicklung:

$$\varphi_2 = \frac{1}{r^3} \int r'^2 \frac{1}{2} (3\cos^2\theta' - 1)\varrho(x') d^3x'$$

Quadrupol-Term

Mit
$$r'^2 \cos^2 \theta' = (\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{x}')^2 = \hat{n}_i x'_i \hat{n}_j x'_j$$
 und $r'^2 = \hat{\boldsymbol{n}}^2 r'^2 = \hat{n}_i \hat{n}_j \delta_{ij} r'^2$ können wir schreiben

$$\varphi_2 = \frac{1}{2r^3} \hat{n}_i \hat{n}_j \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \varrho(\mathbf{x}') \, d^3 x' =: \frac{1}{2r^3} \hat{n}_i \hat{n}_j Q_{ij} \tag{8.8}$$

Den symmetrischen und spurfreien Tensor Q_{ij} nennt man Quadrupolmoment.

Bemerkung 8.1 (Abhängigkeit vom Koordinatenursprung)

Die (Multipol-)Momente sind im Allgemeinen abhängig vom Koordinatensystem, bzw. von der Wahl dessen Ursprungs. Es ist zweckmäßig den Ursprung gemäß einer möglichen Symmetrie der Ladungsverteilung zu wählen. Das kleinste, nichtverwschwindende Multipolmoment ist aber immer unabhängig von der Wahl des Ursprungs.

8.3 Elektrisches Feld und Wechselwirkung von Dipolen

Elektrisches Feld

Elektrisches Feld eines Dipols Mit dem Potential eines Dipols $\varphi(x) = \frac{\hat{n} \cdot p}{r^2}$ können wir das elektrische Feld berechnen:

$$E_i = -\partial_i \varphi = -\mathfrak{p}_j \partial_i \frac{x_j}{r^3} = -\mathfrak{p}_j \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3x_j \frac{1}{r^4} \frac{x_i}{r} \right) = \frac{3(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathfrak{p})\hat{n}_i - \mathfrak{p}_i}{r^3}$$
(8.9)

Wechselwirkungsenergie zweier Dipole

Wir können die potentielle Energie einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ in einem äußeren Feld, das durch das Potential $\varphi(\mathbf{x})$ beschrieben wird, darstellen durch

$$\mathcal{E} = \int \varrho(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}) \, d^3 x$$

Für den Fall, dass sich φ innerhalb der Größenordnung der gegebenen Ladungsverteilung ϱ nur langsam verändert, können wir entwickeln

$$\mathcal{E} \approx \int \varrho(\boldsymbol{x})(\varphi(0) + \nabla \varphi(0) \cdot \boldsymbol{x}) \, d^3 \boldsymbol{x} = Q\varphi(0) - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{E}(0)$$

Wechselwirkungs-
energie vonUns interessiert nun die potentielle Energie eines Dipols \mathfrak{p}_1 im Feld eines zweiten \mathfrak{p}_2 (wobei
der Abstand r zwischen den Dipolen verglichen mit der Ausdehnung d der Dipole groß sei):
DipolenDipolen

$$\mathcal{E}_{12} = -\mathfrak{p}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 = \frac{\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 - 3(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathfrak{p}_2)(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \mathfrak{p}_1)}{r^3} = \mathcal{E}_{21}$$
(8.10)

T3: Elektrodynamik
Kapitel 9

Randwertprobleme

9.1 Randbedingungen und Eindeutigikeit

Für die meisten elektrostatischen Probleme ist es zu kompliziert, das elektrische Feld mithilfe des Gaußschen Satzes zu ermitteln. Dann bedient man sich dem elektrostatischen Potential, denn dieses ist meist einfacher bestimmbar:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, d^3 \boldsymbol{x}' \tag{9.1}$$

Ist aber beispielsweise die Ladungsverteilung ρ umgeben von einem Randbebiet, oder herrschen ähnliche komplizierte Raumstrukturen vor, so ist das durch diesen Ausdruck gegegeben Potential eventuell keine allgemeine, sondern nur eine spezielle Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta \varphi = -4\pi \varrho \tag{9.2}$$

Mit einer allgemeinen Lösung wird man unter Berücksichtigung bestimmter Randbedingungen Probleme innerhalb einem bestimmten Raumgebiet V, das möglicherweise von einem Medium (z.B. von einem Leiter) abgegrenzt wird und eventuell selbst Körper beinhaltet, bearbeiten können. Die nötigen Randbedingungen werden dabei Aussagen über das Potential am Rand ∂V des Volumens und über vorhandene Ladungsverteilungen im Innern beinhalten. Man unterscheidet die

- (i) Dirichlet-Randbedingung: φ ist auf dem Rand ∂V festgelegt.
- (ii) Neumann-Randbedingung: Die Richtungsableitung $D_n \varphi \stackrel{(A.10)}{=} \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla \varphi$ in Richtung des Normaleneinheitsvektors $\hat{\boldsymbol{n}}$ von ∂V ist auf dem Rand ∂V vorgegeben.

Allgemeine LösungDie allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung ist gegeben durch die Summe aus einer speziel-
len (inhomogen) und einer homogenen Lösung φ_h (Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta \varphi = 0$):

 $\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 \boldsymbol{x}' + \varphi_h(\boldsymbol{x})$ (9.3)

Randbedingungen

der Poisson-Gleichung

Satz 9.1 (Eindeutigkeitssatz)

Die allgemeine Lösung $\varphi(\mathbf{x})$ der Poisson-Gleichung ist für die Dirichlet-Bedingung eindeutig, wohingegen die Neumann-Bedingung das Potential nur bis auf eine additive Konstante festlegt.

Beweis: Nehmen wir an, es gebe zwei verschiedene Lösungen φ_1, φ_2 der Poisson-Gleichung, welche eine Dirichlet-Bedingung [bzw. Neumann-Bedingung] erfüllen. Sei $\psi := \varphi_1 - \varphi_2$, dann ist

Wegen der ersten Greenschen Identität $\int_V (\psi \triangle \psi + (\nabla \psi)^2) d^3x = \oint_{\partial V} \psi \nabla \psi \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ ist

$$\int_{V} (\nabla \psi)^2 d^3 x = \oint \psi \nabla \psi \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, d\sigma = 0$$

Also muss $\nabla \psi$ verschwinden, womit ψ in V konstant ist. Da ψ aber auf dem Rand verschwindet, ist insgesamt $\psi = 0$, womit $\varphi_1 = \varphi_2$ [bzw. $\varphi_1 = \varphi_2 + const.$].

Bemerkungen 9.1

(i) Befindet sich eine begrenzte Ladungsverteilung ρ im freien Raum ($\partial V \to \infty$) und ist wie üblich $\lim_{|x|\to\infty} \varphi = 0$, dann folgt aus Gl. (9.3) für die homogene Lösung $\lim_{|x|\to\infty} \varphi_h = 0$. Da aber $\Delta \varphi_h = 0$, und eine Lösung der Laplacegleichung keine lokalen Extrema haben kann (siehe nächster Abschnitt), ist $\varphi_h(x) \equiv 0$. Somit ist $\varphi(x)$ gegeben durch

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 x'$$

Dies ist konsistent mit unseren bisherigen Überlegungen zum elektrostatischen Potential von Ladungen im Raum.

 (ii) Betrachten wir ein ladungsfreies Volumen V, das von einem Leiter umgeben wird, so gilt f
ür das Potential:

 $riangle \varphi = 0$ in V , $\varphi = const$ auf ∂V

Damit ist wiederum $\varphi = 0$ im Volumen, da keine lokalen Extrema existieren dürfen, und dadurch $E = -\text{grad } \varphi = 0$ (in V). Eine solche Anordnung wird auch Faradayscher Käfig genannt.

9.2 Eigenschaften der Lösungen der Laplace-Gleichung

Die Werte $\varphi(x)$ sind Mittelwerte

Faradayscher Käfig

Eindeutigkeit der

Lösung

 (i) Sei φ eine Lösung der Laplace-Gleichung. Man kann den Wert des Potentials am Punkt x über eine Mittelwertbildung der Werte auf dem Rand einer Kugel K mit Radius R um x erhalten:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{K(\boldsymbol{x})} \varphi \, d\sigma \tag{9.4}$$

Beweis: Zunächst wollen wir nur das Potential am Ursprung einer Punktladung q am Ort(0,0,z) betrachten. Es ist

$$\frac{1}{4\pi R^2} \oint \varphi \, d\sigma \qquad = \qquad \frac{q}{4\pi R^2} \oint 2\pi \frac{1}{\sqrt{R^2 \sin^2 \theta + (z - R \cos \theta)^2}} R^2 \sin \theta \, d\theta$$
$$\stackrel{u:=\cos \theta}{=} \qquad \frac{q}{2} \oint \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rzu}} \, du$$
$$= \qquad -\frac{q}{2} \frac{1}{Rz} \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta} \Big|_0^\pi$$
$$= \qquad \frac{q}{2Rz} ((R+z) - (z-R)) = \frac{q}{z}$$

Das Ergebnis stimmt also mit dem bekannten Ausdruck für das Potential einer Punktladung überein. Wegen des Superpositionsprinzips, gilt die Vorschrift aber für jede beliebige Ladungsverteilung. $\hfill\square$

Diese Eigenschaft der Potentiale, die der Laplace-Gleichung genügen, wird zur numerischen Lösung von Randwertproblemen ausgenutzt, indem ausgehend von den bekannten Randwerten die einzelnen Werte des Potentials im Volumen über eine Iteration bestimmt werden.

Keine lokalen (ii) Eine Lösung φ der Laplace-Gleichung hat keine lokalen Extrema.

Dies folgt unmittelbar aus (i), da definitionsgemäß der Mittelwert der Punkte um das Extremum niemals dessen Wert erreichen wird. Es ist außerdem Plausibel, dass ein Potential, für das $\Delta \varphi = 0$ ist, kein lokales Extremum existieren kann, da für Extrema i.A. $\partial_i^2 \varphi > 0$ (< 0) $\forall i = 1, 2, 3$ ist.

Es kann also nur am Rand ∂V Extrema geben und innerhalb des Volumens wird für eine Probeladung keine stabile Lage möglich sein.

9.3 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Motivation für einen Separationsansatz

Extrema

Die Laplace-Gleichung eines Potentials mit Randbedingungen kann mithilfe eines Separationsansatzes gelöst werden. Wir werden sehen, dass wir mit dieser Methode einen ganzen Satz von (unendlich vielen) Lösungen erhalten, die möglicherweise eine der Randbedinungen nicht erfüllen. Aufgrund der Linearität der Laplace-Gleichung ist die Summe aller Lösungen ebenfalls eine Lösung, die – mit entsprechenden Koeffizienten versehen – die geforderten Bedingungen erfüllen kann.

Wir wollen uns hier auf achsensymmetrische Potentiale beschränken und benutzen Kugelkoordinaten: $\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \Phi(r, \vartheta)$. Die Laplace-Gleichung lautet dann

$$\partial_r (r^2 \,\partial_r \Phi) + \frac{1}{\sin\vartheta} \partial_\vartheta (\sin\vartheta \,\partial_\vartheta \Phi) = 0 \tag{9.5}$$

Der Separationsansatz $\Phi(r, \vartheta) = R(r) \Theta(\vartheta)$ liefert

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^{2}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) = 0$$

Eine konstante Summe aus Funktionen, die jeweils nur von einer aber von verschiedenen Variablen abhängen ist nur möglich, wenn die einzelnen Summanden bereits Konstanten sind. In diesem Fall heben diese sich sogar gegenseitig auf. Es ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

Reduktion auf zwei gewöhnliche DGLen

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = l(l+1)$$
(9.6)

$$\frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) = -l(l+1)$$
(9.7)

mit einem beliebigen Parameter $l \in \mathbb{R}$.

• An der Struktur der Radialgleichung erkennt man, dass diese sich einfacher lösen lässt, wenn wir zusätzlich den Ansatz $R(r) = \frac{u(r)}{r}$ machen, denn damit wird Gl. (9.6) zu

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{u(r)}{r^2}l(l+1)$$

Lösungen dieser Gleichung lassen sich raten: $u_1(r) = r^{l+1}$ und $u_2(r) = r^{-l}$. Also ist die allgemeine Lösung für R(r) der Form

$$R(r) = Ar^{l} + \frac{B}{r^{l+1}}$$
(9.8)

• Schreiben wir die Differentialgleichung (9.7) für die ϑ -Abhängigkeit der Lösung in der Form

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + l(l+1)\sin\vartheta\Theta(\vartheta) = 0,$$

so fällt die Ähnlichkeit zur legendreschen Differentialgleichung¹ auf. Setzen wir also $x \equiv \cos \theta$:

$$\sin\vartheta \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) + l(l+1)\sin\vartheta\,\Theta = 0$$

Polarteil der Lösung

Radialteil der Lösung

womit wir für ganzzahlige l = 0, 1, 2, ... die Legendre-Polynome² als Lösungen erhalten:

$$\Theta(\vartheta) = P_l(\cos\vartheta) \tag{9.9}$$

Wir erhalten also unendlich viele Lösungen von Gl. (9.5), die sich nur durch den Parameter l unterscheiden. Die allgemeinste Lösung der Laplace-Gleichung für azimutale Symmetrie ist somit gegeben durch

Allgemeinste Lösung

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\vartheta)$$
(9.10)

¹Damit ist die Gleichung $\frac{d}{dx}((1-x^2)f'(x)) + l(l+1)f(x) = 0$ gemeint, mit den Legendre-Polynomen $P_l(x)$ als Lösungen.

²Es gibt eine zweite Klasse von Lösungen, die sog. Legendre-Funktionen zweiter Art. Da diese aber für $\vartheta = 0, \pi$ divergieren, sind sie physikalisch nicht relevant.

Beispiel 9.1 (Potential innerhalb einer Kugel)

Bsp.: Im Innern einer Hohlkugel

Bsp.: Leiter im E-Feld Uns interessiert das Potential im Innern einer Hohlkugel, wobei wir (Dirichlet-Bedingung) das Potential auf der Kugelschale als bekannt voraussetzen ($\Phi(R, \vartheta) = \Phi_0(\vartheta)$). In diesem Fall muss B_l verschwinden, da das Potential sonst am Ursprung divergiert:

$$\Phi(r,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\vartheta)$$

Die Dirichlet-Bedingung führt zur Gleichung

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\vartheta) = \Phi_0(\vartheta)$$
(9.11)

Um nach den Koeffizienten A_l aufzulösen, multiplizieren wir diese Gleichung mit $P_m(\cos \vartheta)$ und integrieren über $y := \cos \vartheta$ von y = -1 bis y = 1:

$$\frac{2}{2l+1}A_lR^l\delta_{ml} = \int_{-1}^1 \Phi_0(\vartheta)P_m(\cos\vartheta)\,d(\cos\vartheta)$$

Für eine bekannte Funktion Φ_0 sind nun die Koeffizienten A_l und dadurch $\phi(r, \vartheta)$ bestimmt:

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_{-1}^{1} \phi_0(\vartheta) P_l(\cos\vartheta) \, d(\cos\vartheta) \tag{9.12}$$

Beispiel 9.2 (Metallkugel in äurerem *E*-Feld)

Wir betrachten eine leitende Kugel mit Radius R innerhalb eines äußeren homogenen elektrischen Felds E und interessieren uns für das resultierende Potential, dass durch die Wechselwirkung der Kugel mit dem Feld entsteht. Dazu soll die Dirichlet-Randbedingung

$$\Phi(R,\vartheta) = \phi_0 = \text{const.} \tag{9.13}$$

$$\Phi(r \gg R, \vartheta) \approx -E_0 z(r, \vartheta) = -E_0 r \cos \vartheta$$
(9.14)

erfüllt werden. Diese Bedingungen führen zu den Gleichungen

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos\vartheta) = \phi_0 P_0(\cos\vartheta)$$
(9.15)

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\vartheta) = -E_0 r P_1(\cos\vartheta)$$
(9.16)

Wir vergleichen die Koeffizienten der Legendre-Polynome:

aus (9.15):
$$B_0 = (\phi_0 - A_0)R$$
, $B_{l,l>0} = -A_l R^{2l+1}$

aus (9.16): $A_0 = 0$, $A_1 = -E_0$, $A_{l,l>1} = 0$.

Mit den bekannten A_l können wir die B_l bestimmen: $B_0 = \phi_0 R$, $B_1 = E_0 R^3$, $B_{l,l>1} = 0$.

Das gesuchte Potential hat also die Form

$$\Phi(r,\vartheta) = \frac{\phi_0 R}{r} - E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) \cos\vartheta \tag{9.17}$$

Bemerkungen 9.2

(i) Das elektrische Feld lässt sich nun leicht bestimmen:

$$E = -\operatorname{grad} \Phi = -\hat{e}_r \,\partial_r \Phi - \hat{e}_\vartheta \frac{1}{r} \,\partial_\vartheta \Phi$$
$$= \left[\frac{R\phi_0}{r^2} + E_0 \cos\vartheta \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \right] \hat{e}_r - E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin\vartheta \hat{e}_\vartheta$$

(ii) Die Gesamtladung der Kugel erhalten wir nun aus

$$4\pi Q = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta R^2 E_r(R) = 4\pi R\phi_0 \qquad \Rightarrow \ Q = \phi_0 R$$

Induzierter Dipol

(iii) Besonders interessant ist der Fall
$$Q = 0$$
, wofür das Potential die Form

$$\Phi(r,\vartheta) = -E_0 r \cos\vartheta + E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos\vartheta$$

annimmt. Dies ist die Überlagerung des Potentials $-E_0 z$ des homogenen Felds ohne Kugel mit dem Potential eines induzierten Dipols mit Dipolmoment $\mathfrak{p} = E_0 R^3 \hat{e}_z$:

$$\Phi(r,\vartheta) = -E_0 z + \frac{n \cdot \mathfrak{p}}{r^2}$$
(9.18)

Die induzierte Oberflächenladungsdichte ergibt sich aus

$$4\pi \varrho \, dV = 4\pi \xi \, d\sigma = \boldsymbol{E}(R) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = E_r(R) \, d\sigma \qquad \Rightarrow \ \xi(\vartheta) = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \vartheta$$

9.4 Formale Lösung der Poisson-Gleichung

Wir haben zwar mit Gl. (9.3) bereits die allgemeine Lösung der Poissongleichung für Randwertprobleme angegeben, wollen diese Lösung aber mithilfe der *Greenschen Funktion* für den Laplace-Operator nochmals entwickeln.

Definition 9.1 (Greensche Funktion).

Sei U ein Differentialoperator und $\phi(\mathbf{x})$ die Lösung der Gleichung

$$U\phi(\boldsymbol{x}) = I(\boldsymbol{x}) \tag{9.19}$$

mit einer Inhomogenität $I(\mathbf{x})$. Eine Greensche Funktion $G(\mathbf{x})$ ist die Lösung der Gleichung

Def.: Greensche Funktion

$$UG(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}) \tag{9.20}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist dann gegeben durch die Faltung

$$\phi_s(\boldsymbol{x}) = G * I = \int G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') I(\boldsymbol{x}') \, d^3 \boldsymbol{x}' \tag{9.21}$$

Bemerkung 9.3 (Greensche Funktion als Inverse)

Formal kann man G als (Rechts-)Inverse des Differential operators U mit UG = 1 interpretieren. Denn damit ist es möglich die inhomogene Differential gleichung $U\phi = I$ nach ϕ aufzulösen:

$$U\phi = (UG)I = U(GI) \implies \phi = GI$$

Satz 9.2 (Greensche Funktion des Laplace-Operators)

Die Greensche Funktion des Laplace-Operators, das heißt eine Lösung der Gleichung

$$\triangle G(\boldsymbol{x}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}) \tag{9.22}$$

Greensche Funktion ist die gegeben durch für den

Laplace-Operator

Poissongleichung

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + F(\boldsymbol{x}) \tag{9.23}$$

mit einer Funktion $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, welche die Laplace-Gleichung $\Delta F(\mathbf{x}) = 0$ löst.

Formale Lösung der Die Poissongleichung $\Delta \phi = -4\pi \rho$ wird also gelöst durch

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') (-4\pi \varrho(\boldsymbol{x}')) d^3 \boldsymbol{x}' = \int \frac{\varrho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 \boldsymbol{x}' + \phi_h(\boldsymbol{x})$$

mit einer Lösung ϕ_h der Laplace-Gleichung.

9.5 Spiegelladungen

Nehmen wir an, es befinde sich eine Punktladung bei den Koordinaten $(0, 0, a) := \mathbf{x}_0$ über einer (unendlich weit ausgedehnten) geerdeten Metallplatte in der *xy*-Ebene. Wir suchen das Potential im oberen Halbraum ($z \ge 0$).

Dazu müssen wir also die Poisson-Gleichung

$$\Delta V = -4\pi q \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \tag{9.24}$$

lösen, mit den Randbedingungen: (i) V(x, y, z = 0) = 0, (ii) $V \to 0$ für $|\mathbf{x}| \to \infty$.

Wenden wir uns zunächst aber einem anderen Problem zu: Wir denken uns zwei Punktladungen im Abstand 2a mit Ladung +q und -q und benutzen für deren Position die Ortsvektoren x_0 und $-x_0$. Das resultierende Potential ergibt sich zu

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{q}{|\mathbf{x} + \mathbf{x}_0|} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}}$$
(9.25)

Prinzip der Spiegelladung

Bsp.: Spiegelladung und Greensche

Funktion

Man erkennt schon das verblüffende Resultat:

Im Halbraum $z \ge 0$ ist ϕ aus Gl. (9.25) eine Lösung der Poissongleichung $\Delta \phi = -4\pi q \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ mit den Randbedingungen (i) und (ii). Da diese Lösung eindeutig (Eindeutigkeitssatz) ist, haben wir damit gleichzeitig das Problem mit der Metallplatte gelöst: $\phi|_{z>0} \equiv V$.

Bemerkungen 9.4 (Oberflächenladung)

Die Oberflächenladung der Metallplatte ergibt sich zu

$$\xi(x,y) = \frac{E_{\perp}(z=0)}{4\pi} = \left. -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{-qa}{2\pi (x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}$$

- Für q > 0 ist $\xi < 0$ mit einem Betragsmaximum $|\xi|_{max} = \frac{q}{2\pi a^2}$ bei x = y = 0.
- Für $\rho := \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ verhält sich ξ wie $\frac{1}{\rho^3}$.
- Die gesamte induzierte Ladung auf der Platte ist

$$Q_i = \int \xi \, d\sigma = \ldots = -q$$

Beispiel 9.3 (Kontinuierliche Ladungsverteilung, Greensche Funktion)

Sei nun eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(x)$ vor einer geerdeten Metallplatte angebracht. Es ist also die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) = -4\pi\varrho(\boldsymbol{x}) \tag{9.26}$$

über der Platte (z.B. oberer Halbraum $z \ge 0$) zu lösen. Die Greensche Funktion G des Laplace-Operators löst die Gleichung

$$\triangle G(\boldsymbol{x}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x})$$

Laut (9.23) kennen G bis auf eine Funktion F, welche die Laplace-Gleichung erfüllt. Allerdings wissen wir, dass das Potential V einer Punktladung am Ort \boldsymbol{x}_+ vor einer Metallplatte (in der xy-Ebene) die Gleichung $\Delta V = -4\pi q \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ erfüllt:

$$V(x) = q\left(rac{1}{|x - x_+|} - rac{1}{|x - x_-|}
ight)$$

wobei x_{-} den Ort der Spiegelladung von q angebe: $x_{-} = x_{+} - 2(x_{+} \cdot \hat{n})\hat{n}$ (mit dem Normaleneinheitsvektor \hat{n} der Ebene). Die Greensche Funktion hat damit die Form

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{+}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{+}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{+} + 2(\boldsymbol{x}_{+} \cdot \hat{\boldsymbol{n}})\hat{\boldsymbol{n}}|},$$
(9.27)

der zweite Terme löst die Laplace-Gleichung im oberen Halbraum. Über

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_{+}) \varrho(\boldsymbol{x}_{+}) \, d^{3} \boldsymbol{x}_{-}$$

erhält man schließlich das gesuchte Potential.

Teil III

Magnetostatik

Kapitel 10

Allgemeine Formulierung

Definition 10.1 (Magnetostatik).

In der Magnetostatik behandelt man nur zeitlich konstante Felder und keine Ladungen. Die Grundgleichungen der Magnetostatik sind deshalb:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0 \tag{10.1}$$

10.1 Magnetostatisches Feld

Satz 10.1 (Magnetostatisches Feld)

Aus den Grundgleichungen der Magnetostatik und dem Helmholtz-Theorem folgt E = 0 und die Darstellung des magnetostatischen Felds:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 \boldsymbol{x}' = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d^3 \boldsymbol{x}'$$
(10.2)

Beweis: Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus dem Helmholtztheorem und den Grundgleichungen der Magnetostatik. Für die zweite Gleichung berechnen wir:

$$B_i = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \partial_j \int \frac{j_k(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 \boldsymbol{x}' = -\frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \int \frac{j_k(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2} \frac{x_j - x'_j}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 \boldsymbol{x}'$$

Bemerkung 10.1 (Spezialfall: Strom durch einen dünnen Draht)

Die Erfahrung zeigt, dass der Strom I durch einen dünnen Draht konstant ist. Dies lässt sich wie folgt zeigen:

$$I(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - I(\boldsymbol{x}) = \int \boldsymbol{j} \cdot d\sigma = \int \operatorname{div} \boldsymbol{j} \, dV = 0$$

Dabei wurde benutzt, dass laut der Kontinuitätsgleichung in der Magnetostatik $0 = \partial_t \rho + \text{div } \boldsymbol{j} = \text{div } \boldsymbol{j}$ gilt.

Magnetotstatik Grundgleichungen

Def.:

der Magnetostatik

Darstellung des

Felds

magnetostatischen

. ..

Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahts

Somit konnen wir in (10.2) die Ersetzung
$$j(x) dV \rightarrow Idl$$
 durchfuhren:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3}$$
(10.3)

7 77 1

1

• () 17 7

Diese Beziehung ist als Biot-Savart-Gesetz bekannt.

(10.0) 1: 1

Beispiel 10.1 (Gerader stromdurchflossener Draht)

Wir betrachten die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = I \,\delta(x) \,\delta(y) \,\hat{\mathbf{e}}_z$, also einen geraden stromduchflossenen Draht entlang der z-Achse. und wollen das durch den Stromfluss entstehende Magnetfeld \mathbf{B} mit zwei verschiedenen Methoden berechnen:

(i) Symmetrien und Maxwellgleichung

In Zylinderkoordinaten hat das **B**-Feld nur eine Komponente, die φ -Richtung, denn zum einen ist **B** quellenfrei, womit keine Radialkomponente existieren kann und zum anderen ist **B** ein Pseudovektor, weshalb sich dessen Vorzeichen bei Raumspiegelungen nicht ändert, somit also bei Umkehrung der Stromrichtung eine eventuelle z-Komponente des **B**-Felds unverändert bliebe. Damit ergibt sich

$$\frac{4\pi}{c}I = \frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = B_{\varphi}2\pi\rho \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \frac{2I}{\rho c}\hat{\boldsymbol{e}}_{\varphi}$$

(ii) *Biot-Savart-Gesetz*

Genauso können wir direkt das Biot-Savart-Gesetz anwenden:

$$B = \frac{I}{c} \int \frac{dl \times (x - x')}{|x - x'|^3} = \frac{I}{c} \int \frac{dz' \hat{e}_z \times (x - z' \hat{e}_z)}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$
$$= \frac{I}{c} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \int \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} = \frac{I}{c} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{z'}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z'^2}} \Big|_{z' = -\infty}^{\infty} = \frac{2I}{\rho c} \hat{e}_{\varphi}$$

10.2 Magnetostatisches Vektorpotential

Wie wir bereits wissen, kann B, da quellenfrei, durch ein Vektorpotential A mittels $B = \operatorname{rot} A$ dargestellt werden. Oftmals lässt sich dieses Potential leichter bestimmen als das Magnetfeld (z.B. bei Randwertproblemen). Um eine Gleichung für A zu erhalten, schreiben wir die erste Grundgleichung der Magnetostatik um:

$$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} = \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{A}) - \triangle\boldsymbol{A}$$

T3: Elektrodynamik

4

Sie wird gelöst durch

Da A bezüglich der Eichtransformation $A' = A + \operatorname{grad} \chi$ frei geeicht werden kann, ist es immer möglich div A = 0 zu erhalten¹. Wir erhalten also eine Poisson-Gleichung für A: Poisson-Gleichung für das Vektorpotential

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{10.4}$$

Magnetostatisches Vektorpotential

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{j} \tag{10.4}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3 \boldsymbol{x}'$$
(10.5)

¹Mit einem χ , dass die Gleichung $\Delta \chi = -\text{div} \boldsymbol{A}$ erfüllt.

Kapitel 11

Randwertprobleme

Möchte man das Magnetfeld bzw. das H-Feld innerhalb eines Raumgebiets bestimmen, das von einem idealen Magnetikum ausgefüllt ist, dann muss man dort Gl. (5.8) und (5.9) mithilfe von $B = \mu H$ lösen. Ist zusätzlich $j_f = 0$, so vereinfacht sich (5.8)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_f = 0$$

Damit gibt es ein Skalarfeld ϕ_M mit

Magnetisches Skalarpotential

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} \phi_M \tag{11.1}$$

Laplace-Gleichung Um ϕ_M im Raumgebiet zu bestimmen, müssen wir dort die Gleichung für ϕ_M

 $0 = \operatorname{div} \boldsymbol{B} = \mu \operatorname{div} \boldsymbol{H} = -\mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi_M = -\mu \triangle \phi_M \tag{11.2}$

lösen.

Bemerkung 11.1 (Randbedingungen)

An den Grenzflächen müssen die Stetigkeitsbedingungen aus (5.17) und (5.19) eingehalten werden:

 $B_1^{\perp} = B_2^{\perp}, \ \ H_1^{\parallel} = H_2^{\parallel}$

Kapitel 12

Multipolentwicklung

12.1 Vektorpotential und Magnetfeld eines Dipols

Genauso wie in der Elektrostatik kann man auch das Vektorpotential

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \, d^3 \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}$$

mittels

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta'}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta')$$

in Legendrepolynome entwickeln. Wir wollen im Folgenden speziell die ersten beiden Summanden dieser Entwicklung betrachten:

Entwicklung des Vektorpotentials in Legendre-Polynome

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{cr} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^l} \int j(\mathbf{x}') r'^l \mathbf{P}_l(\cos \theta') d^3 x' \\ &= \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3 x' + \frac{1}{cr^2} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') r' \cos \theta' d^3 x' + \dots \\ &= \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3 x' + \frac{x_k}{cr^3} \int x'_k \mathbf{j}(\mathbf{x}') d^3 x' + \dots \end{aligned}$$
(12.1)

Um diese Integrale auszuwerten bzw. umzuschreiben betrachten wir zunächst die Stromdichte \boldsymbol{j} , multipliziert mit zwei Funktionen f und g. \boldsymbol{j} sei räumlich begrenzt, d.h. macht man r nur genügend groß, so kann man eine Kugel mit Radius r um die Stromdichteverteilung legen, sodass durch den Rand dieser Kugel kein Strom fließt. Damit ist

$$\int_{V} \operatorname{div} (fg\boldsymbol{j})(\boldsymbol{x}') \, d^{3}\boldsymbol{x}' = \oint_{\partial V} fg\boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

Weil in der Magnetostatik immer div j = 0 gilt, ergibt sich

$$0 = \int_{V} (f\boldsymbol{j} \cdot \nabla' \boldsymbol{g} + g\boldsymbol{j} \cdot \nabla' \boldsymbol{f}) d^{3}\boldsymbol{x}'$$
(12.2)

Jetzt können wir (12.1) auswerten:

• Um eine Lösung für den ersten Summanden mit (12.2) zu erhalten, setzen wir f = 1und $g = x'_k$:

$$0 = \int_V j_i \,\partial'_i x'_k \,d^3 x' = \int_V j_k \,d^3 x'$$

• Wenn wir $f = x'_m$ und $g = x'_k$ in (12.2) einsetzen, ergibt sich

$$0 = \int_V (x'_m \, j_k + x'_k \, j_m) \, d^3 x'$$

Setzen wir die Ergebnisse ein:

$$A_{i}(\boldsymbol{x}) \approx \frac{x_{k}}{cr^{3}} \int x'_{k} j_{i} d^{3} x' = -\frac{x_{k}}{2cr^{3}} \int (x'_{i} j_{k} - x'_{k} j_{i}) d^{3} x'$$

$$= -\frac{x_{k}}{2cr^{3}} \int (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{kl} \delta_{im}) x'_{l} j_{m} d^{3} x' = -\frac{x_{k}}{2cr^{3}} \int \varepsilon_{ikn} \varepsilon_{lmn} x'_{l} j_{m} d^{3} x'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2cr^{3}} \boldsymbol{x} \times \int \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') d^{3} x' \qquad (12.3)$$

Definition 12.1 (Def.: Magnetisches Dipolmoment).

Das magnetische Dipolmoment wird durch

Magnetisches Dipolmoment

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c} \int \boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \, d^3 \boldsymbol{x}' \tag{12.4}$$

definiert.

Der führende Term in der Multipolentwicklung für das magnetostatische Vektorpotential ist damit gegeben durch

Führender Entwicklungsterm des Vektorpotentials

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{x}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{m} \times \hat{\boldsymbol{n}}}{r^2}$$
(12.5)

Bemerkungen 12.1

- (i) Man beachte die Ähnlichkeit von (12.5) zum Dipolterm des elektrostatischen Felds: $\varphi = \frac{\mathfrak{p} \cdot n}{r^2}$.
- (ii) Da es keine magnetischen Monopole gibt, ist das Verschwinden des Entwicklungsterms mit l = 0 von vornehere
in zu erwarten.
- (iii) Aus (12.5) können wir nun das Magnetfeld eines magnetischen Dipols berechnen:

$$B_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klp} \partial_j m_l \frac{n_p}{r^2} = (\delta_{il} \delta_{jp} - \delta_{ip} \delta_{jl}) m_l \partial_j \frac{n_p}{r^2}$$

Dabei ist

$$\partial_j \frac{n_p}{r^2} = \frac{\delta_{jp} r^3 - 3x_p x_j r}{r^6} = \frac{\delta_{jp} - 3n_p n_j}{r^3}$$

Magnetfeld eines Dipols

$$B(x) = \frac{3(n \cdot m)n - m}{r^3} \quad r \neq 0$$
(12.6)

(iv) Die physikalische Realisierung von magnetischen Dipolen sind zum einen Kreisströme, wobei hier noch weitere Terme in der Multipolentwicklung auftreten (keine reinen Dipole) und zum anderen homogen magnetisierte Kugeln (reine Dipole). Für letztere verschwinden alle weiteren Terme der Entwicklung.

12.2 Spezielle Konfigurationen

12.2.1 Dipolmoment einer ebenen Leiterschleife

Das Dipolmoment einer ebenen stromdurchflossenen Leiterschleife ergibt sich zu

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c} \int \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \, d^3 \boldsymbol{x} = \frac{I}{2c} \int_{\partial \sigma} \boldsymbol{x} \times d\boldsymbol{l} = \frac{I}{c} \boldsymbol{\sigma}$$
(12.7)

Wobei $\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial \sigma} d\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \int_{\partial \sigma} \boldsymbol{x} \times d\boldsymbol{l}.$

12.2.2 Gyromagnetisches Verhältnis

Allgemein gilt

$$oldsymbol{m} = rac{1}{2c} \int oldsymbol{x} imes oldsymbol{v} arrho(oldsymbol{x}) \, d^3 x$$

falls v die Geschwindigkeit der Ladungsträger ist, die durch die Verteilung $\varrho(x)$ beschrieben werden. Wird der Strom durch die Rotation eines starren Körpers verursacht, so kann man annehmen, dass für die Ladungsträgerdichte ϱ und die Massendichte ϱ_m gilt

$$\frac{\varrho}{Q} = \frac{\varrho_m}{M}$$

mit der Gesamtladung Q und Gesamtmasse M. Es ist damit

$$\boldsymbol{m} = rac{1}{2c} rac{Q}{M} \int \boldsymbol{x} imes \boldsymbol{v} \, \varrho_m \, d^3 x$$

Def.: Gyromagnetisches Verhältnis

Für nichtrelativistische Geschwindigkeiten
$$|\boldsymbol{v}| \ll c$$
ist

$$\boldsymbol{m} = g \frac{Q}{2Mc} \boldsymbol{L} \tag{12.8}$$

mit dem Drehimpuls L des Körpers. Im klassischen Fall ist g = 1 und z.B. für Elektronen ist g = 2. g wird gyromagnetisches Verhältnis genannt.

12.2.3 Potentielle Energie einer Stromdichteverteilung im äußeren Magnetfeld

Nehmen wir an, eine lokalisierte Stromverteilung j befindet sich in einem äußeren Magnetfeld B, dann ist die Gesamtkraft auf diese Verteilung gegeben durch

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{c} \int d^3 x \, \varrho \, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Das Magnetfeld soll sich dabei im Gebiet der nichtverschwindenden Stromdichte wenig ändern, sodass es der Näherung

$$B_i(\boldsymbol{x}) \approx B_i(0) + (\partial_n B_i)(0) x_n$$

genügt (Ursprung wird in die Mitte der Stromdichte gelegt). Das ergibt

$$F_m = \frac{1}{c} \int d^3x \,\varepsilon_{klm} \, j_k \left[B_l(0) + (\partial_n B_l)(0) \, x_n \right]$$

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass $\int d^3x \, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = 0$ und $j_k x_n = \frac{1}{2} \varepsilon_{nkp} \, (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{j})_p$, womit

$$F_m = \frac{1}{2c} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{nkp} \left(\partial_n B_l \right)(0) \int d^3 x \left(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{j} \right)_p = \left(\delta_{lp} \delta_{mn} - \delta_{ln} \delta_{mp} \right) \left(\partial_n B_l \right)(0) m_p$$

Wegen div B = 0 verschwindet der zweite Summand:

Wegen $\mathbf{F} = -\text{grad} V$ mit der potentiellen Energie V ist

$$F_m = (\partial_m B_l)(0) m_l = (\partial_m (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}))(0)$$
(12.9)

Potentielle Energie im äußeren Magnetfeld

$$V = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B} \tag{12.10}$$

12.3 Idealer Punktdipol

Wir wollen zunächst die einzelnen Komponenten des Magnetfelds einer lokalisierten Stromdichteverteilung \boldsymbol{j} über ein kugelförmiges Volumen K integrieren, welches die Stromdichteverteilung enthält:

$$\int_{K} B_{i} d^{3}x = \int_{K} \varepsilon_{ijk} \partial_{j} A_{k} d^{3}x = \int_{\partial K} \varepsilon_{ijk} A_{k} d\sigma_{j}$$

$$= \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \int d^{3}x' j_{k}(\mathbf{x}') \int_{\partial K} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\sigma_{j}$$

$$= \frac{R^{2}}{c} \varepsilon_{ijk} \int d^{3}x' j_{k}(\mathbf{x}') \int_{\partial K} \frac{n_{j}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \qquad (12.11)$$

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Wir bedienen uns nun ein weiteres Mal der Entwicklung von $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|$ in Legendre-Polynomen. Außerdem benutzen wir das allgemeine Additionstheorem der komplexen Kugelflächenfunktionen:

$$P_l(\cos\psi) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\vartheta',\varphi') Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$
(12.12)

 $\psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$ ist dabei der Zwischenwinkel von $x(\vartheta, \varphi)$ und $x'(\vartheta', \varphi')$. Somit

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$
(12.13)

Zusätzlich können wir n in Kugelkoordinaten darstellen durch

 $m{n} = \cos arphi \sin artheta \hat{m{e}}_1 + \sin artheta \sin artheta \hat{m{e}}_2 + \cos artheta \hat{m{e}}_3$

Wie man leicht nachprüft, sind die einzelnen Komponenten n_j darstellbar als Linearkombinationen der Kugelflächenfunktionen $Y_{1k}(\vartheta, \varphi)$ mit k = -1, 0, 1. Damit können wir (12.11) weiter vereinfachen:

$$\begin{split} \int_{K} B_{i} d^{3}x &= \frac{R^{2}}{c} \epsilon_{ijk} \int d^{3}x' j_{k}(\boldsymbol{x}') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^{l}}{R^{l+1}} Y_{lm}^{*}(\vartheta', \varphi') \int_{\partial_{k}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) n_{j} d\Omega \\ &= \frac{R^{2}}{c} \epsilon_{ijk} \int d^{3}x' j_{k}(\boldsymbol{x}') \sum_{m=-1}^{1} \frac{4\pi}{3} \frac{r'}{R^{2}} Y_{1m}^{*}(\vartheta', \varphi') \int_{\partial_{k}} Y_{1m}(\vartheta, \varphi) n_{j} d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \int d^{3}x' j_{k}(\boldsymbol{x}') r' \int_{\partial_{K}} P_{1}(\cos \psi) n_{j} d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \int d^{3}x' j_{k}(\boldsymbol{x}') r' \int_{\partial_{K}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}' n_{j} d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} \int d^{3}x' j_{k}(\boldsymbol{x}') r' n_{k}' \int_{\partial_{K}} n_{k} n_{j} d\Omega \end{split}$$

Das innere Integral kann man mithilfe der Darstellung von n_i als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen $Y_{1k}(\vartheta, \varphi)$ (k = -1, 0, 1) und deren Orthonormalität berechnet werden zu

$$\int_{\partial K} n_j \, n_k \, d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{jk}$$

Also ist

Volumenintegral über ein Magnetfeld einer lokaliserten Stromdichteverteilung

$$\int_{K} \boldsymbol{B} \, d^{3}x = \hat{\boldsymbol{e}}_{i} \, \frac{4\pi}{3} \frac{\varepsilon_{ijk}}{c} \int d^{3}x' \, j_{k}(\boldsymbol{x}')x'_{j} = \frac{8\pi}{3} \, \boldsymbol{m}$$
(12.14)

Nach (12.6) ist das Magnetfeld eines Dipols gegeben durch

$$B_i = \frac{m_k}{r^3} (3n_i n_k - \delta_{ik})$$

Die Ausdehnung des Dipols soll nun verschwinden, d.h. wir betrachten einen *idealen Punktdipol.* Wir wollen überprüfen, ob obiger Ausdruck für das Volumenintegral des Magnetfelds auch für diese idealisierte Konfiguration gültig ist. Da das Dipolfeld am Ursprung singulär wird, müssen wir über ein Volumen außerhalb einer kleinen Kugel um den Ursprung integrieren:

$$\int B_i d^3x = \int_{\epsilon}^{R} dr \, r^2 \frac{m_k}{r^3} \int d\Omega \left(3n_i n_k - \delta_{ik}\right) = m_k \ln \frac{R}{\epsilon} \left(4\frac{4\pi}{3}\delta_{ik} - 4\pi\delta_{ik}\right) = 0$$

Widerspruch zu (12.14)

Dieses Ergebnis hängt nicht von der Wahl von
$$\epsilon$$
 ab, weshalb gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int B_i \, d^3 x = 0 \tag{12.15}$$

Dies steht im Widerspruch zu (12.14). Das Problem lässt durch eine Erweiterung des Dipolfelds lösen:

Korrigiertes Dipolfeld

Wechselwirkungsenergie zweier Dipole

$$\boldsymbol{B} = \frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{m}}{r^3} + \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{m}\,\delta(\boldsymbol{x}) \tag{12.16}$$

Bemerkung 12.2 (Wechselwirkungsenergie zweier Dipole)

Mit dieser Korrektur können wir wegen (12.10) die Wechselwirkungsenergie zweier Dipole angeben:

$$V_{12} = V_{21} = -\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{B}_2 = \frac{3(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}_1)(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}_2) - \boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2}{r^3} + \frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2)\,\delta(\boldsymbol{x}) \tag{12.17}$$

Teil IV

Die kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Kapitel 13

Das Relativitätsprinzip

13.1 Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen

Bezugsysteme, in denen freie Teilchen eine konstante Geschwindigkeit besitzen, heißen In-Relativitätsprinzip ertialsysteme. Das *Relativitätsprinzip* besagt: In allen Inertialsystemen herrschen die gleichen Naturgesetze. Das bedeutet, alle Beobachter, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, sind völlig gleichberechtigt. In der klassischen Mechanik werden Wechselwirkungen zwischen Körpern durch Potentiale Ausbreitungsgeschwindigkeit von beschrieben, die von den Ortskoordinaten der beteiligten Körper abhängen. Die resultie-Wechselwirkungen rende Wechselwirkung geschieht innerhalb dieser Beschreibung instantan. In Wirklichkeit gibt es aber eine minimale Zeitdifferenz zwischen der Änderung des Zustands des einen Körpers und der Wirkung auf den anderen Körper. Bezieht man deren räumlichen Abstand mit ein, so kann man eine maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen bestimmen. Aus dem Relativitätsprinzip folgt, dass diese Ausbreitungsgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich groß sein muss. Außerdem stellt sich heraus, dass sie gleich der Lichtgeschwindigkeit $c = 2.998 \cdot 10^8 m/s$ in Vakuum ist. Die Verbindung des Relativitätsprinzips und der Endlichkeit der Ausbreitungsgeschwindig-Relativistische Mechanik keit von Wechselwirkungen wird Einsteinsches Relativitätsprinzip genannt, um es vom Galileischen Relativitätsprinzip (unendlich große Ausbreitungsgeschwindigkeit) zu unterscheiden. Die aus diesem Prinzip resultierende Mechanik, heißt relativistische Mechanik. Eine wichtige Neuerung in dieser Theorie, stellt die Relativität der Zeit dar. In der klassischen Mechanik sind die Ortskoordinaten relative Größen während die Zeitkoordinate absolut ist. In der relativistischen Mechanik sind Ort und Zeit in diesem Sinne äquivalent, d.h. die Angabe einer bestimmten Zeit macht – genauso, wie bei für Ortskoordinaten – erst dann Sinn, wenn sie auf ein bestimmtes Bezugsystem bezogen wird. Dies folgt aus dem (Einsteinschen) Relativitätsprinzip: In einem Inertialsystem, das sich relativ zu einem Beobachter gleichförmig bewegt, werde ein Signal (mit der Geschwindigkeit c) ausgesandt. Nach den üblichen Regeln der Addition von Geschwindigkeiten würde der Beobachter im ruhenden System eine von c abweichende Signalgeschwindigkeit beobachten. Das Relativitätsprinzip kann also nur eingehalten werden, falls Zeit nicht absolut ist, sondern immer auf ein bestimmtes Inertialsystem bezogen wird.

13.2 Abstände

Betrachten wir zwei Ereignisse A und B in einem Inertialsystem I. Diese werden charakterisiert durch die räumlichen Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 und den verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 . Sind die Ereignisse das Aussenden und Empfangen eines Signals mit Lichtgeschwindigkeit, so ist der Abstand zwischen den Ereignissen gleich $c(t_2 - t_1)$. Wir erhalten in diesem Fall also

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

Beschreiben wir dieselben Ereignisse in einem anderen Inertialsystem¹ I'. Die Koordinaten der Ereignisse seien x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 und x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 . Auch in I' gilt die Gleichung

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0$$

Definition 13.1 (Abstand).

Seien x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 die Koordinaten zweier beliebiger Ereignisse, so wird die Größe

$$s_{12}^2 := c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$
(13.1)

als Abstand dieser Ereignisse (innerhalb einer fiktiven flachen vierdimensionalen Raumzeit mit Koordinatenachsen ct, x_1, x_2, x_3) bezeichnet. Sind die Ereignisse infinitesimal nahe beieinander, so ist der Abstand ds gegeben durch

$$ds^{2} := c^{2}dt^{2} - dx^{2} - dy^{2} - dz^{2}$$
(13.2)

Damit wird i.A. eine Metrik definiert, die sog. Minkowski-Metrik.

Invarianz der Abstände

Wie wir oben bereits gesehen haben, ist ds = 0 unabhängig vom gewählten Inertialsystem (Konsequenz der konstanten Lichtgeschwindigkeit). Wir wollen untersuchen, ob es im allgemeinen Fall ($ds \neq 0$) eine ähnliche Invarianz unter Koordinatentransformation in andere Inertialsysteme gibt.

T3: Elektrodynamik

Ereignisse mit verschwindendem Abstand

Def.: Abstand

 $^{^{1}}$ Dass verschiedene Inertialsysteme im Allgemeinen relativ zueinander in gleichförmiger Bewegung sind, wird im Folgenden nicht mehr explizit erwähnt.

Allgemein muss gelten

$$ds^2 = ads'^2$$

mit einer Konstanten a, denn ds^2 und ds'^2 sind von der gleichen Größenordnung. Diese Konstante kann nur vom Betrag der Relativgeschwindigkeit zwischen I und I' abhängen und nicht von den Koordinaten der Inertialsysteme, da deren Koordinatenursprünge beliebig gewählt werden können (Homogenität der Raumzeit) und die Richtung der Relativgeschwindigkeit ebenso keinen Einfluss auf die Abstände haben darf (Isotropie des Raums). Seien nun drei verschiedene Inertialsysteme I, I_1, I_2 gegeben. v_1 und v_2 seien die Geschwindigkeiten von I_1 und I_2 relativ zu I, v_{12} sei die Relativgeschwindigkeit zwischen I_1 und I_2 . Dann gilt

$$ds^2 = a(v_1)ds_1^2$$
, $ds^2 = a(v_2)ds_2^2$, $ds_1^2 = a(v_{12})ds_2^2$

Und daraus erhalten wir die Relation

$$a(v_{12}) = \frac{a(v_2)}{a(v_1)} \tag{13.3}$$

Der Betrag v_{12} ist eine Funktion von v_1 , v_2 und des Winkels zwischen v_1 und v_2 . Die rechte Seite von Gl. (13.3) ist aber unabhänging von diesem Winkel. Damit kann die Gleichung nur stimmen, wenn a auch unabhängig von den Relativgeschwindigkeiten ist, also für alle Inertialsysteme denselben Wert annimmt. Aus Gl. (13.3) folgt dann, dass a = 1 sein muss:

Satz 13.1 (Gleiche Abstände)

Der Abstand zweier Ereignisse ist unabhängig vom Inertialsystem:

$$ds^2 = ds'^2 \quad \text{bzw.} \quad s^2 = s'^2 \tag{13.4}$$

Bemerkung 13.1

Invarianz der Abstände

> Der Abstand zweier Ereignisse kann raumartig $(s^2 < 0)$, zeitartig $(s^2 > 0)$ oder lichtartig $(s^2 = 0)$ sein, je nachdem, wie sich $c^2 dt^2$ und $dx^2 + dy^2 + dz^2$ zueinander verhalten. Zwei Ereignisse, deren Abstand raumartig ist, können sich demnach nicht beeinflussen (in der klassischen Physik nur bei gleichzeitigen Ereignissen möglich), da die maximale Geschwindigkeit der Wirkung des einen Ereignisses nicht ausreicht um die räumliche Distanz vor dem Eintreten des anderen Ereignisses zu überwinden.

Diese Eigenschaft der Ereignisse ist nach Satz 13.1 unabhängig vom Bezugsystem.

13.3 Eigenzeit

Betrachten wir ein Inertialsystem I, in dem mehrere Uhren beliebige Bewegungen ausführen. Wir können damit jeder Uhr ein eigenes Bezugsystem zuordnen, in dem die jeweilige Uhr die *Eigenzeit* des Systems angibt. Für einzelne Zeitpunkte können die Bezugsysteme als Inertialsysteme aufgefasst werden. Während der Zeit dt, die eine in I ruhende Uhr misst, bewegt sich eine spezielle Uhr um $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ während sie selbst die Zeit dt' misst und im eigenen Bezugsystem ruht: dx' = dy' = dz' = 0. Da es sich um dieselben Ereignisse handelt, unterscheiden sich die Abstände ds und ds' nicht:

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2$$

Dabei gibt $(dx^2 + dy^2 + dz^2)/dt^2 = v^2$ die Relativgeschwindigkeit zwischen der bewegten Uhr und I an. Die infinitesimale Eigenzeit $d\tau$ des bewegten Systems ist somit gegeben durch

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \, dt \tag{13.5}$$

Für eine Zeitspanne $t_2 - t_1$ im ruhenden System, erhält man die Zeitdifferenz $t'_2 - t'_1$ im bewegten System dann mittels Integration

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt \,\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{13.6}$$

Als direkte Folge aus obigen Ausdrücken ergibt sich, dass die Eigenzeit eines bewegten Objekts immer geringer ist als die Zeit im ruhenden System. D.h. in bewegten Systemen vergeht die Zeit langsamer.

Bemerkung 13.2 (Scheinbares Paradoxon)

Mit der Erklärung für das sogenannte Zwillingsparadoxon kann man sich die Konsistenz obiger Überlegungen klar machen: Bewegt man eine Uhr relativ zu einer anderen, wobei beide am Startpunkt dieselbe Zeit zeigen sollen, und führt die bewegte Uhr wieder zurück zu diesem Ausgangspunkt, so wird auf dieser Uhr weniger Zeit vergangen sein, als auf der ruhenden Uhr. Nun könnte man meinen, es sei paradox, dass am Ende eine Zeit tatsächlich langsamer als die andere vergangen ist, da man diese Situation genauso gut aus der Sicht der bewegten Uhr betrachten könne, für die dann die andere Uhr bewegt würde und somit auf dieser die Zeit langsamer zu vergehen habe. Doch diese Überlegung ist in diesem speziellen Fall nicht korrekt, da aufgrund der Rückkehr der bewegten Uhr diese nicht mehr innerhalb eines Inertialsystems ruht und somit das Relativitätsprinzip nicht gilt.

Bemerkung 13.3

Die Eigenzeit eins Objekts ist gegeben durch

$$\Delta t' = \int_{A}^{B} \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \frac{1}{c} \int_{A}^{B} ds$$

Dabei wird entlang dessen Weltlinie² integriert. Für die Eigenzeit eines ruhenden Körpers integriert man somit über eine Gerade parallel zur Zeitachse. Die Eigenzeit eines Körpers, der eine Bewegung entlang einer geschlossenen Kurve ausführt, resultiert also aus der Integration über eine gekrümmte Weltlinie, welche die Weltlinie des ruhenden Körpers in den Punkten A und B schneidet. Da nun die Eigenzeit des ruhenden Körpers länger ist als die des bewegten, nimmt das Integral

$$\int_{A}^{B} ds \tag{13.7}$$

für gerade Weltlinien den maximalen Wert an. Dies ist eine Eigenschaft, die mit dem pseudoeuklidischen Charakter der vierdimensionalen Raumzeit verknüpft ist.

T3: Elektrodynamik

Eigenzeit

In bewegten

Systemen vergeht

die Zeit langsamer

 $^{^2 \}mathrm{Entsprechend}$ den dreidimensionalen Trajektorien spricht man in der vierdimensionalen Raumzeit von Weltlinien.

13.4 Die Lorentz-Transformation

Wir suchen nun eine Transformation von einem Inertialsystem I in eine anderes Inertialsystem I', d.h. wir suchen einen Ausdruck, der es erlaubt aus den bekannten Koordinaten x, y, z, t die Koordinaten x', y', z', t' zu berechnen.

Bedingung an die Transformation

Lorentz-Transformation Da der Abstand *ds* unabhängig vom gewählten Inertialsystem den gleichen Wert behält, wird diese Invarianz als Bedingung dienen, die von der gesuchten Transformation erfüllt werden muss. Die einzigen abstandserhaltenden Transformationen sind einfache Translationen und Rotationen. Da wir nicht nur die Ursprünge unserer Koordinatenachsen verschieben, sondern vor allem in bewegte Systeme transformieren möchten, benötigen wir Rotationen³.

In der vierdimensionalen Raumzeit gibt es sechs Freiheitsgrade für Rotationen (in der xy-, yz-, zx-, tx-, ty- und tz-Ebene). Betrachten wir den einfachsten Fall einer Relativbewegung von I' entlang der x- bzw. x'-Achse, so bleiben die anderen räumlichen Koordinaten unbeeinflusst:

$$y = y', \quad z = z' \tag{13.8}$$

Damit bleibt nur eine Rotation⁴ in der tx-Ebene um den Winkel α als mögliche Transformation:

$$x = x' \cosh \alpha + ct' \sinh \alpha , \quad ct = x' \sinh \alpha + ct' \cosh \alpha$$
(13.9)

Mit dieser Transformation ist die Bedingung $c^2 dt^2 - x^2 = ds^2 = ds'^2 = c^2 dt^2 - x'^2$ erfüllt. Betrachten wir nur die Transformation des Ursprungs von I', d.h. x' = 0, so erhalten wir

$$x = ct' \sinh \alpha$$
, $ct = ct' \cosh \alpha$ \Leftrightarrow $\tanh \alpha = \frac{x}{ct}$

Dabei ist x/t =: v gerade die Relativgeschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen. Durch ein wenig Umformen ergibt sich

$$\sinh \alpha = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad \cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Durch Einsetzen in Gl. (13.9) erhalten wir schließlich die Lorentz-Transformation

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(13.10)

Bemerkungen 13.4

(i) Die inverse Lorentz-Transformation erhält man durch einfaches Ersetzen von v durch -v, da man die Situation genauso aus dem Inertialsytem I' betrachten kann, wobei sich I relativ zu I' mit -v bewegt.

 $^{^{3}}$ Aufgrund der vier Dimensionen, in denen wir uns hier befinden, sind diese Rotationen mehr als gewöhnliche Drehungen im Raum, sondern beziehen mittels der Zeitkoordinate auch Relativbewegungen mit ein.

 $^{^4}$ Diese Rotationen unterscheidet sich von den üblichen dreidimensionalen durch den Einsatz von Hyperbelfunktionen anstelle von trigonometrischen. Dieser Unterschied ist eine weitere Konsequenz der pseudoeuklidischen Geometrie der Raumzeit.

Galilei-Transformation als Grenzfall (ii) Für $c \to \infty$ geht die Lorentz-Transformation in die klassische *Galilei-Transformation* über:

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', t = t'$$

- (iii) In der Lorentz-Transformation äußert sich auch die Endlichkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wechselwirkungen, denn für v > c werden die transformierten Koordinaten imaginär. Ebenso kann v niemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen, da sonst der Nenner verschwindet.
- (iv) Anders als die Galilei-Transformation ist die Lorentz-Transformation nicht kommutativ. Dies lässt sich leicht einsehen, da Rotationen prinzipiell nicht kommutativ sind, vorausgesetzt sie werden nicht um dieselbe Achse ausgeführt.

13.5 Eigenlänge

Die Länge eines Objekts l_0 in dessen Ruhesystem wird *Eigenlänge* genannt. Sei ein Objekt relativ zu einem bewegten Inertialsystem I' in Ruhe und misst man dessen Länge (Ausdehnung entlang der Bewegungsrichtung) in I', so wird diese nicht seiner Eigenlänge entsprechen.

I' bewege sich nun entlang der x- bzw. x'-Achse. Die Endpunkte des Objekts seien in seinem Ruhesystem I gegeben durch x_1 und x_2 , in I' durch x'_1 und x'_2 . Nach der Lorentz-Transformation gilt

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Sei *l* die Länge des Objekts in *I'*, dann ist wegen $l_0 = \Delta x$:

Eigenlänge

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{13.12}$$

Somit ist die Länge eines Objekts in einem relativ dazu bewegten System immer kleiner als seine Eigenlänge. Diese Tatsache bezeichnet man auch als Lorentz-Kontraktion.

13.6 Transformation von Geschwindigkeiten

Bewege sich wieder I' relativ zu I mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung. Wir suchen nun einen Ausdruck, um die Geschwindigkeit v eines Teilchens in I mit der Geschwindigkeit v' des selben Teilchens in I' zu verknüpfen. Es ist

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

T3: Elektrodynamik

(13.11)

Transformation von Damit erhalten wir Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\mathbf{v}_{x}' + v}{1 + \frac{v}{c^{2}}\mathbf{v}_{x}'}, \quad \mathbf{v}_{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\mathbf{v}_{y}'\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}{1 + \frac{v}{c^{2}}\mathbf{v}_{x}'}, \quad \mathbf{v}_{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{\mathbf{v}_{z}'\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}}{1 + \frac{v}{c^{2}}\mathbf{v}_{x}'}$$
(13.13)

Kapitel 14

Vierervektoren und Tensoren

14.1 Vierervektoren

Definition 14.1 (Orts-Vierervektor).

Einem Ereignis in der vierdimensionalen Raumzeit mit den Koordinaten ct, x, y, z können wir einen sog. Orts-Vierervektor zuordnen:

$$x^{\mu} = (x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3}) \equiv (ct, x, y, z)$$
(14.1)

Definition 14.2 (Vierervektor).

Def.: Vierervektor

Orts-Vierervektor

Def.:

Allgemein nennt man jedes Element $A^{\mu} = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ der vierdimensionalen Raumzeit einen Vierervektor, wenn seine Komponenten unter einem Wechsel des Bezugsystems wie der Orts-Vierervektor transformieren:

$$A^{0} = \gamma \left(A^{\prime 0} + \frac{v}{c} A^{\prime 1} \right), \quad A^{1} = \gamma \left(A^{\prime 1} + \frac{v}{c} A^{\prime 0} \right), \quad A^{2} = A^{\prime 2}, \quad A^{3} = A^{\prime 3}$$
(14.2)

mit $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. Das Quadrat der Länge eines Vierervektors ist – analog zur Länge des Orts-Vierervektors – gegeben durch

$$||A||^{2} = (A^{0})^{2} - (A^{1})^{2} - (A^{2})^{2} - (A^{3})^{2}$$
(14.3)

Analog zu den Bezeichungen für Abstände nennt man einen Vierervektor A^{μ} mit ||A|| < 0raumartig, ||A|| > 0 zeitartig und ||A|| = 0 Nullvektor.

14.1.1 Ko- und kontravariante Vektoren

Die Vierervektoren¹ A^{μ} sind Elemente des vierdimensionalen Vektorraums V. Sie werden als kontravariante Vektoren bezeichnet. Die Elemente des zu V dualen Raums V^{*} (Menge aller linearen Abbildungen von V nach \mathbb{R}) heißen kovariante Vektoren und werden mit einem tiefgestellten Index bezeichnet: B_{μ} . So wird über

$$B_{\mu}A^{\mu} = B_0A^0 + B_1A^1 + B_2A^2 + B_3A^3 \tag{14.4}$$

ein inneres Produkt (ein Pseudo-Skalarprodukt) definiert, also eine Abbildung von $V \to \mathbb{R}$.

Weisen wir dem kovarianten Vektor A_{ν} die lineare Abbildung zu, die als Wert das Quadrat der Länge eines Vierervektors A^{ν} liefert, so können wir wegen

$$A_{\mu}A^{\mu} = A_0A^0 + A_1A^1 + A_2A^2 + A_3A^3$$

in der hier betrachteten vierdimensionalen Raumzeit (mit Minkowski-Metrik) die Identitäten

Ko- und kontravariante Vektoren im Minkowski-Raum

Inneres Produkt

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3,$$
 (14.5)

festlegen, denn damit entspricht $A_{\mu}A^{\mu}$ dem Ausdruck aus Gl. (14.3).

14.1.2 Vierergeschwindigkeit

Man definiert die Vierergeschwindigkeit durch

Vierer-

$$u^{\nu} := \frac{dx^{\nu}}{ds} \tag{14.6}$$

mit $ds = \sqrt{c dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Damit ergibt sich

$$u^{\nu} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\boldsymbol{v}/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \gamma \left(1, \boldsymbol{v}/c\right)$$
(14.7)

Bemerkung 14.1

- Es ist $u_{\mu}u^{\mu} = dx_{\mu}dx^{\mu}/ds^2 = 1$. Damit ist die Vierergeschwindigkeit der Tangenteneinheitsvektor an die Weltlinie.
- Genauso kann man die Viererbeschleunigung einführen: $w^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{dds}$.

 $^{^{1}}$ Man benutzt meist griechische Indizes, wenn die Werte 0, 1, 2, 3 eingesetzt werden und lateinische, falls man sich auf den Raum-Anteil beschränkt.

14.2 Tensoren höheren Ranges

Ko- und kontravariante Tensoren Auch für Tensoren höheren Ranges führt man die Begriffe ko- und kontravariant zur Bezeichnung von $A_{\nu\mu}$ und $A^{\nu\mu}$ ein. Nun gibt es aber auch die Möglichkeit gemischter Indizes A_{μ}^{ν} . Innerhalb des Minkowski-Raums gilt dieselbe Regel, wie für ko- und kontravariante Vektoren: Das Heben oder Senken eines Ortsindex verändert das Vorzeichen, während der Zeitindex dieses nicht beeinflusst.

Bemerkung 14.2 (Symmetrische und antisymmetrische Tensoren)

Ein Tensor heißt symmetrisch, wenn er invariant unter Vertauschung der Indizes ist: $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, antisymmetrisch, wenn $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ ist. Symmetrische Vierertensoren zweiten Ranges besitzen zehn unabhängige Einträge. Da die Diagonalelemente eines antisymmetrischen Tensors verschwinden müssen, besitzen diese Vierertensoren nur sechs unabhängige Einträge.

Da für symmetrische Tensoren $A_{\mu}^{\ \nu} = A^{\nu}_{\ \mu}$, schreiben wir A^{ν}_{μ} .

14.2.1 Metrischer Tensor des Minkowski-Raums

Metriktensor desDurch Senken des einen oder Heben des anderen Index im (vierdimensionalen) Kronecker-
Delta δ^{ν}_{μ} erhält man den kovarianten (bzw. kontravarianten) Metriktensor $\eta_{\mu\nu}$ (bzw. $\eta^{\mu\nu}$)
des Minkowski-Raums:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
(14.8)

Das innere Produkt $x_{\mu}y^{\mu}$ kann damit als Wirkung des Metriktensors $\eta_{\mu\nu}$ aufgefasst werden:

$$\eta_{\mu\nu}x^{\nu}y^{\mu} = x_{\mu}y^{\mu} \tag{14.9}$$

Verbindung zur Metrik

Die Länge eines Vierervektors
$$x^{\nu}$$
 wird dann verallgemeinert zu

$$\eta_{\nu\mu}x^{\mu}x^{\nu} = x_{\nu}x^{\nu} \tag{14.10}$$

Diese Beziehung zeigt die Verbindung des metrischen Tensors $\eta_{\mu\nu}$ zur Metrik des Minkowskiraums, also zur Vorschrift der Längenbestimmung. $\eta_{\mu\nu}$ ist damit nur ein Spezialfall eines metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$, der i.A. zur Längenmessung bezüglich der jeweiligen Metrik des Raums eingesetzt wird.

Bemerkung 14.3 (Heben und Senken von Indizes)

Von der Eigenschaft des Senkens von Indizes $\eta_{\mu\nu}x^{\nu} = x_{\mu}$ des metrischen Tensors $\eta_{\mu\nu}$ wird gerne gebrauch gemacht. Der metrische Tensor transportiert einen Vierervektor damit sozusagen in den Dualraum (bzw. führt einen Basenwechsel durch). Genauso gilt $\eta^{\mu\nu}x_{\nu} = x^{\mu}$

14.2.2 Lorentz-Gruppe

Eine Lorentz-Transformation – wie der *Boost in x-Richtung* aus (13.10) – kann in einen Tensor geschrieben werden:

$$A^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0\\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(14.11)

Definition 14.3 (Lorentz-Tensoren).

Tensoren, die über

Def.:

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x') = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \cdots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n} T^{\nu_1 \cdots \nu_n}(x)$$
(14.12)

in andere Inertialsysteme transformiert werden können, werden Lorentz-Tensoren genannt².

Beispiel 14.1 (Lorentz-Skalare und -Vektoren)

Lorentz-Skalare sind invariant unter Lorentz-Transformationen (kovariant). Die Transformation von Lorentz-Vektoren (Vierervektoren) erfolgt hingegen durch

$$x^{\prime\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} \tag{14.13}$$

Definition 14.4 (Lorentzgruppe).

Als Lorentz-Gruppe bezeichnet man die Menge aller linearen Automorphismen (bijektive lineare Abbildungen, die den Raum auf sich selbst abbilden) des Minkowskiraums, die das innere Produkt (Pseudoskalarprodukt) erhalten. Dies sind die bereits eingeführten Lorentz-Transformationen.

Aus der Bedingung der Abstandserhaltung, können wir eine Tensorbeziehung für die Elemente $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ der Lorentzgruppe ableiten:

$$x'_{\nu}x'^{\nu} = \Lambda^{\lambda}_{\nu}\Lambda^{\nu}_{\gamma}x_{\lambda}x^{\gamma} \stackrel{!}{=} x_{\lambda}x^{\lambda}$$

Es ergibt sich damit zunächst

$$A_{\nu}^{\ \lambda}A_{\ \gamma}^{\nu} = \delta_{\gamma}^{\lambda} \tag{14.14}$$

Weil allgemein $\Lambda_{\nu}^{\ \lambda} = \eta_{\nu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\ \beta} \eta^{\lambda\beta}$ gilt, finden wir

$$\delta^{\lambda}_{\gamma} = \eta_{\nu\alpha}\eta^{\lambda\beta}\Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\Lambda^{\nu}_{\ \gamma} = \eta^{\lambda\beta}\Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\eta_{\alpha\nu}\Lambda^{\nu}_{\ \gamma} = \eta^{\lambda\beta}(\Lambda^{T})^{\alpha}_{\beta}\eta_{\alpha\nu}\Lambda^{\nu}_{\ \gamma} = (\eta\Lambda^{T}\eta\Lambda)^{\lambda}_{\ \gamma}$$

Definierende Gleichung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{14.15}$$

Def.: Lorentz-Gruppe

 $^{^2}$ Steht auf der rechten Seite der Faktor det $\Lambda,$ so definiert die Transformation einen Pseudotensor.

14.2.3Levi-Civita-Symbol

Das

Das Levi-Civita-Symbol $\varepsilon^{\mu\nu\varrho\lambda}$ (auch total antisymmetrischer Tensor) in vier Dimensionen ist ein (Pseudo-)Tensor vierten Rangs. Es hat die Eigenschaft unter Vertauschung beliebiger Levi-Civita-Symbol Indizes das Vorzeichen zu wechseln. Daraus resultiert, dass alle Einträge mit zwei gleichen Indizes verschwinden. Legt man $\varepsilon^{0123} = 1$ fest, so besteht das Levi-Civita-Symbol nur aus den Einträgen 0, +1, -1. Jeder Eintrag der aus einer ungeraden Permutation von Indizes des Elements ε^{0123} entsteht, hat damit den Wert -1.

Definition 14.5 (Duale Vektoren und Tensoren).

Sei A^{ij} ein antisymmetrischer Tensor, dann wird Duale Tensoren

$$A^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\lambda} A_{\varrho\lambda} \tag{14.16}$$

der zu A^{ij} duale (Pseudo-)Tensor genannt. Ebenso ist $\varepsilon^{ijkl}A_l$ zum Vierervektor A^i dual.

Beispiel 14.2 (Kreuzprodukt)

Das (dreidimensionale) Kreuzprodukt $a \times b = c$ kann als dualer Vektor zum antisymmetrischen Tensor $c_{\beta\gamma} := a_{\beta}b_{\gamma} - a_{\gamma}b_{\beta}$ aufgefasst werden:

$$c_{\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} c_{\beta\gamma} \tag{14.17}$$

Differentiation und Integration 14.3

14.3.1Partielle Ableitung

Partielle Ableitung als kovariante Komponente

Das totale Differential $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i$ eines Skalarfelds kann als inneres Produkt des Vierer-Gradienten $(\frac{1}{c}\partial_t\phi, \nabla\phi)$ mit dem infinitesimalen Vierervektor dx^{μ} verstanden werden, womit $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu}$ als kovariante Vektorkomponente aufgefasst wird. Damit kann beispielsweise die (Vierer-)Divergenz $\partial_i A^i$ in üblicher Weise notiert werden.

Satz 14.1 (Transformationsverhalten von ∂_{μ})

 ∂_{μ} transformiert wie ein kovarianter Vierervektor:

$$\partial'_{\mu} = \Lambda^{\ \nu}_{\mu} \partial_{\nu} \tag{14.18}$$

Beweis: Es ist $\partial'_{\mu} = \frac{\partial x^{\varrho}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\varrho}$. Wir benötigen also die Rücktransformation von x'^{μ} in x^{ϱ} :

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

14.3.2 Flächenelemente

Im Dreidimensionalen ist der Flächeninhalt eines infinitesimalen Parallelogramms, das von $d\mathbf{r}$ und $d\mathbf{r}'$ aufgespannt wird, gegeben durch $|d\mathbf{r} \times d\mathbf{r}'|$. Die Projektion dieses Flächenstücks auf eine Koordinatenebene $x_{\alpha}x_{\beta}$ hat damit den Inhalt³ $dx_{\alpha}dx'_{\beta} - dx'_{\alpha}dx_{\beta} =: df_{\alpha\beta}$. Zur Charakterisierung eines solchen Flächenstücks benutzt man aber den Flächennormalenvektor

$$df_{\gamma} = dx_{\alpha} dx_{\beta}' \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} df_{\alpha\beta}$$
(14.19)

 df_{γ} ist damit der zu $df_{\alpha\beta}$ duale Tensor. Überträgt man dies auf die vierdimensionale Raumzeit, so kann man den zu $df^{\mu\nu} = dx^{\mu}dx'^{\nu} - dx'^{\mu}dx^{\nu}$ dualen Tensor $df^{*\alpha\beta}$ bilden:

$$df^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} df_{\mu\nu} \tag{14.20}$$

Nach einer kurzen Rechnung, stellt man fest, dass $df^{\mu\nu}df^*_{\mu\nu} = 0$ (Orthogonalität) gilt. $df^{*\alpha\beta}$ stellt also eine passende Verallgemeinerung des Flächennormalenvektors df_i dar.

14.3.3 Hyperflächenelemente

In drei Dimensionen gibt das Spatprodukt dreier Vektoren a, b, c das Volumen V des Parallelepipeds an, das von diesen Vektoren aufgespannt wird: $V = a \cdot (b \times c)$. Das Spatprodukt lässt sich über die Determinante der Matrix aus den Komponenten der Vektoren a, b, c berechnen. Damit können wir analog den Inhalt des Hyperflächenelements im vierdimensionalen Raum, das durch $dx^{\mu}, dx'^{\mu}, dx''^{\mu}$ aufgespannt wird, ausdrücken durch den antisymmetrischen Tensor dritten Rangs

$$dS^{\mu\nu\varrho} = \det \begin{pmatrix} dx^{\mu} & dx'^{\mu} & dx''^{\mu} \\ dx^{\nu} & dx'^{\nu} & dx''^{\nu} \\ dx^{\varrho} & dx'^{\varrho} & dx''^{\varrho} \end{pmatrix}$$
(14.21)

Wieder ist es sinnvoller den zu $dS^{\mu\nu\varrho}$ dualen Tensor bzw. Vierervektor $dS^{*\mu}$ zur Charakterisierung des infinitesimalen Hyperflächenelements zu benutzen:

Charakterisierung einer Hyperfläche in vier Dimensionen

Charakterisierung einer (zweidim.) Fläche in vier Dimensionen

$$dS^{\mu} = -\frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\lambda} dS_{\nu\varrho\lambda} \tag{14.22}$$

Dabei dient der Faktor -1/6 dazu, die einfache Beziehung $dS_{\mu\varrho\lambda} = \varepsilon_{\mu\nu\varrho\lambda} dS^{\mu}$ zu erhalten (wegen $\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \varepsilon^{\kappa\nu\varrho\lambda} = -6\delta^{\mu}_{\kappa}$). Mit diesem Ausdruck erhalten wir sofort:

$$dS^{123} = dS^0, \ dS^{023} = dS^1, \ dS^{013} = -dS^2, \ \dots$$

³Allgemeiner erhält man den Inhalt der Projektion dieses Flächenstücks auf eine Oberfläche, die mit den Parametern ϑ und φ parametrisiert wurde, aus der Projektion von $d\mathbf{r} \times d\mathbf{r'}$ auf den Normaleneinheitsvektor $\frac{1}{N} \partial_{\vartheta} \mathbf{x} \times \partial_{\varphi} \mathbf{x}$ der Oberfläche (mit Normierungsfaktor N).

Beispiel 14.3

Wählt man die Koordinatenachsen so, dass $dx^i=(0,dx,0,0),\ dx'^i=(0,0,dy,0)$ und $dx''^i=(0,0,0,dz),$ so ist

$$S^0 = S^{123} = dx \, dy \, dz$$

14.3.4 Volumenelement

les Das infinitesimale Volumenelement der vierdimensionalen Raumzeit ist gegeben durch

$$d\Omega = cdt \, dx \, dy \, dz \tag{14.23}$$

14.3.5 Integralsätze

(i) Das Volumenintegral der Viererdivergenz entspricht dem Fluss des Vierervektors A^{μ} durch die Hyperfläche dS^i :

$$\oint A^{\mu} dS_{\mu} = \int \partial_{\mu} A^{\mu} d\Omega \tag{14.24}$$

 (ii) Auch zwischen der Integration über eine (zweidim.) Fläche und die von ihr eingeschlossene Hyperfläche gibt es einen Zusammenhang:

$$\int A^{\mu\nu} df^*_{\mu\nu} = \int \left(dS_\mu \,\partial_\nu A^{\mu\nu} - dS_\nu \,\partial_\mu A^{\mu\nu} \right) \tag{14.25}$$

 (iii) Ein Kurvenintegral entlang einer geschlossenen vierdimensionalen Kurve kann in ein Flussintegral der von ihr eingeschlossenen Fläche transformiert werden:

$$\oint A_{\mu}dx^{\mu} = \int \partial_{\nu}A^{\mu} df^{\mu\nu}$$
(14.26)

Vierdimensionales Volumenelement

Verallgemeinerung und Ergänzung der

dreidimensionalen

Integralsätze

Kapitel 15

Relativistische Mechanik

15.1 Lagrangefunktion eines relativistischen Teilchens

Ein klassisches freies Teilchen lässt sich durch seine Lagrangefunktion $L_k = \frac{mv^2}{2}$ beschreiben. Um die entsprechende relativistische Lagrangefunktion zu erhalten, die für $c \to \infty$ in L_k übergeht, gehen wir von der Wirkung

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L \, dt$$

Bedingung an die relativistische Wirkung aus. Die einzige Bedingung, die S erfüllen muss, ist die Invarianz unter Lorentztransformationen¹, da aufgrund des Relativitätsprinzips die physikalische Wirkung unabhänging vom Inertialsystem ist. Da die Wirkung eines Teilchens die Bewegung entlang dessen Trajektorie erfassen sollte, muss die Integration entlang einer Weltlinie über eine skalare Größe erster Ordnung erfolgen. Die einzige Möglichkeit auch die Kovarianz zu erfüllen bietet der Abstand ds:

$$S \propto \int_{A}^{B} ds$$

Wie aus Bemerkung 13.3 hervorgeht, ist $\int ds$ entlang einer geraden Weltlinie (ruhendes Teilchen) maximal, während für gekrümmte Kurven beliebig kleine Werte angenommen werden können. Da wir außerdem entsprechend dem Hamiltonschen Variationsprinzip minimale Wirkungen suchen, setzen wir für die Proportionalitätskonstante $-\alpha$ ein.

$$S = -\alpha \int_{A}^{B} ds = -\alpha c \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \tag{15.1}$$

 $^{^1\}mathrm{Die}$ Eigenschaft einer Größe oder Gleichung, invariant unter Lorentztransformationen zu sein, wird Kovarianz genannt.

Relativistische Lagrangefunktion eines freien Teilchens

S

Um
$$\alpha$$
 zu bestimmen, sehen wir uns den klassischen Grenzfall an, für den L in L_k übergehen
sollte. Wegen $\sqrt{1-x^2} \approx 1-\frac{1}{2}x^2$ für $x \ll 1$ ist $L \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$ für $v/c \ll 1$. Da aber
eine additive Konstante in L keine physikalischen Auswirkungen hat, erhalten wir α aus
 $\frac{\alpha v^2}{2c} \stackrel{!}{=} \frac{mv^2}{2}$, womit $\alpha = mc$. Letztendlich ist

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
(15.2)

Energie und Impuls 15.2

Berechnen wir den Impuls eines freien relativistischen Teilchens:

$$p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v}{c^2} \frac{\dot{x}_{\alpha}}{v} = \frac{m\dot{x}_{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Also Impuls eines freien Teilchens

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}} \tag{15.3}$$

Aus der Lagrangefunktion und dem Impuls erhält man die Gesamtenergie:

$$\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Die relativistische Gesamtenergie ist also gegeben durch

Relativistische Energie

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
(15.4)

Auffallend ist die verbleibende Energie bei v = 0, die sog. Ruheenergie

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 \tag{15.5}$$

Bemerkung 15.1 (Keine Massenerhaltung)

Die Ruheenergie eines Festkörpers $\mathcal{E}_0 = mc^2$ beinhaltet die Gesamtenergie der Teilchen, aus denen er besteht. Da diese i.A. nicht ruhen, besitzen sie eine Energie $\mathcal{E}_i > m_i c^2$. Deshalb ist $\mathcal{E}_0 \neq \sum_i m_i c^2$ und damit $m \neq \sum_i m_i$.
Satz 15.1 (Relativistische Energie-Impuls-Beziehung)

Energie-Impuls-Beziehung

$$\mathcal{E}^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \tag{15.6}$$

Beweis: Durch einfaches Quadrieren von (15.3) und (15.4) und Vergleichen.

Definition 15.1 (Viererimpuls).

Def.: Viererimpuls Den vierdimensionalen Impuls definiert man über

$$p_{\mu} := -\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}, \quad \Rightarrow \quad p^{\mu} = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}) = m\gamma(c, \mathbf{v})$$

$$(15.7)$$

Für p^{μ} können wir ebenso schreiben

$$p^{\mu} = m\gamma \frac{dx^{\mu}}{dt} = m\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$$
(15.8)

Bemerkung 15.2

Die zweite Beziehung in (15.7) erhält man aus den Identitäten

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \int \frac{\partial L}{\partial x} dt = \int \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \int \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x}\right) dt = L - \int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x}\right) dt = L - pv = -\mathcal{E}$$

T3: Elektrodynamik

Relativität und Elektrodynamik

Im Folgenden wollen wir die Grundgleichungen der Elektrodynamik aus allgemeineren Überlegungen ableiten. Ausgangspunkt ist die Wechselwirkung von Ladungen mit dem Feld.

16.1 Bewegungsgleichung einer Ladung im Feld

16.1.1 Viererpotential und Wirkung

Wir können annehmen, dass das Wirkungsintegral eines geladenen Teilchens in einem elektrischen Feld zum Einen aus der Wirkung eines freien Teilchens und zum Anderen aus der Wechselwirkung des Teilchens mit dem Feld besteht. Experimente zeigen, dass die Ladung q die einzige Eigenschaft eines Teilchens ist, über die es mit dem Feld in Wechselwirkung tritt. Die Eigenschaften des Felds kann durch einen zeit- und ortsabhängigen Vierervektor A^{μ} , das Viererpotential, beschrieben werden. Die Wechselwirkung von Feld und Teilchen tritt im Wirkungsfunktional durch den einfachen Term

$$-{q\over c}\int A_\mu\,dx^\mu$$

in Erscheinung. Ist a der Anfangs- und b der Endpunkt der Weltlinie eines Teilchens im - elektromagnetischen Feld, so ist die entsprechende Wirkung also gegeben durch

Wirkung im elektromagnetischen Feld

Wechselwirkungs-

term

$$S = \int_{a}^{b} \left(-mc\,ds - \frac{q}{c}A_{\mu}\,dx^{\mu} \right) \tag{16.2}$$

(16.1)

Bemerkung 16.1 (Zeit- und Ortskomponenten des Viererpotentials)

Die Menge der Ortskomponenten A^1, A^2, A^3 werden im Vektorpotential **A** zusammengefasst, während $A^0 = \phi$ als Skalarpotential bezeichnet wird:

 $A^{\mu} = (\phi, \boldsymbol{A})$

16.1.2 Lagrangefunktion einer Ladung im elektromagnetischen Feld

Mit dem Vektor- und Skalarpotential können wir nun die Wirkung als Integral über die Zeit darstellen:

$$S = \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} - q \phi \right) dt$$

Lagrangefunktion Also ist

eines geladenen Teilchens

eines geladenen Teilchens

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\phi$$
(16.3)

16.1.3 Hamiltonfunktion einer Ladung im elektromagnetischen Feld

Aus der Lagrangefunktion erhält man die Hamiltonfunktion mittels $\mathcal{H} = v \cdot \frac{\partial L}{\partial v} - L$ mit dem verallgemeinerten Impuls

$$\boldsymbol{P} := \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$$
(16.4)

Damit ergibt sich

$$\mathcal{H} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} + mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} + q\,\phi = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\,\phi$$

Die Hamiltonfunktion sollte aber nicht von v, sondern von P abhängen. Dafür können wir wegen $p = P - \frac{q}{c}A$ und $\mathcal{E} = \mathcal{H} - q \phi$ die relativistische Energie-Impuls-Beziehung verwenden:

$$(\mathcal{H} - q\,\phi)^2 = c^2(\boldsymbol{P} - q/c\,\boldsymbol{A})^2 + m^2c^4$$

Hamiltonfunktion Schließlich erhalten wir

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left(\boldsymbol{P} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2} + q\,\phi \tag{16.5}$$

16.1.4 Bewegungsgleichung und das elektromagnetische Feld

Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right) - \frac{q}{c}\operatorname{grad}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right) + q\operatorname{grad}\phi = 0$$
(16.6)

T3: Elektrodynamik

Diese Gleichung lässt sich weiter vereinfachen:

• Wegen $\nabla(a \cdot b) = (a \times \nabla)b + (b \cdot \nabla)a + a \times (\nabla \times b) + b(\nabla \times a)$ (siehe erstes Übungsblatt):

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$$

• Wegen $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ ist

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p}+\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right) = \dot{\boldsymbol{p}} + \frac{q}{c}(\partial_t \boldsymbol{A} + \dot{x}_i \,\partial_i \boldsymbol{A}) = \dot{\boldsymbol{p}} + \frac{q}{c}(\partial_t \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A})$$

Wir finden schließlich die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -q \operatorname{grad} \phi - \frac{q}{c} \partial_t \boldsymbol{A} + \frac{q}{c} \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$$
(16.7)

Die rechte Seite der Gleichung gibt also die Kraft an, mit der das elektromagnetische Feld auf das Teilchen wirkt. Sie besteht aus zwei Teilen: ein geschwindigkeitsunabhängiger Teil und ein Teil, der von der Geschwindigkeit abhängt und immer senkrecht zu dieser steht.

Definition 16.1 (Elektrisches und magnetisches Feld).

Wir definieren an dieser Stelle das elektrische Feld

$$\boldsymbol{E} := -\operatorname{grad} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{A}$$
(16.8)

und das magnetische Feld

$$\boldsymbol{B} := \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{16.9}$$

Sie bilden zusammen das elektromagnetische Feld.

Damit ergibt sich die bekannte Lorentzkraft:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = q \, \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} \right) \tag{16.10}$$

16.1.5 Elektromagnetischer Feldstärketensor

Um die Bewegungsgleichung in vierdimensionaler Schreibweise zu erhalten leiten wir diese nochmals seperat aus dem Hamiltonschen Wirkungsprinzip her¹:

$$\delta S = \delta \int \left[-mc \, ds - \frac{q}{c} A_{\mu} dx^{\mu} \right] = 0$$

T3: Elektrodynamik

Def.: Elektrisches und magnetisches Feld

Bewegungs-

gleichung

¹Dazu benutzen wir die sog. Variationsableitung $\delta f(\cdot) := \partial_{\varepsilon}(\cdot + \eta \varepsilon)$ (η : Variationsfunktion).

$$\delta S = \int \left[-mc \,\delta \sqrt{dx_{\mu} dx^{\mu}} - \frac{q}{c} \delta A_{\mu} dx^{\mu} - \frac{q}{c} A_{\mu} d(\delta x^{\mu}) \right] \\ = \int \left[-mc \frac{dx_{\mu} \,d(\delta x^{\mu})}{ds} - \frac{q}{c} \partial_{\nu} A_{\mu} \delta x^{\nu} \,dx^{\mu} - \frac{q}{c} A_{\mu} d(\delta x^{\mu}) \right] \\ = \int \left(-mc \,u_{\mu} - \frac{q}{c} A_{\mu} \right) d(\delta x^{\mu}) - \int \frac{q}{c} \partial_{\nu} A_{\mu} \delta x^{\nu} \,dx^{\mu}$$

mit $u_{\mu} := dx_{\mu}/ds$. Nun können wir partiell integrieren:

$$\delta S = \left(-mc\,u_{\mu} - \frac{q}{c}A_{\mu}\right)\delta x^{\mu} + \int \left(mc\,du_{\mu}\,\delta x^{\mu} + \frac{q}{c}\,dA_{\mu}\,\delta x^{\mu} - \frac{q}{c}\partial_{\nu}A_{\mu}\,dx^{\mu}\,\delta x^{\nu}\right)$$
$$= \int \left(mc\,\frac{du_{\mu}}{ds}\,ds\,\delta x^{\mu} + \frac{q}{c}\partial_{\nu}A_{\mu}\left[dx^{\nu}\,\delta x^{\mu} - dx^{\mu}\delta x^{\nu}\right]\right)$$

Wegen $dx^{\nu} = u\nu ds$ und mit einer Vertauschung von Summationsindizes erhalten wir

$$\delta S = \int \left[mc \frac{du_{\mu}}{ds} + \frac{q}{c} \partial_{\nu} A_{\mu} u^{\nu} - \frac{q}{c} \partial_{\mu} A_{\nu} u^{\nu} \right] \delta x^{\mu} ds = 0$$

Die Bewegungsgleichung lautet damit

$$mc \frac{du_{\mu}}{ds} = \frac{q}{c} u^{\nu} \left(\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \right)$$

Definition 16.2 (Feldstärketensor).

Def.:Die Eigenschaften des elektromagnetischen Felds lassen sich im elektromagnetischen Feldstärke-
tensorFeldstärketensortensor

$$F^{\mu\nu} := \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \tag{16.11}$$

zusammenfassen.

Damit gilt für die Bewegungsgleichung

$$mc\frac{du^{\mu}}{ds} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_{\nu} \tag{16.12}$$

Bemerkungen 16.2

(i) Wegen $F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \partial_t A^i + \partial_i \varphi = -E^i$ und $F^{ij} = -(\partial_i A^j - \partial_j A^i) = -\varepsilon_{ijk} B^k$ kann der Feldstärketensor geschrieben werden als

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$
(16.13)

(ii) Die Matrixdarstellung des zu $F^{\mu\nu}$ dualen Tensors $F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\lambda} F_{\varrho\lambda}$ kann gewonnen werden, indem man in den Einträgen die Ersetzungen $E \to B$ und $B \to -E$ durchführt.

16.2 Ladungserhaltung und Eichinvarianz

Definition 16.3 (Viererstromdichte).

Auch die Strom- und Ladungsdichte des dreidimensionalen Raums kann in einen Vierervektor geschrieben werden:

$$j^{\mu} := \varrho \frac{dx^{\mu}}{dt} = (c \,\varrho, \boldsymbol{j}) \tag{16.14}$$

Satz 16.1

Def.:

Viererstromdichte

Kontinuitäts-

gleichung als Folge

der Eichinvarianz

Die Viererstromdichte ist ein Lorentzvektor (Vierervektor).

Beweis: Wegen $dq = \rho dV$ gilt

$$dq \, dx^{\mu} = \varrho dx^{\mu} dV = \varrho \frac{dx^{\mu}}{dt} \, dV \, dt = j^{\mu} \, d\Omega \qquad \Box$$

Da $d \Omega$ ein Skalar und dx^{μ} ein Lorentzvektor ist, muss j^{μ} ebenfalls ein Lorentzvektor sein.

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir bereits festgestellt, dass die Elektrodynamik eine Eichtheorie ist, d.h. die Grundgleichungen sind invariant unter Eichtransformationen der Potentiale $A^{\mu} \rightarrow A^{\mu} - \partial^{\mu} \chi$. Wir werden gleich sehen, dass diese Eigenschaft zur Ladungsbzw. Stromerhaltung führt, also zur Kontinuitätsgleichung. Der Wechselwirkungsterm der Wirkung aus Gl. (16.1) lässt sich mit der Viererstromdichte j^{μ} schreiben als

$$S_{mf} = -\frac{q}{c} \int A_{\mu} \, dx^{\mu} = -\frac{1}{c} \int A_{\mu} \varrho \, dx^{\mu} \, dV = -\frac{1}{c^2} \int A_{\mu} j^{\mu} d\Omega$$

Unter Eichtransformation erhält man

$$S_{mf}[A_{\mu} - \partial_{\mu}\chi] = S_{mf} + \int (\partial_{\mu}\chi) j^{\mu} d\Omega = S_{mf} + \oint_{\partial\Omega} \chi j^{\mu} dS_{\mu} - \int \chi \partial_{\mu} j^{\mu} d\Omega,$$

was man mit dem verallgemeinerten Satz von Gauß aus Gl. (14.24) sieht. Unter Variation verschwindet das Integral über den Rand des vierdimensionalen Volumens. Die Forderung nach Eichinvarianz verlangt also das verschwinden des letzten Terms, was gleichbedeutend ist mit der *Kontinuitätsgleichung*

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0 \tag{16.15}$$

Satz 16.2 (Kovarianz der Kontinuitätsgleichung)

Die Kontinuitätsgleichung $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$ ist invariant unter Lorentz-Transformationen:

$$\partial'_{\mu}j'^{\mu} = \partial_{\mu}j^{\mu} = 0 \tag{16.16}$$

Beweis: Es gilt

$$\partial'_{\mu}j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\mu}\partial_{\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}j^{\varrho} = \delta^{\rho}_{\rho}\partial_{\nu}j^{\varrho} = \partial_{\nu}j^{\nu} = 0 \qquad \qquad \Box$$

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

16.3 Die Maxwell-Gleichungen

Wir wollen im Folgenden die Maxwell-Gleichungen (2.1) - (2.4) nicht nur in vierdimensionale Notation umschreiben, sondern diese aus den in diesem Kapitel gewonnenen Zusammenhängen herleiten.

16.3.1 Die homogenen Feldgleichungen

Aus der Definition des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ folgt sofort die Gleichung

$$\partial_{\rho}F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{\rho\mu} + \partial_{\mu}F_{\nu\rho} = 0 \tag{16.17}$$

Da diese Summanden durch gerade Permutationen ihrer Indizes auseinander hervorgehen können wir die Gleichung umschreiben zu

$$e^{\lambda\mu\nu\varrho}\,\partial_{\mu}F_{\nu\rho}=0$$

Dabei wird deutlich, dass es sich hierbei um vier unabhängige Gleichungen handelt. Die linke Seite entspricht bis auf einen konstanten Faktor gerade einer Ableitung des dualen Feldstärketensor $F^{*\lambda\mu}$, womit wir schließlich eine sehr kompakte Form der homogenen Maxwell-Gleichungen gefunden haben:

 $\partial_{\mu}F^{*\lambda\mu} = 0 \qquad (16.18)$

Bemerkung 16.3

Dass diese Gleichung tatsächlich äquivalent zu den beiden homogenen Maxwell-Gleichungen (2.3) und (2.4) ist, sieht man durch Einsetzen verschiedener Werte für λ . $\lambda = 0$ führt zu

$$-\partial_1 B^1 - \partial_2 B^2 - \partial_3 B^3 = -\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$

und $\lambda=1$ zu

$$\frac{1}{c}\partial_t B^1 + \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 = \left(\frac{1}{c}\partial_t B + \operatorname{rot} E\right)_1 = 0$$

16.3.2 Die inhomogenen Feldgleichungen

Die bisher gefundenen homogenen Feldgleichungen beschreiben die elektromagnetischen Felder noch nicht vollständig, wie man schon daran erkennt, dass sie im Gegensatz zum magnetischen Feld keine Zeitableitungen des elektrischen Felds enthalten.

Bisher haben wir nur das Wirkungsfunktional der vorhandenen Teilchen S_m und der Wechselwirkung zwischen den Teilchen und dem Feld S_{mf} benötigt, da beim Aufstellen der Bewegungsgleichung das Feld als bereits bekannt angenommen wurde. Es existiert aber auch eine Wirkung des Felds ohne anwesende Teilchen, die wir mit S_f bezeichnen wollen.

$$S = S_f + S_m + S_{mf} = S_f - \sum mc \int ds - \sum \frac{q}{c} \int A_{\mu} dx^{\mu}$$
(16.19)

Homogene Maxwell-Gleichungen Die Summenzeichen sollen darauf hinweisen, dass wir nun von beliebigen Ladungen ausgehen (die als Summe von Elementarladungen beschrieben werden können). Um S_f zu bestimmen, stellen wir folgende Überlegungen an:

Bedingungen an die Wirkung des Felds

- Das elektromagnetische Feld kann superponiert werden, was durch zahlreiche Experimente belegt wird. Die Feldgleichungen müssen deshalb linear in $F^{\mu\nu}$ sein. Bei der Aufstellung von Gleichungen mittels Variation wird die zu bestimmende Größe, bezüglich deren Auftreten unter dem Integral im Wirkungsfunktional, um einen Grad verringert. Wir benötigen hier also einen Integranden, der quadratisch in $F^{\mu\nu}$ ist.
- Bei der Variation, die zu den noch fehlenen Feldgleichungen führen soll, müssen die Potentiale A^{μ} die Rolle von Koordinaten einnehmen, da diese die einzigen veränderbaren Parameter sind, wenn nur die Eigenschaften der Felder ohne Teilchen interessieren. Die Lagrangefunktion darf i.A. nur von den Koordinaten also den Potentialen und deren ersten Zeitableitungen abhängen. Damit dürfen keine Ableitungen von $F^{\mu\nu}$ in der Wirkung S_f auftreten.
- Die Wirkung muss als kovariante Größe ein Skalar sein, womit auch der Integrand des Wirkungsfunktionals nur ein Skalar sein kann.

Die einzige Möglichkeit für S_f um diese Bedingungen zu erfüllen ist gegeben durch

$$S_f = \beta \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, d\Omega$$

mit einer Konstanten β , die von den gewählten Einheiten des Felds abhängt. Im Gaußschen Einheitensystem wird β zu $-1/(16\pi c)$ (das negative Vorzeichen wird benötigt, um bei der Variation ein Minimum zu finden). Wir erhalten also

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, d\Omega \tag{16.20}$$

Vollständige Wirkung Die benötigte Wirkung lautet folglich

$$S = -\sum mc \int ds - \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega - \frac{1}{c^2} \int A_{\mu} j^{\mu} d\Omega$$
(16.21)

Wie bereits angemerkt, erhalten wir eine weitere Feldgleichung, wenn wir in diesem Wirkungsfunktional die Potentiale variieren, während die Teilchenbewegung als bekannt angenommen wird. Deshalb verschwindet der erste Summand in (16.21):

$$\delta S = -\int \left[\frac{1}{16\pi c} (F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) + \frac{1}{c^2} j^{\mu} \delta A_{\mu} \right] d\Omega$$

$$= -\int \left[\frac{1}{8\pi c} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} j^{\mu} \delta A_{\mu} \right] d\Omega$$

$$= -\int \left[\frac{1}{8\pi c} F^{\mu\nu} \partial_{\mu} (\delta A_{\nu}) - \frac{1}{8\pi c} F^{\mu\nu} \partial_{\nu} (\delta A_{\mu}) + \frac{1}{c^2} j^{\mu} (\delta A_{\mu}) \right] d\Omega$$

$$= -\int \left[-\frac{1}{4\pi c} F^{\mu\nu} \partial_{\nu} (\delta A_{\mu}) + \frac{1}{c^2} j^{\mu} (\delta A_{\mu}) \right] d\Omega$$

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Mit partieller Integration im ersten Summand ergibt sich

$$-\int \left(\frac{1}{4\pi c}\partial_{\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}j^{\mu}\right)\delta A_{\mu}\,d\Omega = 0 \ ,$$

Inhomogene Feldgleichungen

Kovarianz der Maxwell-

Gleichungen

womit wir die inhomogenen Maxwell-Gleichungen entwickelt haben:

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^{\mu} \qquad (16.22)$$

16.3.3 Die Kovarianz der Maxwellgleichungen

Da die Maxwell-Gleichungen die Form von Lorentz-Tensorgleichungen (Tensorgleichungen mit Lorentz-Tensoren) annehmen, sind diese invariant unter Lorentz-Transformationen. Dies kann man leicht überprüfen:

• $0 = \partial'_{\mu} F'^{*\lambda\mu} = \Lambda^{\gamma}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\ \beta} \Lambda^{\lambda}_{\ \alpha} \partial_{\gamma} F^{*\alpha\beta} = \Lambda^{\lambda}_{\ \alpha} \partial_{\beta} F^{*\alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \ \partial_{\beta} F^{*\alpha\beta} = 0$

$$\begin{aligned} \partial'_{\nu}F'^{\mu\nu} &= -\frac{4\pi}{c}j'^{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^{\mu}_{\ \beta}\partial_{\gamma}F^{\beta\gamma} &= -\frac{4\pi}{c}\Lambda^{\mu}_{\ \kappa}j^{\kappa} \\ \Leftrightarrow \quad \Lambda^{\ \omega}_{\mu}\Lambda^{\mu}_{\ \beta}\partial_{\gamma}F^{\beta\gamma} &= -\frac{4\pi}{c}\delta^{\omega}_{\kappa}j^{\kappa} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\gamma}F^{\omega\gamma} &= -\frac{4\pi}{c}j^{\omega} \end{aligned}$$

Die Feldgleichungen der Elektrodynamik haben also in allen Inertialsystemen die gleiche Form (Folge des Relativitätsprinzips).

16.4 Lorentz-Transformation der Feldstärken

Aus dem Transformationsverhalten des Feldstärketensors unter einer bestimmten Lorentz-Transformation können wir explizite Gleichungen für die transformierten elektrischen und magnetischen Felder angeben. Dafür schreiben wir zunächst

$$F'^{\mu}_{\ \nu} = \eta_{\nu\omega}F'^{\mu\omega} = \eta_{\nu\omega}\Lambda^{\mu}_{\ \lambda}\Lambda^{\omega}_{\ \varrho}F^{\lambda\varrho} = \Lambda^{\mu}_{\ \lambda}\Lambda_{\nu\varrho}F^{\lambda\varrho} = \Lambda^{\mu}_{\ \lambda}F^{\lambda}_{\ \varrho}\Lambda^{\ \varrho}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \lambda}F^{\lambda}_{\ \varrho}(\eta\Lambda^{T}\eta)^{\varrho}_{\ \nu}$$

Transformierter Feldstärketensor Nun können wir mittels Matrixmultiplikation und da wegen (14.11)

$$(\eta \Lambda^T \eta)^{\varrho}_{\ \nu} = \left(\begin{array}{ccc} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

,

gilt, den transformierten Feldstärketensor berechnen. Das Ergebnis (für die unabhängigen Einträge) lautet

$$F'^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^{1} & \gamma E^{2} - \gamma \beta B^{3} & \gamma E^{3} + \gamma \beta B^{2} \\ 0 & -\gamma \beta E^{2} + \gamma B^{3} & -\gamma \beta E^{3} - \gamma B^{2} \\ 0 & B^{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(16.23)

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Somit erhalten wir die Transformationen

$$E'^{1} = E^{1}, \quad E'^{2} = \gamma(E^{2} - \beta B^{3}), \quad E'^{3} = \gamma(E^{3} + \beta B^{2})$$
 (16.24)

$$B'^{1} = B^{1}, \quad B'^{2} = \gamma (B^{2} + \beta E^{3}), \quad B'^{3} = \gamma (B^{3} - \beta E^{2})$$
(16.25)

Transformation der $\operatorname{Mit} \boldsymbol{\beta} := (\beta, 0, 0)$ ergibt sich die kompakte Form Feldstärken

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad E'_{\perp} = \gamma (E + \beta \times B)_{\perp}$$
 (16.26)

$$\boldsymbol{B}'_{\parallel} = \boldsymbol{B}_{\parallel}, \quad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E})_{\perp}$$
(16.27)

Bemerkung 16.4 (Inverse Transformation)

Da die Inertialsysteme gleichberechtigt sind, erhalten wir die inverse Transformation, indem wir β durch $-\beta$ ersetzen.

Beispiel 16.1 (Das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung)

Wir betrachten das Feld der (in S) bewegten Ladung zunächst aus deren Ruhesystem S', das zum Zeitpunkt t = 0 = t' mit S zusammenfällt. In S' gilt

$$E' = \frac{q}{r'^3} x'$$
 und $B' = 0$,

falls wir die Ladung in den Ursprung von S' setzen. Um die Felder mittels Koordinaten aus S ausdrücken zu können, benötigen wir die Lorentz-Transformation der S'-Koordinaten. Um die Gleichungen möglichst einfach zu halten wollen wir das Feld im Punkt P mit den Koordinaten (0, a, 0) in S berechnen. Dafür erhalten wir die Lorentz-Transformationen

$$x'^1 = -\gamma vt, \ x'^2 = x^2 = a, \ x'^3 = x^3 = 0$$

Nun können wir die oben gewonnenen Transformationsgleichungen anwenden:

$$\begin{split} E^{1} &= E'^{1} = q \frac{x'^{1}}{r'^{3}} = \frac{-q\gamma vt}{(\gamma^{2}v^{2}t^{2} + a^{2})^{3/2}} \\ E^{2} &= \gamma E'^{2} = \frac{q\gamma a}{(\gamma^{2}v^{2}t^{2} + a^{2})^{3/2}} \\ E^{3} &= \gamma E'^{3} = \gamma \frac{qx'^{3}}{r'^{3}} = 0 \\ B^{1} &= B'^{1} = 0 \\ B^{2} &= \gamma (B'^{2} - \beta E'^{3}) = 0 \\ B^{3} &= \gamma \beta E'^{2} = \beta E^{2} = \frac{q\gamma \beta a}{(\gamma^{2}v^{2}t^{2} + a^{2})^{3/2}} \end{split}$$

Wir können diese Gleichungen in eine kompaktere Form bringen indem wir weitere Variablen einführen: Abstand von P und Punktladung $r := |\mathbf{r}(t)| = \sqrt{v^2 t^2 + a^2}$, Winkel ψ

T3: Elektrodynamik

zwischen x'-Achse und $\mathbf{r} = (-vt, a, 0)$. Damit ist $\sin \psi = a/d$, womit wir den Nenner aus obigen Transformationen schreiben können als

$$a^{2} + \gamma^{2}v^{2}t^{2} = a^{2} + \gamma^{2}(r^{2} - a^{2}) = \gamma^{2}r^{2}\left(1 - \frac{\gamma^{2} - 1}{\gamma^{2}}\frac{a^{2}}{r^{2}}\right) = \gamma^{2}r^{2}(1 - \beta^{2}\sin^{2}\psi)$$

Wir finden schließlich

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{\gamma^2 r^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}$$
(16.28)

Bemerkungen 16.5

- (i) Das gefundene elektrische Feld einer bewegten Punktladung ist zwar radial, aber nicht isotrop.
- (ii) Es ist

$$|\boldsymbol{E}| = \left\{ \begin{array}{ll} \gamma \frac{q}{r^2} & \text{für } \psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ \frac{1}{\gamma^2} \frac{q}{r^2} & \text{für } \psi = 0, \pi \end{array} \right.$$

In der *y-z*-Ebene ist dieses Feld also größer als das einer ruhenden Punktladung, während es entlang der Bewegungsrichtung kleiner ist.

Für das magnetische Feld können wir schreiben

$$\boldsymbol{B} = \beta E^2 \hat{\boldsymbol{e}}_z = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E} \quad \left(\stackrel{v \ll c}{\approx} q \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \right)$$
(16.29)

16.5 Invarianten

Aus dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ können wir nützliche kovariante² Größen gewinnen:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{E}^2) \qquad (\text{Skalar}) \tag{16.30}$$

$$F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$
 (Pseudoskalar) (16.31)

 $^{^2 \}mathrm{Pseudoskalare}$ sind nur kovariant unter eigentlichenLorentz-Transformationen: Transformationen mit detA=+1.

$\mathbf{Teil} \ \mathbf{V}$

Elektromagnetische Wellen

Ebene Wellen

17.1 Die Wellengleichung

Die Maxwellgleichungen in Materie (5.6) - (5.9) lauten für lineare Medien,

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{17.1}$$

wenn keine freien Ladungen und Ströme vorhanden sind:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0 \tag{17.2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c} \partial_t \boldsymbol{E} = 0 \tag{17.3}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{B} = 0 \tag{17.4}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{17.5}$$

Durch Bildung der Rotation der zweiten und dritten Gleichung können die *elektromagnetisen* schen Wellengleichungen abgeleitet werden:

Wellengleichungen der Elektrodynamik

$$\begin{pmatrix} \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\partial_t^2 - \Delta \end{pmatrix} \boldsymbol{E} = 0 \quad (17.6) \\ \left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\partial_t^2 - \Delta \right) \boldsymbol{B} = 0 \quad (17.7)$$

Lösungen dieser Gleichungen sind Wellen mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n},\tag{17.8}$$

wobei $n := \sqrt{\mu \varepsilon}$ als *Brechungsindex* bezeichnet wird.

17.2 Monochromatische ebene Wellen

Die Felder

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$$
(17.9)

sind Lösungen der obigen Wellengleichungen. Sie werden *ebene Wellen* genannt, da die Bereiche konstanter Phase Ebenen bilden. Mithilfe der Wellen- und Maxwell-Gleichungen erhalten wir einige Eigenschaften dieser Wellen:

• Die Parameter ω und $k := |\mathbf{k}|$ der Ebenen Wellen sind nicht unabhängig voneinander, sondern durch die sog. *Dispersionsrelation* miteinander verknüpft. Sie ergibt sich aus den Wellengleichungen:

$$\frac{1}{v^2}\omega^2 - k^2 = 0, \qquad \Rightarrow \ \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \tag{17.10}$$

Geometrische Lage von $oldsymbol{E}_0, oldsymbol{B}_0$ und $oldsymbol{k}$

Dispersionsrelation

Beziehung zwischen E_0 und B_0

• Aus div $\boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ folgt

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{0}. \tag{17.11}$$

Die Feldamplituden stehen also beide senkrecht zu k. Solche Wellen nennt man transversal.

• Aus der dritten Maxwell-Gleichung folgt $i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}_0$, also sind auch das magnetische und elektrische Feld nicht unabhängig voneinander:

$$\boldsymbol{B}_0 = n\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B}_0 = n\boldsymbol{E}_0 \tag{17.12}$$

Insgesamt finden wir damit, dass E_0 , B_0 und k ein rechtshändiges Orthogonalsystem bilden.

17.3 Energiedichte und Intensität

Oben haben wir die ebenen Wellen in komplexer Schreibweise notiert. Wenn wir physikalische Größen, wie die Intensität der Welle bestimmen wollen, müssen wir die physikalische Realisierung dieser Lösungen verwenden, d.h. nur Real- oder nur Imaginärteil. Sei E_0 und B_0 reell, dann sind durch

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t), \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)$$

ebene Wellen definiert. Die Energiedichte des elektromagnetischen Felds im Medium ist gegeben durch

$$\mathcal{W} = \frac{1}{8\pi} \left(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} \right) = \frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{B}^2 \right)$$
(17.13)

T3: Elektrodynamik

Energiedichte einer ebenen Welle Hier erhalten wir wegen $n^2/\mu = \varepsilon$ die zeit- und ortsabhängige Energiedichte

$$\mathcal{W} = rac{arepsilon}{4\pi} E_0^2 \cos^2(m{k} \cdot m{x} - \omega t)$$

Energiestromdichte einer EM-Welle

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi\mu} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{c}{4\pi\mu} n \, \hat{\boldsymbol{k}} \, E_0^2 \cos^2(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t) = \frac{c}{n} \hat{\boldsymbol{k}} \, \mathcal{W}$$
(17.14)

Definition 17.1 (Intensität).

Def.: Intensität

Die Intensität einer elektromagnetischen Welle wird definiert als zeitliches Mittel der Länge des Poynting-Vektors:

$$I := |\langle \boldsymbol{S} \rangle| = v \langle W \rangle = v \frac{\varepsilon}{8\pi} |\boldsymbol{E}_0|^2$$
(17.15)

17.4 Polarisation

17.4.1 Basis der Linearen Polarisation

Standardbasis für Sei $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 = \hat{k}\}$ ein Orthonormalsystem. Allgemein lässt sich die Welle aus (17.9) mit Lineare Polarisation $E_1, E_2 \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = (E_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + E_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$$
(17.16)

Die Polarisation der Welle wird dann durch Wahl der komplexen Koeffizienten E_1 und E_2 festgelegt:

(i) Lineare Polarisation: $E_1 = E_0 e^{i\delta}, E_2 = 0$

$$\Re(\boldsymbol{E}) = \hat{\boldsymbol{e}}_1 E_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t + \delta)$$

(ii) Zirkulare Poloarisation: $E_1 = E_0, E_2 = iE_0$

$$\Re(\boldsymbol{E}) = E_0 \hat{\boldsymbol{e}}_1 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t) - E_0 \hat{\boldsymbol{e}}_2 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)$$

17.4.2 Basis der zirkularen Polarisation

Wählt man eine andere Basis $\left\{ \hat{e}_{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 \pm i \hat{e}_2) \right\}$ und schreibt

Basis für zirkulare Polarisation

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = (E_{+}\hat{\boldsymbol{e}}_{+} + E_{-}\hat{\boldsymbol{e}}_{-})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$$
(17.17)

mit $E_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1 \mp i E_2)$, so erhält man

- (i) **Lineare Polarisation:** bei $E_-/E_+ = \pm 1$
- (ii) **Zirkulare Polarisation:** bei $E_{-} = 0$ oder $E_{+} = 0$.
- (iii) **Elliptische Polarisation:** bei $E_{-}/E_{+} = re^{i\alpha}$. Dabei ergibt sich ein Halbachsenverhältnis von $\left|\frac{1-r}{1+r}\right|$.

17.5 Allgemeine ebene Welle

Satz 17.1

Welle

Allgemeine ebene Allgemein ist jeden Funktion u(x,t), die aus zwei Funktionen f und g mittels

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$
(17.18)

gebildet wird, eine Lösung der Wellengleichung.

Beweis: Eine monochromatische Lösung der eindimensionalen Wellengleichung ist gegeben durch

 $Ae^{ik(x-vt)} + Be^{-ik(x+vt)}$

Aufgrund der Linearität der Wellengleichung ist

$$u(x,t) = \int \left[A(k)e^{ik(x-vt)} + B(k)e^{-ik(x+vt)} \right] \frac{dk}{2\pi}$$

ebenfalls eine Lösung. Dieser Ausdruck kann aber als Fouriertransformation zweier Funktionen aufgefasst werden:

$$u(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

18.1 Reflexion und Brechung

Trifft eine elektromagnetische Welle auf eine Grenzfläche (diese sei in der x-y-Ebene) zweier Medien mit Brechungsindizes n_e und n_t , so kommt es zu Reflexion und Brechung. Dafür betrachten wir die drei Wellen¹

An der Grenzfläche ist die Parallelkomponente des elektrischen Felds stetig. Setzen wir den Ursprung in die Grenzfläche und sei durch $\boldsymbol{x}_G = (x, y, 0)$ ein beliebiger Punkt der Grenzfläche gegeben, so muss gelten

$$\boldsymbol{E}_{e}^{\parallel} + \boldsymbol{E}_{r}^{\parallel} = \boldsymbol{E}_{t}^{\parallel} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{E}_{e0}^{\parallel} e^{i(\boldsymbol{k}_{e} \cdot \boldsymbol{x}_{G} - \omega_{e}t)} + \boldsymbol{E}_{r0}^{\parallel} e^{i(\boldsymbol{k}_{r} \cdot \boldsymbol{x}_{G} - \omega_{r}t)} = \boldsymbol{E}_{t0}^{\parallel} e^{i(\boldsymbol{k}_{t} \cdot \boldsymbol{x}_{G} - \omega_{t}t)}$$

Gleiche Frequenzen beim Übergang

$$\omega_e = \omega_t = \omega_r := \omega \tag{18.1}$$

Wegen $\omega/k = c/n$ ergibt sich damit

Diese Relation ist für alle Zeiten nur dann erfüllbar, falls

$$k_e = k_r = \frac{\omega}{c} n_e , \quad k_t = \frac{\omega}{c} n_t \tag{18.2}$$

Außerdem muss gelten

$$\boldsymbol{k}_e \cdot \boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{x}_G = \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{x}_G \tag{18.3}$$

¹Die Indizes stehen für *einfallend* (e), *gebrochen/transmittiert* (t) und *reflektiert* (r).

Die x- und y- Komponenten von \mathbf{k}_e , \mathbf{k}_r und \mathbf{k}_t sind somit identisch, d.h. die Wellenvektoren befinden sich in einer Ebene (z.B. in der x-z-Ebene). Ist α der Einfallswinkel, gemessen zum Lot der Grenzfläche, so können wir diesen Zusammenhang auch schreiben als

 $k_e \sin \alpha_e = k_r \sin \alpha_r = k_t \sin \alpha_e$

Wegen $k_e = k_r$ ergibt sich das *Reflexionsgesetz*

Reflexionsgesetz

$\alpha_e = \alpha_r$	(18.4)
-----------------------	--------

Brechungsgesetz

und wegen $k_e/k_t = n_e/n_t$ erhalten wir das Brechungsgesetz

$n_e \sin \alpha_e$	$= n_t \sin \alpha_t$	(18.5)
---------------------	-----------------------	--------

18.2 Die Fresnelschen Formeln

Mithilfe der Stetigkeits- und Sprungbedingungen des elektromagnetischen Felds an Grenzflächen können wir Gleichungen ableiten, welche die Feldstärken von reflektierter und gebrochener Welle mit der einfallenden in Beziehung setzen, die *Fresnelschen Formeln*.

Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1 Das elektrische Feld ist linear polarisiert mit $E \perp$ Einfallsebene (hier: x-z-Ebene).

Fall 2 Das elektrische Feld ist linear polarisiert mit $E \parallel$ Einfallsebene.

Anwendung derWir wollen uns hier mit der genaueren Behandlung auf Fall 1 beschränken. Wenden wir dieRandbedingungenin Abschnitt 5.4 hergeleiteten Stetigkeits- und Sprungbedingungen auf die ebenen Wellen(Fall 1)aus Fall 1 an:

• Die Komponente des elektrischen Felds parallel zur *Grenzfläche* (hier: x-y-Ebene) ist stetig. Mit $E_0 = E_0 \hat{e}_y$ gilt dann

$$E_{e0} + E_{r0} = E_{t0} \tag{18.6}$$

• Die Komponente des Magnetfelds parallel zur Grenzfläche genügt der Sprungbedingung $B_1^{\parallel}/\mu_1 = B_2^{\parallel}/\mu_2$.

Da E_0 , B_0 und k ein Orthogonalsystem bilden, liegt B_0 in Fall 1 ganz in der Einfallsebene. Die Komponente parallel zur Grenzfläche ist dann durch die Projektion $B^{\parallel} = B_0 \cos \alpha$ mit dem Einfallswinkel α gegeben. Wegen $B_0 = nE_0$ ergibt sich

$$\frac{1}{\mu_e} n_e E_{e0} \cos \alpha - \frac{1}{\mu_e} n_e E_{r0} \cos \alpha = \frac{1}{\mu_t} n_t E_{t0} \cos \alpha_t \tag{18.7}$$

T3: Elektrodynamik

Fresnelsche Formeln Daraus² erhalten wir die Fresnelschen Formeln: (Fall 1)

 $\frac{E_{t0}}{E_{e0}} = \frac{2n_e \cos \alpha}{n_e \cos \alpha + \frac{\mu_e}{\mu_t} \sqrt{n_t^2 - n_e^2 \sin^2 \alpha}} \quad (18.8)$ $\frac{E_{r0}}{E_{e0}} = \frac{n_e \cos \alpha - \frac{\mu_e}{\mu_t} \sqrt{n_t^2 - n_e^2 \sin^2 \alpha}}{n \cos \alpha + \frac{\mu_e}{\mu_t} \sqrt{n_t^2 - n_e^2 \sin^2 \alpha}} \quad (18.9)$

Fresnelsche Formeln Für Fall 2 geben wir nur das Ergebnis an: Fall 2)

$$\frac{E_{t0}}{E_{e0}} = \frac{2n_e n_t \cos \alpha}{\frac{\mu_e}{\mu_t} n_t^2 \cos \alpha + n_e \sqrt{n_t^2 - n_e^2 \sin^2 \alpha}}$$
(18.10)
$$\frac{E_{r0}}{E_{e0}} = \frac{\frac{\mu_e}{\mu_t} n_t^2 \cos \alpha - n_e \sqrt{n_t^2 - n_e^2 \sin^2 \alpha}}{\frac{\mu_e}{\mu_t} n_t^2 \cos \alpha + n_e \sqrt{n_t^2 - n_e^2 \sin^2 \alpha}}$$
(18.11)

Bemerkungen 18.1

Senkrechter Einfall

(i) Für den speziellen Fall senkrechten Einfalls und unter der Annahme $\mu_e \approx \mu_t$ (im optischen Bereich oft erfüllt) vereinfachen sich die Formeln zu

$$\frac{E_{t0}}{E_{e0}} = \frac{2n_e}{n_e + n_t} , \quad \frac{E_{r0}}{E_{e0}} = \frac{n_e - n_t}{n_e + n_t}$$
(18.12)

Phasensprung

$$\frac{E_{r0}}{E_{e0}} < 0 \tag{18.13}$$

Das bedeutet, es gibt einen Phasensprung von E um π bei Reflexion am optisch dichteren Medium.

(iii) Für sehr flachen Einfall $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ und $n_t > n_e$ gilt

(ii) Bei Reflexion am dichteren Medium $(n_t > n_e)$ ist

$$E_{t0} \to 0 , \quad \left| \frac{E_{r0}}{E_{e0}} \right| \to 1$$

$$(18.14)$$

18.3 Anwendungen der Fresnelschen Formeln

18.3.1 Intensitäten

Die an der Grenzfläche ankommende Intensität wird durch größere Einfallswinkel abgeschwächt gemäß

$$I(\alpha) = \frac{c}{8\pi} \frac{\varepsilon}{n} E_0^2 \cos \alpha \tag{18.15}$$

 $^{^2\}mathrm{Die}$ anderen beiden Randbedingungen führen auf keine neuen Beziehungen.

T3: Elektrodynamik

Definition 18.1 (Transmissions- und Reflexionsgrad).

Der Transmissionsgrad ist definiert durch den Quotient

Transmissions- und Reflexionsgrad

Def.:

$$T := \frac{I_t}{I_e} = \frac{\varepsilon_t / n_t \, \cos \alpha_t}{\varepsilon_e / n_e \, \cos \alpha} \left(\frac{E_{t0}}{E_{e0}}\right)^2,\tag{18.16}$$

analog der Reflexionsgrad

$$R := \frac{I_r}{I_e} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{e0}}\right)^2 \tag{18.17}$$

Ist E senkrecht zur Einfallsebene polarisiert (Fall 1), so ergbit sich beispielsweise

$$T = \frac{4\frac{\mu_e}{\mu_t} n_e n_t \cos \alpha \cos \alpha_t}{(n_e \cos \alpha + \frac{\mu_e}{\mu_t} n_t \cos \alpha_t)^2}$$

$$R = \frac{(n_e \cos \alpha - \frac{\mu_e}{\mu_t} n_t \cos \alpha_t)^2}{(n_e \cos \alpha + \frac{\mu_e}{\mu_t} n_t \cos \alpha_t)^2}$$

$$R = T = 1$$

18.3.2 Brewsterwinkel

Sei $\mu/\mu_t = 1$. Für die Polarisationsrichtung des elektrischen Felds parallel zur Einfallsebene (Fall 2) ist $E_{r0} = 0$, falls

 $n_t \cos \alpha = n_e \cos \alpha_t$

Da immer $n_e \sin \alpha = n_t \sin \alpha_t$ gilt, erhalten wir für den Winkel unter dem es keine parallel zur Einfallsebene polarisierte Reflexion gibt, den sog. *Brewsterwinkel*:

$$\alpha_B = \arctan \frac{n_t}{n_e} \tag{18.18}$$

18.4 Totalreflexion

Totalreflexion

Brewsterwinkel

Betrachten wir den Fall $n_e > n_t$, dann gilt nach dem Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha_t}{\sin \alpha} = \frac{n_e}{n_t} > 1$$

Fällt die elektromagnetisch Welle nun unter einem Winkel α_0 mit sin $\alpha_0 = \frac{n_t}{n_e}$ ein, so wäre bei Brechung sin $\alpha_t > 1$, was niemals erfüllt ist. Das bedeutet, für $\alpha \ge \alpha_0$ wird die gesamte Welle reflektiert.

Im Falle von Totalreflexion ist nun

$$\cos \alpha_t = \sqrt{1 - \frac{n_e^2}{n_t^2} \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_0}} = i\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_0}} - 1 =: iC$$

T3: Elektrodynamik

Evaneszente Welle und wegen $k_t \cdot x = k_t (x \sin \alpha_t + z \cos \alpha_t)$ gilt für die transmittierte Welle

$$\boldsymbol{E}_t \propto e^{i\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{x}} \propto e^{i\boldsymbol{k}_t z \cos \alpha_t} = e^{-k_t C z} \tag{18.19}$$

Die transmittierte Welle fällt bei Totalreflexion also exponentiell ab.

Elektromagnetische Wellen in leitenden Medien

In ohmschen Leitern gilt die konstituierende Gleichung (KG) $j_f = \kappa E$. Die Maxwellgleichungen in Materie (hier D ersetzt durch εE und H durch B/μ) nehmen damit die Form an

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \varrho_f \tag{19.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c} \partial_t \boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c} \mu \kappa \boldsymbol{E}$$
(19.2)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \partial_t \boldsymbol{B} = 0 \tag{19.3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{19.4}$$

19.1 Ladungsverteilung in leitenden Medien

Mit der KG für ohmsche Leiter erhalten wir aus der Kontinuitätsgleichung eine Differentialgleichung für ϱ_f

$$\partial_t \varrho_f = -\operatorname{div} \boldsymbol{j}_f = -\kappa \operatorname{div} \boldsymbol{E} = - \underbrace{\frac{4\pi\kappa}{\varepsilon}}_{=:1/\tau} \varrho_f$$

Ladungsverteilung mit der Lösung in leitenden Medien

$$\varrho_f(t, \boldsymbol{x}) = e^{-t/\tau} \varrho_f(0, \boldsymbol{x}) \tag{19.5}$$

Nach einer Zeit $t \gg \tau$ verschwindet damit eine vorher vorhandene Ladungsverteilung.

Wellengleichung und Dispersionsrelation 19.2

Mit $\rho_f = 0$, (19.1), $\partial_t(19.2)$, rot (19.3) und (19.4) erhalten wir die beiden Wellengleichungen

Wellengleichungen in leitenden Medien

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\boldsymbol{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\mu\kappa\,\partial_t\boldsymbol{E},\tag{19.6}$$

$$\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\boldsymbol{B} = -\frac{4\pi}{c^2}\mu\kappa\,\partial_t\boldsymbol{B},\tag{19.7}$$

für deren Lösung wir wieder monochromatische ebene Wellen ansetzen können:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\bar{k}\boldsymbol{z}-\omega t)}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}_0 e^{i(\bar{k}\boldsymbol{z}-\omega t)}$$
(19.8)

Eingesetzt in die Wellengleichungen ergibt sich die Beziehung

$$-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 + \tilde{k}^2 = \frac{4\pi}{c^2}\mu\kappa\,i\omega \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{k}^2 = \frac{n^2}{c^2}\left(\omega^2 + i4\pi\kappa\omega\right)$$

Dispersionsrelation

Mit $\tau = \varepsilon/(4\pi\kappa)$ und v = c/n können wir die Dispersionsrelation in leitenden Medien aufschreiben

$$\tilde{k} = \frac{1}{v}\sqrt{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} =: k + iq \qquad (19.9)$$

Aufgelöst nach k und q erhalten wir¹

$$\binom{k}{q} = \frac{\omega}{\sqrt{2}v} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \left\{ \begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right\} 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(19.10)$$

Für die Wellenlösungen ergibt sich eine exponentiell abfallende Amplitude:

$$E = E_0 e^{-qz} e^{i(kz - \omega t)}, \quad B = B_0 e^{-qz} e^{i(kz - \omega t)}$$
(19.11)

Exponentiell abfallende Amplituden (Skineffekt)

Bemerkungen 19.1

- (i) Als Eindringtiefe d bezeichnet man die Weglänge z, nach der nur noch 1/e der ursprünglichen Amplitude vorhanden ist: $d = \frac{1}{a}$.
- (ii) Die Größenordnung von $\omega\tau$ legt den Real- und Imaginärteil von \tilde{k} fest:
 - $\underline{\omega\tau \gg 1}$: $k \approx \frac{\omega}{v}$, $q \approx \frac{1}{2v\tau}$, $d \approx 2v\tau$ (Dies entspricht also einem schlechten Leiter. Im Extremfall von $\tau \to \infty$ erhalten wir einen Nichtleiter mit q = 0.
 - $\underline{\omega\tau \ll 1:} k \approx q \approx \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\omega}{2\tau}}$ Diese Eigenschaft haben gute Leiter. Für $\tau \to 0$ ergibt sich ein idealer Leiter mit $d \to 0$ und E = 0 im Leiter (totale Abschirmung).

¹Kann man leicht überprüfen, indem man das Betragsquadrat $|\tilde{k}|^2 = k^2 + q^2$ berechnet.

(iii) Wie man aus den Maxwellgleichungen ableiten kann, bilden die Vektoren E, B, \tilde{k} weiterhin ein Orthogonalsystem. Aus (19.3) folgt $\tilde{k} \times E = \frac{\omega}{c} B$ und daraus

$$B_0 = \frac{c}{\omega} \tilde{k} E_0 \tag{19.12}$$

Für \tilde{k} können wir $|\tilde{k}|e^{i\alpha}$ mit $\alpha = \arctan \frac{q}{k}$ schreiben. Damit ist klar, dass E und B nicht mehr in Phase sind:

$$B_0 e^{-i\omega t} = \frac{c}{\omega} |\tilde{k}| E_0 e^{-i(\omega t - \alpha)}$$
(19.13)

Dispersion

20.1 Klassisches Oszillatormodell

Elektronen desMit einem Oszillatormodell für lineare Medien können wir eine Theorie für ε entwickeln.Mediums alsDabei betrachtet man die gebundenen Elektronen als Oszillatoren, die vom elektromagnetischwingende Dipoleschwingende Dipoleschen Feld zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden, gemäß der Bewegungsgleichung

$$m(\ddot{\boldsymbol{x}} + \gamma \dot{\boldsymbol{x}} + \omega_0^2 \boldsymbol{x}) = e\boldsymbol{E}(t)$$

mit $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$ am Ort des entsprechenden Elektrons. Mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$ erhalten wir für die Auslenkung x_0 die Beziehung

$$oldsymbol{x}_0 = rac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}oldsymbol{E}_0$$

Einem schwingenden Elektron kann ein (zeitlich veränderliches) elektrisches Dipolmoment zugeordnet werden:

$$\mathbf{p}(t) = e\mathbf{x}(t) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}(t)$$

Die Elektronen der Moleküle des Mediums sind i.A. unterschiedlich stark gebunden. Von den Z Elektronen eines Moleküls gebe es deshalb f_l Elektronen mit der Resonanzfrequenz ω_l und Dämpfung γ_l . Diesen Elektronen wird somit des Dipolmoment

$$\mathbf{p}_l(t) = \frac{e^2/m}{\omega_l^2 - \omega^2 - i\gamma_l \omega} \mathbf{E}(t)$$
(20.1)

Verbindung zum makroskopischen Modell zugeordnet. Mit der Moleküldichte Nist die Polarisierungsdichte \boldsymbol{P} gegeben durch

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sum_{i} \boldsymbol{\mathfrak{p}}_{i}}{V} = N \sum_{l} f_{l} \, \boldsymbol{\mathfrak{p}}_{l}(t) \equiv \chi \boldsymbol{E}(t),$$

Drude-Formel

womit der Zusammenhang zur Suszeptibilität und damit zu $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$ hergestellt ist:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_{l} \frac{f_l}{\omega_l^2 - \omega^2 - i\gamma_l \omega}$$
(20.2)

Bemerkungen 20.1

- (i) Die quantenmechanische Behandlung der Wechselwirkung von Materie mit elektromagnetischen Wellen liefert dieselbe Formel (bei geeigneter Definition von f_l , ω_l und γ_l).
- (ii) Die Wellengleichung in linearen Medien

$$\left(\frac{1}{v^2}\partial_t^2 - \Delta\right) \boldsymbol{E} = \left(\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right) \boldsymbol{E} = 0$$

wird durch ebene Wellen $E(x,t) = E_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$ gelöst, mit $\tilde{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}$. Da $\varepsilon(\omega) \in \mathbb{C}$, können wir wieder $\tilde{k} = k + iq$ mit $k, q \in \mathbb{R}$ setzen:

 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \, e^{-qz} \, e^{i(kz - \omega t)}$

Hier definiert man dann den Absorptionskoeffizient über die verlorene Intensität gemäß

$$2q = 2\frac{\omega}{c} \Im\left(\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right)$$

Brechungsindex

Außerdem kann man den Brechungsindex n über v = c/n definieren, womit man

$$n(\omega) = \frac{c}{v(\omega)} = \frac{c\,k(\omega)}{\omega} = \frac{c}{\omega}\Re(\tilde{k}(\omega)) = \Re\left(\sqrt{\varepsilon(\omega)}\right)$$
(20.3)

erhält.

(iii) Für $\varepsilon(\omega) \approx 1$ lässt sich $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ in

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} \approx 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \sum_l \frac{f_l}{\omega_l^2 - \omega^2 - i\gamma_l \omega} = 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \sum_l f_l \frac{\omega_l^2 - \omega^2 + i\gamma_l \omega}{(\omega_l^2 - \omega^2)^2 + \gamma_l^2 \omega^2}$$

entwickeln.

• Im Allgemeinen ist $\gamma_l \ll \omega_l$, womit der Realteil von $\sqrt{\varepsilon}$ außerhalb des Bereichs um die Resonanzfrequenzen ω_l gegenüber dem Imaginärteil dominiert. Hier gilt die Abschätzung

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{2\pi N e^2}{m} \sum_l \frac{f_l}{\omega_l^2 - \omega^2}$$

- Für $\omega < \omega_l$ ist $n(\omega) > 1$. Im Bereich, in dem $\partial_{\omega} n(\omega) > 0$ spricht man von normaler Dispersion.
- Für $\omega \approx \omega_l$ tritt Resonanzabsorption auf, da der Imaginärteil von $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ groß wird. In diesem Bereich ist $\partial_{\omega} n(\omega) < 0$, hier spricht man von anomaler Dispersion.

20.2 Niederfrequenzlimes

Medium mit freien Elektronen Gibt es innerhalb eines Mediums freie Elektronen, d.h. gibt es ein l mit $\omega_l = 0$ (dies soll hier für l = 0 gelten), dann können wir für die Dielektrizitätszahl schreiben¹

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_{l \neq 0} \frac{f_l}{\omega_l^2 - \omega^2 - i\gamma_l \omega} + i \frac{4\pi N e^2 f_0}{m \omega (\gamma_0 - i\omega)}$$

Schickt man nun elektromagnetische Wellen mit sehr kleiner Frequenz ($\omega \to 0$) durch das betrachtete Medium, so bleiben die ersten beiden Summanden von $\varepsilon(\omega)$ endlich und werden näherungsweise reell, wohingegen der letzte Summand (ins Imaginäre) divergiert.

Setzen wir nun

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i \frac{4\pi\kappa(\omega)}{\omega}$$
, mit $\kappa(\omega) = \frac{Ne^2 f_0}{m(\gamma_0 - i\omega)}$

und betrachten die Maxwellgleichung (in Materie mit $\mu = 1$) rot $\boldsymbol{B} - \frac{\varepsilon(\omega)}{c} \partial_t \boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_f$ mit dem zeitabhängigen Feld $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} + i \frac{\omega \,\varepsilon(\omega)}{c} \boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_f \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} + i \frac{\omega \,\varepsilon_r(\omega)}{c} \boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c} (\boldsymbol{j}_f + \kappa(\omega) \boldsymbol{E})$$

Interne Stromdichte

te Das heißt, wir können für niedere Frequenzen ω die Maxwellgleichung mit $\varepsilon = \varepsilon_r(\omega)$ verwenden, wenn wir zusätzlich eine interne Stromdichte freier Ladungen $j_{f,i}$ einführen und zu $j_f =: j_{f,e}$ hinzuzählen:

$$\mathbf{j}_{f}' = \mathbf{j}_{f,e} + \kappa(\omega)\mathbf{E} = \mathbf{j}_{f,e} + \mathbf{j}_{f,i}$$
(20.4)

Dies entspricht der bereits früher eingeführten KG für Ohmsche Leiter.

Bemerkung 20.2

Für $\omega \to 0$ setzen wir außerdem

$$\varepsilon(\omega \to 0) = \varepsilon_r(0) + i \frac{4\pi\kappa(0)}{\omega} =: \varepsilon + i \frac{4\pi\kappa}{\omega}$$

mit $\varepsilon, \kappa \in \mathbb{R}$.

Die Wellengleichung in linearen Medien hat ebene Wellen als Lösung mit $\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$. Für geringe Frequenzen ergibt sich

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon + i\frac{4\pi\kappa}{\omega}} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{c}\sqrt{\omega^2 + i\frac{4\pi\kappa}{\varepsilon}\omega} = \frac{1}{v}\sqrt{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}}$$

mit $\tau = \varepsilon/(4\pi\kappa)$ und $v = c/\sqrt{\varepsilon}$. Dies entspricht der Dispersionsrelation in leitenden Medien (19.9).

¹Die Zahl f_0 der Elektronen mit $\omega_0 = 0$ pro Molekül verschwindet für Isolatoren und nimmt einen Wert ungleich null für Metalle an.

20.3 Hochfrequenzlimes

Damit ergibt sich für die Dispersionsrelation

Für große Frequenzen $\omega \gg \omega_l \;\; \forall l \; \mathrm{ist}$

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$
, mit $\omega_p^2 = \frac{4\pi N Z e^2}{m}$ (ω_p : Plasmafrequenz) (20.5)

Dispersion für große Frequenzen

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$
(20.6)

Bemerkung 20.3 (Gültigkeit des Hochfrequenzlimes)

- In Dielektrika gelten die Gleichungen nur für $\omega \gg \omega_l$.
- In Plasmen aus frei beweglichen Leitern ($\omega_l = \gamma_l = 0 \ \forall l$) gelten obige Gleichungen für alle Frequenzen ω .
- In Metallen² ist für $\omega \gg \gamma_0 \colon \kappa(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega}$ also

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

²Für Metalle ist ω_p im Bereich von $10^{16} s^{-1}$ (UV-Bereich).

Wellenpakete in dispersiven Medien

Die Dispersions
relation $k(\omega) = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{c^2}$ kann auch als

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(k)} \tag{21.1}$$

aufgefasst werden. Die Amplitude der ebenen Wellen kann im Allgemeinen auch von k bzw. ω abhängen:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(k)t)}$$

Wegen der Linearität der Wellengleichung sind Superpositionen von ebenen Wellen ebenfalls Lösungen:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \, \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{k}) \, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(k)t)}$$
(21.2)

21.1 Eindimensionales Wellenpaket

Allgemeines eindim. Wellenpaket

Allgemeines Wellenpaket

tim. Im Folgenden wollen wir für einen Spezialfall des allgemeinen Wellenpakets

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \tilde{u}(k) \, e^{i(kx - \omega(k)t)}$$
(21.3)

explizit die Integration ausführen, um die Form des Pakets bei vorgegebener Verteilung $\tilde{u}(k)$ zu finden. Wir wählen eine Gaußsche Verteilung¹

$$\tilde{u}(k) = A e^{-\alpha (k - k_0)^2}$$
(21.4)

¹Lassen wir die Verteilung immer schmaler werden, bis sie eine Dirac-Distribution annähert, so erhalten wir wieder eine ebene Welle mit $k = k_0$.

Im Falle großer α wird nur ein kleiner Bereich um k_0 zum Wellenpaket beitragen. Deshalb interessiert hier auch für $\omega(k)$ nur ein solcher Bereich:

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} (k-k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0} (k-k_0)^2$$

=: $\omega_0 + v(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2$

Das ergibt

$$u(x,t) \approx \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-\alpha(k-k_0)^2} \, e^{i(k_0x-\omega_0t)} \, e^{i(k-k_0)(x-vt)} \, e^{-i\beta(k-k_0)^2t}$$

Mit Substitution $k' := k - k_0$ und quadratischer Ergänzung kann man die Integration leicht ausführen. Die Lösung lautet

$$u(x,t) = \frac{A}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4(\alpha + i\beta t)}}$$

Für die Intensität gilt

$$I \propto |u(x,t)|^2 = \frac{|A|^2}{4\pi\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} e^{-\frac{\alpha(x-vt)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}}$$
(21.6)

Man erhält für die Intensität also wieder ein Gaußsches Wellenpaket. Dieses hat das Zen-Gruppen- und trum bei x = vt und bewegt sich deshalb mit der Gruppengeschwindigkeit $v = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0}$. Die geschwindigkeit Phasengeschwindigkeit $v_p = \omega/k$ unterscheidet sich i. A. von dieser².

Beispiel 21.1 (Plasma)

In Plasmen gilt die Dispersionsrelation $\omega = \sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}$, womit sich für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ergibt:

$$v_p = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}}{k} > c$$
$$v = \frac{k}{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}} k < c$$

Veränderliche Breite

Wellenpaket für eine Gaußsche Verteilung $\tilde{u}(k)$

Phasen-

Die Breite von $|u(x,t)|^2$ ist nach (21.6) nicht zeitlich konstant. Sie ist gegeben durch

$$d(t) = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 t^2}{\alpha}} \tag{21.7}$$

²Nur für n(k) = n = const. ist $\frac{d\omega}{dk} = c/n = v_p.$

T3: Elektrodynamik

(21.5)

Bedingung für die Zeitabhängigkeit

Das heißt, $|u(x,t)|^2$ wird breiter und flacher (Amplitude $\propto d^{-1}$) – zwar für kleine t noch langsam, für größere Zeiten wird die Abhängigkeit aber linear. Diese Zeitabhängigkeit existiert nur für $\beta \neq 0$, also für $\frac{d^2\omega}{dk^2}\Big|_{k_0} \neq 0$, was immer dann der Fall ist, wenn

$$\frac{dn}{dk} \neq 0,$$

also in dispersiven Medien.

Wellenleiter

Felder in der Wand

Stellen wir uns einen zylindrischen Hohlraum (Achse in z-Richtung) mit beliebigem Querschnitt vor, dessen Wand aus einem idealen Leiter bestehe. Das heißt, innerhalb der Wand verschwinde das elektrische Feld¹. Wegen der dritten Maxwellgleichung (2.3) ist B dann zeitlich konstant und da zur Zeit t = 0 kein Magnetfeld vorhanden sein soll, gilt in der Wand des Hohlraums

$$\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{0} \tag{22.1}$$

Lösung innerhalb des Hohlraums

DGL für die

Koeffizienten

Innerhalb des Hohlraums müssen wir dann die freien Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0 \tag{22.2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \frac{1}{2} \partial_t \boldsymbol{E} = 0 \tag{22.3}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{\partial_t} \boldsymbol{B} = 0 \tag{22.4}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{22.5}$$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen $E^{\parallel} = 0$ und $B_{\perp} = 0$. Wir suchen dabei speziell Wellenlösungen der Wellengleichung $\Box E = 0$ bzw. $\Box B = 0$ mit Ausbreitung in z-Richtung:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{B}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)},$$

Damit erhalten wir ein zeitunabhängiges Problem für die Koeffizienten der Felder

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right] \mathbf{E}_0(x, y) = 0, \quad \left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right] \mathbf{B}_0(x, y) = 0 \quad (22.6)$$

¹Das heißt, wir nehmen an, dass $\omega \to 0$, bzw. $\omega \ll \gamma_0$, denn dann wird κ reell und $\varepsilon(\omega \to 0) = \varepsilon + i \frac{4\pi\kappa}{\omega}$ hat einen großen Imaginärteil, womit fast die ganze elektromagnetische Welle sofort absorbiert wird.

Dies scheinen zunächst sechs unabhängige Differentialgleichungen für die Komponenten von $E_0 =: (E_x, E_y, E_z)$ und $B_0 =: (B_x, B_y, B_z)$ zu sein. Mithilfe der Maxwellgleichungen und unserem Ansatz für monochromatische Wellen in z-Richtung sehen wir aber, dass nicht alle Koeffizienten-Komponenten unabhängig voneinander sind. Aus (22.3) und (22.4) folgt

 $i\frac{\omega}{c}B_x = \partial_y E_z - ikE_y, \qquad i\frac{\omega}{c}B_y = ikE_x - \partial_x E_z$ $-i\frac{\omega}{c}E_x = \partial_y B_z - ikB_y, \qquad -i\frac{\omega}{c}E_y = ikB_x - \partial_x B_z$

Dies sind vier weitere Gleichungen für die sechs Koeffizienten. Aufgelöst nach E_x und E_y bzw. B_x und B_y erhalten wir

$$E_x = \frac{i}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(\frac{\omega}{c} \partial_y B_z + k \partial_x E_z\right)$$
$$E_y = \frac{i}{\omega^2/c^2 - k^2} \left(k \partial_y E_z - \frac{\omega}{c} \partial_x B_z\right)$$

(analog für B_x und B_y). Das heißt, $E_z(x, y)$ und $B_z(x, y)$ legen die Lösung fest. Letztendlich sind die beiden Gleichungen

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right] E_z(x, y) = 0, \quad \left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right] B_z(x, y) = 0 \quad (22.7)$$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu lösen.

Bemerkung 22.1 (Spezialfälle)

- *TE-Welle* (transversal-elektrische Welle): $E_z = 0, B_z \neq 0$
- *TM-Welle* (transversal-magnetische Welle): $B_z = 0, E_z \neq 0$
- *TEM-Welle* (transversal-elektromagnetische Welle): $E_z = B_z = 0$

Satz 22.1

E TEM-Wellen TEM-Wellen sind in hohlen Wellenleitern unmöglich.

Keine TEM-Wellen in hohlen Wellenleitern

Beweis: Wegen $E_z = 0$ und der ersten Maxwellgleichung (22.2) ist

 $(\partial_x E_x + \partial_y E_y)e^{i(kz-\omega t)} = 0 \quad \Rightarrow \ \partial_x E_x + \partial_y E_y = \operatorname{div} \mathbf{E}_0(x,y) = 0$

Wegen $B_z = 0$ gilt wegen der dritten Maxwellgleichung

 $(\operatorname{rot} \boldsymbol{E})_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x = 0$

Außerdem gilt wegen $E_z = 0$

$$0 = -\partial_z E_y(x, y) = \partial_y E_z - \partial_z E_y, \quad 0 = \partial_z E_x(x, y) = \partial_z E_x - \partial_x E_z \qquad \Box$$

Das sind gerade die Komponenten von rot E_0 . Es existiert damit ein Skalarfeld $\varphi(x, y)$ mit $E_0(x, y) = -\text{grad }\varphi(x, y)$. Dieses muss wegen div $E_0 = 0$ die Laplace-Gleichung $\Delta \varphi = 0$ erfüllen. Lösungen der Laplace-Gleichung haben keine lokalen Extrema. Am Rand muss φ aber konstant sein, da die Wand des Hohlraums ein idealer Leiter sein soll. φ ist deshalb überall konstant und somit $E_0 \equiv 0$, was für die geforderten Wellenlösungen nicht erlaubt ist.

Verbleibende Problemstellung

Zusätzliche

Gleichungen

Bemerkung 22.2

Um dennoch TEM-Wellen leiten zu können, benutzt man Koaxialkabel.

Beispiel 22.1 (Rechteckwellenleiter, TE-Welle)

Bsp.: Rechteckwellenleiter Sei der Querschnitt eines Wellenleiters rechteckig (Querschnitt: $[0, a] \times [0, b]$ mit a > b). Für eine TE-Welle lautet die zu lösende Gleichung

$$\left[\partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right] B_z(x, y) = 0$$

Die Randbedingung $B^{\perp} = 0$ für x = 0, a lautet

$$B_x(0,y) = 0, \quad B_x(a,y) = 0$$

Die Parallelkomponente des elektrischen Felds ist wegen $E_z = 0$ gleich der y-Komponente $E_y = 0$ und wegen (siehe oben zusätzliche Gleichungen) $-\frac{\omega}{c}E_y = ikB_x - \partial_xB_z$ gilt

 $\partial_x B_z = 0$

Diese Randbedingungen und obige DGL werden durch

$$B_z(x,y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
 mit $m, n \in \mathbb{N}_0$ außer $m = n = 0$

erfüllt. Eingesetzt ergibt sich de Dispersionsrelation

$$c^{2}k^{2} = \omega^{2} - \omega_{mn}^{2}$$
, mit $\omega_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^{2}}{a^{2}} + \frac{n^{2}}{b^{2}}}$

Ist $\omega < \omega_{mn}$, so ist k imaginär und die Welle kann sind nicht ausbreiten. Die kleinste Frequenz ω_{mn} und damit die Grenzfrequenz ist dabei durch $\omega_{10} = c\pi/a$ gegeben.

T3: Elektrodynamik

Teil VI

Strahlung

Allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen

Wellengleichungen für die Potentiale Nach Satz 3.1 sind die Wellengleichungen

$$\Box \varphi = 4\pi \varrho(\boldsymbol{x}, t) \tag{23.1}$$

$$\Box \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \tag{23.2}$$

den Maxwellgleichungen äquivalent. Dabei sind die Potentiale definiert über

$$B = \operatorname{rot} A$$
$$E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \partial_t A$$

und erfüllen die Lorenz-Eichbedingung

$$\frac{1}{c}\partial_t\varphi + \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{23.3}$$

23.1 Allgemeine Lösung der homogenen Gleichungen

Lösungen der homogenenen Gleichungen Die Lösungen der freien Wellengleichungen sind gegeben durch allgemeine Superpositionen von ebenen Wellen:

$$\varphi_h(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \,\tilde{\varphi}_h(\boldsymbol{k}) \, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(k)t)}$$
(23.4)

$$\boldsymbol{A}_{h}(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}} \, \tilde{\boldsymbol{A}}_{h}(\boldsymbol{k}) \, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega(k)t)}, \quad \text{mit } \omega(k) = kc$$
(23.5)

Aus der Eichbedingung erhalten wir

$$\frac{\omega(k)}{c}\tilde{\varphi}_h(\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_h(\boldsymbol{k}) = 0$$
(23.6)
23.2 Die retardierten Potentiale

Nun wollen wir spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichungen finden. Wie wir sehen werden, werden diese Lösungen *retardierte Potentiale* genannt.

Spezielle Lösung für φ

Um in (23.1) die zeitliche Differentiation zu vereinfachen zerlegen wir beide Seiten der Gleichung mittels Fouriertransformation in t:

$$\begin{split} \varphi(\boldsymbol{x},t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \, \phi(\boldsymbol{x},\omega) \, e^{-i\omega t} \\ \varrho(\boldsymbol{x},t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \, \rho(\boldsymbol{x},\omega) \, e^{-i\omega t} \end{split}$$

Das ergibt

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} - \Delta \right) \phi(\boldsymbol{x}, \omega) e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi} 4\pi \rho(\boldsymbol{x}, \omega) e^{-i\omega t}$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, muss gelten

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi(\boldsymbol{x},\omega) = -4\pi\rho(\boldsymbol{x},\omega)$$
(23.7)

Lösung mittels Greenscher Funktion Wie wir bereits in der Elektrostatik gesehen haben, können solche inhomogenen Differentialgleichungen ($U\phi = I$ mit Inhomogenität I) mithilfe einer Greenschen Funktion G gelöst werden, welche die Gleichung $UG = \delta$ (mit der Dirac-Distribution δ) erfüllt. Die Lösung erhalten wir dann über die Faltung I * G. Wir benötigen also eine Greensche Funktion für $U = \Delta + \omega^2/c^2$:

Satz 23.1 (Greensche Funktion für $\bigtriangleup + \omega^2/c^2)$

 $Die \ L\ddot{o}sung \ G \ der \ Gleichung$

$$\left(\bigtriangleup + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G(\boldsymbol{x}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}),$$

also die Greensche Funktion für $\frac{1}{-4\pi}(\triangle + \omega^2/c^2)$, ist gegeben durch

$$G(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} e^{\pm i\omega|\boldsymbol{x}|/c}$$
(23.8)

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \partial_i^2 G(\boldsymbol{x}) &= \partial_i \left[\left(\partial_i \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \right) e^{i\omega|\boldsymbol{x}|/c} + i\frac{\omega}{c} e^{i\omega|\boldsymbol{x}|/c} \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^2} \right] \\ &= \left(\partial_i^2 \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \right) e^{i\omega|\boldsymbol{x}|/c} + \left(\partial_i \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \right) i\frac{\omega}{c} e^{i\omega|\boldsymbol{x}|/c} \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|} \\ &- \frac{\omega^2}{c^2} e^{i\omega|\boldsymbol{x}|/c} \frac{x_i x_i}{|\boldsymbol{x}|^3} + i\frac{\omega}{c} e^{i\omega|\boldsymbol{x}|/c} \underbrace{\frac{3|\boldsymbol{x}|^2 - 2x_i x_i}{|\boldsymbol{x}|^4}}_{=1/|\boldsymbol{x}|^2} \end{aligned}$$

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Wegen $\frac{x_i}{|x|^2} \left(\partial_i \frac{1}{|x|} \right) = -\frac{1}{|x|^2}$ kompensieren sich der zweite und vierte Term:

$$\partial_i^2 G(\boldsymbol{x}) = e^{i\omega|\boldsymbol{x}|/c} \left[\partial_i^2 \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \right]$$

Da $1/(-4\pi |\mathbf{x}|)$ eine Greensche Funktion für \triangle darstellt, ergibt sich

$$\Delta G(\boldsymbol{x}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}) e^{i\omega|\boldsymbol{x}|/c} - \frac{\omega^2}{c^2}G(\boldsymbol{x}) = 4\pi\delta(\boldsymbol{x}) - \frac{\omega^2}{c^2}G(\boldsymbol{x}),$$

womit $G(\boldsymbol{x})$ die Greensche Funktion von $\Delta + \omega^2/c^2$ ist.

Konstruktion der Mit G können wir nun Gleichung (23.7) für die Fouriertransformierte $\phi(x, \omega)$ lösen:

Lösung mittels Faltung $\phi({m x},\omega)=G*
ho$

$$\phi(\boldsymbol{x},\omega) = G * \rho = \int d^3 x' \frac{\rho(\boldsymbol{x}',\omega)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} e^{i\omega|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c}$$
(23.9)

Die spezielle Lösung von (23.1) erhalten wir mittels Rücktransformation

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d^3x' \frac{\rho(\boldsymbol{x}',\omega)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} e^{-i\omega(t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c)} = \int \frac{d^3x'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\boldsymbol{x}',\omega) e^{-i\omega t_r}$$

mit $t_r := t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|/c$, der sog. retardierten Zeit¹. Das innere Integral ist aber gerade die Rücktransformation von $\rho(\boldsymbol{x}', \omega)$ mit der Zeitvariablen t_r . Deshalb erhalten wir

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \int d^3 x' \, \frac{\varrho(\boldsymbol{x}',t_r)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \,, \quad t_r = t - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c \tag{23.10}$$

Führen wir dieselben Schritte für die Lösung A von (23.2) durch, so ergibt sich analog

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{c} \int d^3 x' \, \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}',t_r)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$
(23.11)

Bemerkung 23.1 (Lorenz-Bedingung (23.3))

Die retardierten Potentiale, Lösungen von (23.1) und (23.2), können nur Lösungen der Maxwellgleichungen erzeugen, falls sie auch die Lorenz-Eichbedingung (23.3) erfüllen:

$$\frac{1}{c}\partial_t\varphi(\boldsymbol{x},t) + \partial_i A_i(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3x' \left[\frac{\partial_t\varrho(\boldsymbol{x}',t_r)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + \partial_i\frac{j_i(\boldsymbol{x}',t_r)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right]$$

Spezielle Lösungen von (23.1) und (23.2): Die retardierten Potentiale ¹Diese Zeitverzögerung können wir anschaulich verstehen. Nehmen wir an, wir beobachten vom Ort \boldsymbol{x} aus, die zeitabhängige Ladungsverteilung ϱ am Ort \boldsymbol{x}' . Aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen erhalten wir die Informationen von ϱ immer um $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|/c$ zeitverzögert. Im nicht-relativistischen Grenzfall, den man formal mit $c \to \infty$ erhält, ist $t_r \to t$ und die Potentiale gehen in die aus der Elektround Magnetostatik bereits bekannte Form über.

Berechnen wir dafür

$$\partial_i \frac{j_i(\mathbf{x}', t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial j_i}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t_r} + j_i(\mathbf{x}', t_r) \partial_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$
$$= -\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{\partial j_i}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x_i'} - j_i(\mathbf{x}', t_r) \partial_i' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$
$$= -\partial_i' \frac{j_i(\mathbf{x}', t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\operatorname{div} j_i(\mathbf{x}', t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Da die Stromdichte $j_i(\boldsymbol{x}', t_r)$ als räumlich begrenzt anzunehmen ist (physikalisch sinnvoll), gilt außerdem

$$\int d^3x' \,\partial'_i \frac{j_i(\boldsymbol{x}', t_r)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = \int d\sigma' \,\frac{j_i(\boldsymbol{x}', t_r)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = 0$$

Die retardierten Potentiale sind automatisch Lorenz-geeicht Damit ergibt sich zusammen mit der Ladungserhaltung für die Lorenz-Bedingung:

$$\frac{1}{c}\int d^3x' \left[\frac{\partial_t \varrho(\boldsymbol{x}', t_r)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \partial_i \frac{j_i(\boldsymbol{x}', t_r)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\right] = \frac{1}{c}\int d^3x' \frac{\partial_t \varrho(\boldsymbol{x}', t_r) + \operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}', t_r)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} = 0$$

Die retardierten Potentiale erfüllen somit die notwendige Lorenz-Eichung, d.h. sie dienen zur Erzeugung allgemeiner Lösungen der Maxwellgleichungen.

Kapitel 24

Liénard-Wiechert-Potentiale

Da wir nun die Form der elektrodynamischen Potentiale für gegebene zeitabhängige Ladungsund Stromverteilungen kennen, können wir explizite Lösungen für verschiedene Ladungsverteilungen berechnen. Für den einfachsten Fall, d.h. wird die zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilung durch eine bewegte Punktladung q verursacht, ergeben sich die sogenannten Liénard-Wiechert-Potentiale.

Die Punktladung bewege sich auf der Bahn r(t), dann sind Ladungs- und Stromdichte gegeben durch

$$\varrho(\boldsymbol{x},t) = q\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t)), \quad j_i(\boldsymbol{x},t) = q\,\dot{r}_i(t)\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t))$$

Die spezielle Lösung für das skalare Potential erhalten wir dann aus

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \int d^3 \boldsymbol{x}' \, \frac{q \, \delta(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'))}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') := \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{r}(t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|/c)$$
(24.1)

Satz 24.1

Bewegte

Punktladung

Seien \mathbf{x}_0 eine einfache Nullstelle von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $D\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ die Jacobi-Matrix von \mathbf{f} , dann Eigenschaft der Dirac-Distribution gilt

$$\delta(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = (\det D\boldsymbol{f})^{-1} \,\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \tag{24.2}$$

Beweis:

Sei G eine Testfunktion, dann gilt nach dem Transformationssatz der Integralrechnung

$$\int \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) G(\boldsymbol{x}) d^3 \boldsymbol{x} = \int \delta(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) G(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}_0) \det(D\boldsymbol{f}) d^3 \boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0) = G(\boldsymbol{x}_0),$$
$$f(\boldsymbol{x}_0) = 0.$$

falls $f(x_0) = 0$.

105

Damit ist $\delta(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')) = (\det D\boldsymbol{f})^{-1}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t_r))$, weil $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}(t_r)) = 0$ mit $t_r = t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t_r)|/c$ und wir erhalten für (24.1)

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \int d^3 x' \, \frac{q \delta(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{r}(t_r))}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \, (\det D \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'))^{-1}$$
(24.3)

Sei nun $\mathbf{R}(t)$ der Abstand vom Beobachtungspunkt x zur Punktladung auf der Bahn r(t):

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t) \tag{24.4}$$

Damit gilt

$$|\boldsymbol{R}(t_r)| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t_r)| = c(t - t_r)$$

Satz 24.2 (Eindeutigkeit des retardierten Zeitpunkts)

Die retardierte Zeit $t_r = t - R(t_r)/c$ ist eindeutig festgelegt.

Beweis: Nehmen wir an, es gebe t_1, t_2 mit $t_1 \neq t_2$ und $c(t - t_1) = R(t_1), c(t - t_2) = R(t_2)$. Es gilt dann

$$c|t_2 - t_1| = |R(t_1) - R(t_2)| =: \Delta R$$

Dabei ist ΔR immer kleiner oder gleich dem in $|t_2 - t_1|$ von der Punktladung q durchlaufenen Bahnsegment Δs . Das heißt

$$c = \frac{\Delta R}{|t_2 - t_1|} \le \frac{\Delta s}{|t_2 - t_1|},$$

womit sich die Punktladung schneller als das Licht bewegen würde. Die Zeiten t_2 und t_1 müssen also gleich sein.

Berechnung der Funktionaldeterminante

Eindeutigkeit der retardierten Zeit

Zur Berechnung der Funktionaldeterminante aus (24.3) notieren wir zunächst eine andere Schreibweise für die Determinante einer 3×3 -Matrix:

 $\det A = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$

Damit können wir det Df(x') berechnen:

$$\det D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') = \varepsilon_{ijk}(\partial'_i f_1) (\partial'_j f_2) (\partial'_k f_3)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \left(\delta_{1i} - \dot{r}_1 \frac{\partial t_r}{\partial x'_i} \right) \left(\delta_{2j} - \dot{r}_2 \frac{\partial t_r}{\partial x'_j} \right) \left(\delta_{3k} - \dot{r}_3 \frac{\partial t_r}{\partial x'_k} \right)$$

$$= 1 - \varepsilon_{ijk} \dot{r}_1 \frac{\partial t_r}{\partial x'_i} \delta_{2j} \delta_{3k} - \varepsilon_{ijk} \dot{r}_2 \frac{\partial t_r}{\partial x'_j} \delta_{1i} \delta_{3k} - \dots$$

$$= 1 - \dot{r}_n \frac{\partial t_r}{\partial x'_n} = 1 - \frac{\dot{r}_i}{c} \frac{x_i - x'_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}$$
(24.5)

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Jetzt können wir die Integration in (24.3) ausführen:

$$\varphi(\mathbf{x},t) = q \int d^3 x' \frac{\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t_r))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - \dot{r}_i(x_i - x_i')/c} = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_r)| - \beta_i(t_r)(x_i - r_i(t_r))}$$

Die Liénard-Wiechert-Potentiale

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = \left. \frac{q}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{R}} \right|_{t_r}$$
(24.6)

Analog können wir die Rechnung für \boldsymbol{A} durchführen und erhalten

Das Skalar
potential φ einer bewegten Punktladung ist also gegeben durch

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \left. \frac{q\,\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{R}} \right|_{t_r}$$
(24.7)

Kapitel 25

Strahlung einer beschleunigten Punktladung

Wie wir im Folgenden sehen werden, führen uns die Liénard-Wiechert-Potentiale auf ein elektrodynamisches Strahlungsfeld. Das heißt, eine beschleunigte Punktladung emittiert elektromagnetische Strahlung.

25.1 Strahlungsfeld

Das elektrische Feld erhalten wir aus den Liénard-Wiechert-Potentiale über

$$oldsymbol{E}(oldsymbol{x},t) = - ext{grad}\,arphi(oldsymbol{x},t) - rac{1}{c}\partial_toldsymbol{A}(oldsymbol{x},t)$$

Dazu berechnen wir als erstes (mit $n_i := R_i/R$)

Berechnung des elektrischen Felds

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi &= \frac{-q}{(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R})^2} \left[\partial_i R - R_k \partial_i \beta_k - \beta_k \partial_i R_k \right] \\ &= \frac{-q}{(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R})^2} \left[n_i + \frac{\partial R}{\partial t_r} \partial_i t_r - \dot{\beta}_k R_k \partial_i t_r - \beta_i - \beta_k \frac{\partial R_k}{\partial t_r} \partial_i t_r \right] \\ &= \frac{-q}{(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R})^2} \left[n_i - \beta_i + \left(\frac{\partial R}{\partial t_r} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t_r} \right) \partial_i t_r \right], \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\partial_{t}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{c(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R})^{2}}\left[q\partial_{t}\boldsymbol{\beta}(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R}) - q\boldsymbol{\beta}\left(\frac{\partial R}{\partial t_{r}}\frac{\partial t_{r}}{\partial t} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t_{r}}\frac{\partial t_{r}}{\partial t} - \boldsymbol{R}\cdot\partial_{t}\boldsymbol{\beta}\right)\right] \\ &= \frac{q}{c(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R})^{2}}\left[\dot{\boldsymbol{\beta}}(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R}) - \boldsymbol{\beta}\left(\frac{\partial R}{\partial t_{r}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t_{r}}\right)\right]\frac{\partial t_{r}}{\partial t}\end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergibt das

$$E_{i} = \frac{q}{(R-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R})^{2}} \left[n_{i} - \beta_{i} - \frac{\dot{\beta}_{i}}{c} \frac{\partial t_{r}}{\partial t} (R-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{R}) + \left(\frac{\partial R}{\partial t_{r}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t_{r}}\right) \left(\partial_{i}t_{r} + \frac{\beta_{i}}{c} \frac{\partial t_{r}}{\partial t}\right) \right]$$

Dafür wollen wir zunächst die Größen $\frac{\partial t_r}{\partial t}, \frac{\partial t_r}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t_r}$ und $\frac{\partial R}{\partial t_r}$ berechnen:

•
$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 + \frac{1}{c} \frac{x_i - r_i(t_r)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t_r)|} \frac{\partial r_i(t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}|_{t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t}$$
$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}} \Big|_{t_r}$$
(25.1)

•
$$\partial_{i}t_{r} = -\frac{1}{c}\frac{x_{k} - r_{k}(t_{r})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t_{r})|} \left(\delta_{ki} - \dot{r}_{k}(t_{r})\frac{\partial t_{r}}{\partial x_{i}}\right) = -\frac{1}{c}n_{i} + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}\partial_{i}t_{r}$$
$$\partial_{i}t_{r} = -\frac{1}{c}\left.\frac{n_{i}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}}\right|_{t_{r}}$$
(25.2)

•
$$\frac{\partial R}{\partial t_r} = -\frac{\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t_r))}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t_r)|} = -c \ \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\beta}|_{t_r}$$
(25.3)

•
$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t_r} = -c\,\boldsymbol{\beta}(t_r)$$
 (25.4)

Damit

$$E_{i} = \frac{q}{R^{2}(1-\beta\cdot\mathbf{n})^{2}} \left[n_{i} - \beta_{i} - \frac{\dot{\beta}_{i}R}{c} - \left(-c\,\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} - \dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\mathbf{R} + c\,\boldsymbol{\beta}^{2} \right) \left(\frac{n_{i} - \beta_{i}}{c(1-\beta\cdot\mathbf{n})} \right) \right]$$

$$= \frac{q}{R^{2}(1-\beta\cdot\mathbf{n})^{3}} \left[\left(n_{i} - \beta_{i} - \frac{\dot{\beta}_{i}R}{c} \right) (1-\beta\cdot\mathbf{n}) - (n_{i} - \beta_{i}) \left(\beta^{2} - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta} - \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{R}}{c} \right) \right]$$

$$= \frac{q}{R^{2}(1-\beta\cdot\mathbf{n})^{3}} \left[(n_{i} - \beta_{i})(1-\beta^{2}) + \frac{R}{c} \left((n_{i} - \beta_{i})(\mathbf{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\beta}_{i}(n^{2} - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}) \right) \right]$$

$$= \frac{q(n_{i} - \beta_{i})}{R^{2}\gamma^{2}(1-\beta\cdot\mathbf{n})^{3}} + \frac{q\left[\mathbf{n}\times\left((\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) \right]_{i}}{c\,R(1-\beta\cdot\mathbf{n})^{3}}$$

Das elektrische Feld einer beschleunigten Punktladung ist somit gegeben durch

Feld einer beschleunigten Punktladung

$$\boldsymbol{E} = \left. \frac{q \left(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta} \right)}{R^2 \gamma^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})^3} \right|_{t_r} + \left. \frac{q \, \boldsymbol{n} \times \left((\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right)}{c \, R \left(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n} \right)^3} \right|_{t_r}$$
(25.5)

Eine analoge Rechnung für $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ liefert

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} \qquad (25.6)$$

Bemerkungen 25.1 (Diskussion)

 (i) Aus (25.6) folgt sofort, dass das magnetische Feld einer beschleunigten Punktladung senkrecht zum elektrischen Feld und senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Beobachter und Ladung steht.

- (ii) Das elektrische Feld (25.5) besteht aus einem Term $\propto 1/R^2$ und einem Term $\propto 1/R$.
- (iii) Im Spezialfall einer ruhenden Punktladung ($\beta \equiv 0$) ergibt sich notwendigerweise das Coulombfeld einer Punktladung:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q\,\boldsymbol{n}}{R^2}$$

(iv) Für eine gleichförmig bewegte Punktladung ($\dot{\beta} \equiv 0$) bleibt nur der erste Term ($\propto 1/R^2$) in (25.5).

Strahlungsfeld

(v) Der zweite ist der charakteristische Term für eine beschleunigte Punktladung. Dieser verursacht das bereits angesprochene *Strahlungsfeld*. Qualitativ können wir das verstehen, wenn wir den Poyntingvektor betrachten, dessen Betrag den Energiefluss pro Zeit und Fläche (Energiestromdichte) angibt. Da $B \propto E$, ist nun $S \propto E B \propto 1/R^2$. Die gesamte Energie, die pro Zeit abtransportiert wird ist damit

$$\mathcal{E} \propto |\mathbf{S}| A \propto \frac{1}{R^2} R^2 = const.$$

Das heißt, die abgestrahlte Energie ist unabhängig von der Entfernung zur beschleunigten Punktladung konstant. Diese Eigenschaft kann nur von elektromagnetischer *Strahlung* erfüllt werden.

25.2 Strahlungsverlust

25.2.1 Strahlstärke

Im Folgenden wollen wir nur das Strahlungsfeld der Punktladung betrachten, das heißt den zweiten Term von (25.5). Mit dem Poynting-Vektor $S = \frac{c}{4\pi} (E \times B)$ lässt sich die Strahlungsleistung $P' := \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ über

$$dP' = \boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n} R^2 d\Omega$$

wegen div $S = \partial_t W$ berechnen. Aus (25.6) folgt

$$dP' = \frac{c R^2}{4\pi} \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \ d\Omega = \frac{cR^2}{4\pi} |\boldsymbol{E}|^2 \, d\Omega$$

Die Strahlungsleistung am Beobachtungsort muss aber nicht auf t, sondern auf t_r bezogen werden. Man erhält wegen $dt_r = dt/(1 - \beta \cdot \mathbf{n})$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} \right) = \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}) \right) = \left. \frac{dP'}{d\Omega} (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n}) \right|_{t_r}$$

Strahlstärke

für die sog. Strahlstärke, die Strahlungsleistung pro Raumwinkel. Diese ergibt sich dann zu

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\left| \boldsymbol{n} \times \left((\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{n})^5}$$
(25.7)

Man sieht, dass diese nicht vom Abstand R von der Quelle abhängt.

Bemerkungen 25.2 (Spezialfälle)

Winkelabhängigkeit der Strahlstärke

Larmor-Formel

Bedingungen an P

i) Im nichtrelativistischen Fall (
$$\beta \ll 1$$
) ergibt sich

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \sin^2 \vartheta, \qquad (25.8)$$

wenn ϑ der Winkel zwischen der Beschleunigungsrichtung und der Verbindungslinie zum Beobachtungsort x ist. Das bedeutet, die Abstrahlung ist senkrecht zur Beschleunigungsrichtung am stärksten.

(ii) Ist die Beschleunigungsrichtung dieselbe, wie die Bewegungsrichtung $(\dot{\beta} \| \beta)$, so gilt (im relativistischen Fall)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5}$$

Im Allgemeinen ist die Abstrahlung also nicht senkrecht zur Beschleunigungsrichtung am stärksten, sondern in Richtung eines Winkels ϑ_{max} . Dieser ist gegeben durch

$$\cos\vartheta_{max} = \frac{\sqrt{1+15\beta^2-1}}{3\beta}$$

25.2.2 Strahlungsverlust im nichtrelativistischen Fall

Die beschleunigte Punktladung verliert wegen der endlichen Strahlungsleistung $P = \frac{d\mathcal{E}}{dt_r}$ ständig an Energie. Für den Fall $\beta \ll 1$ erhalten wir aus (25.8)

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \int \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \, 2\pi \int_{-1}^{1} (1 - \cos^2 \vartheta) \, d\cos \vartheta$$
$$= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \dot{\beta}^2 \tag{25.9}$$

Diese Beziehung wird Larmor-Formel genannt.

25.2.3 Strahlungsverlust relativistischer Punktladungen

Um die abgestrahlte Leistung P für relativistische Geschwindigkeiten zu erhalten, suchen wir einen allgemeinen Ausdruck für (25.9). Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist dabei, dass sich die Energie $d\mathcal{E}$ unter Lorentz-Transformationen wie die Zeitkomponente eines Vierervektors verhält. Wegen

 $d\mathcal{E} = P \, dt$

ist P invariant unter Lorentz-Transformationen, also ein Lorentz-Skalar. Um einen relativistischen Ausdruck für die Leistung zu erhalten, müssen außerdem folgende Bedingungen erfüllt werden:

- (i) Für $\beta \ll 1$ soll P in die bekannte Form (25.9) übergehen.
- (ii) Aus (25.7) sehen wir, dass die Leistung eine Funktion von β und deren ersten zeitlichen Ableitung $\dot{\beta}$ sein muss. Höhere Ableitungen können nicht auftreten.

Gehen wir nun von Gl. (25.9)

$$P_{nr} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)^2$$

aus und ersetzen den Impuls $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ durch den Viererimpuls $p^{\mu} = \gamma m(c, \boldsymbol{v})$ und dt durch die Eigenzeit $d\tau = dt/\gamma$:

$$P = \pm \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

Die angegebene Form ist die einzige Möglichkeit, obige Bedingungen an P zu erfüllen, denn die Vierer-Vektoren p^{μ} und $dp^{\mu}/d\tau$ sind die einzigen, die zur Konstruktion des Lorentz-Skalars P dienen. Und es ist $p_{\mu}p^{\mu} = \mathcal{E}^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$ und $p_{\mu}\frac{dp^{\mu}}{d\tau} \propto \frac{d}{d\tau}(p_{\mu}p^{\mu}) = 0$. Es bleibt also nur die Form in (25.2.3). Um zu sehen, dass wir daraus im Grenzübergang $\beta \to 0$ Ausdruck (25.9) erhalten, benutzen wir die in Abschnitt 4.1 gezeigte Beziehung $\dot{\mathcal{E}} = \dot{p} \cdot v$. Damit ergibt sich

$$\frac{dp_u}{d\tau}\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathcal{E}}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2 = \beta^2 \left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2 \xrightarrow{\beta \to 0} - \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2$$

Wir wählen deshalb das negative Vorzeichen:

$$P = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \frac{dp_{\mu}}{d\tau} \frac{dp^{\mu}}{d\tau}$$
(25.10)

Mit $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ und $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\mu}}{d\tau} \frac{dp^{\mu}}{d\tau} &= \gamma^2 m^2 c^2 \dot{\gamma}^2 - \gamma^2 m^2 c^2 (\beta \dot{\gamma} + \dot{\beta} \gamma) \\ &= c^2 m^2 \gamma^6 (\beta \cdot \dot{\beta})^2 - c^2 \gamma^4 m^2 \dot{\beta}^2 - 2c^2 m^2 \gamma^6 (\beta \cdot \dot{\beta})^2 \\ &= -c^2 m^2 \gamma^6 \left((\beta \cdot \dot{\beta})^2 + (1 - \beta^2) \dot{\beta}^2 \right) \\ &= -c^2 m^2 \gamma^6 \left(\dot{\beta}^2 - (\beta \times \dot{\beta})^2 \right) \end{aligned}$$

Wir finden somit

Relativistische

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \left[\dot{\beta}^2 - (\beta \times \dot{\beta})^2 \right]$$
(25.11)

Bemerkung 25.3 (Spezialfälle)

• Für geradlinige Beschleunigung $(\boldsymbol{\beta} \| \boldsymbol{\dot{\beta}})$ ist

$$P_{\parallel} = \frac{2q^2}{3c} \gamma^6 \dot{\beta}^2 = \frac{2q^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2$$
(25.12)

wie man leicht aus obiger Rechnung entnehmen kann.

• Wird senkrecht zur Bewegungsrichtung beschleunigt $(\beta \perp \dot{\beta})$, so ist

$$P_{\perp} = \frac{2q^2}{3c} \gamma^4 \dot{\beta}^2 = \frac{2q^2}{3m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 > P_{\parallel}$$

$$(25.13)$$

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Kapitel 26

Dipolstrahlung

26.1Potentiale der Dipolstrahlung

Nun wollen wir den allgemeineren Fall einer lokalisierten Ladungs- und Stromverteilung betrachten. Dafür zerlegen wir zunächst die zeitabhängigen Größen in deren Frequenzkomponenten:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = \int \tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x},\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Aus (23.11) folgt

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \int d\omega \ \frac{1}{c} \int d^3 x' \frac{\tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}',\omega)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} e^{-i\omega t_r} = \int \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

mit

Fouriertransformierte des retardierten Vektorpotentials

$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},\omega) = \frac{1}{c} \int d^3 x' \, \frac{\tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}',\omega)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \, e^{i\omega|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c}$ (26.1)

Bemerkung 26.1 (Beziehung zum Skalarpotential)

Die retardierten Potentiale müssen die Lorenz-Eichbedinung $\frac{1}{c}\partial_t \varphi + \operatorname{div} A = 0$ erfüllen. Deshalb können wir aus bekanntem \tilde{A} auf $\tilde{\varphi}$ schließen:

$$\int d\omega \left[-\frac{i\omega}{c} \tilde{\varphi} + \operatorname{div} \tilde{A} \right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\varphi} = \frac{c}{i\omega} \operatorname{div} \tilde{A}$$
(26.2)

1. Näherung: $a \ll r$ Um (26.1) zu vereinfachen, führen wir verschiedene Näherungen durch. Als erstes nehmen wir an, dass die Ausdehnung a der Quelle (Ladungsverteilung) klein gegenüber dem Abstand $r := |\mathbf{x}|$ von Quelle und Beobachter ist. Da sich $r' := |\mathbf{x}'|$ in der Größenordnung von a aufhält, ist auch $r'/r \ll 1$. Aus dem Kapitel über Multipolentwicklung wissen wir

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'}{r}\cos\theta + \dots\right) = \frac{1}{r} \left(1 + O\left(\frac{r'}{r}\right)\right)$$

Aus einer Taylorentwicklung von $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ folgt

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| = r - \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}'}{r} + O\left(\frac{r^{2}}{r^{2}}\right) = r\left(1 - \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}'}{r} + O\left(\frac{r^{2}}{r^{2}}\right)\right)$$

Also erhalten wir unter Vernachlässigung der Terme mit höherer Ordnung in r'/r:

$$\frac{e^{i\omega|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \approx \frac{1}{r} e^{ikr} e^{-ik\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}'}$$

Daraus ergibt sich für die Fourierkomponente des retardierten Potentials

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},k) \approx \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' \, \tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}',k) \, e^{-ik\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}'} \tag{26.3}$$

 2. Näherung: Dieses Resultät lässt sich noch weiter vereinfachen, wenn wir annehmen, dass die Oszillatio-Nichtrelativistische nen der Ladungsverteilung nichtrelativistisch sind:
 Oszillationen

 $r'\omega < a\omega \ll c \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \gg a$

Deshalb gilt auch $k\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}' \ll 1$ und damit $e^{-ik\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}'} \approx 1$. Wir erhalten

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},k) = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' \,\tilde{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}',k)$$
(26.4)

nhang Das verbleibende Integral können wir auf eine bekannte Größe zurückführen:

Zusammenhang zum el. Dipolmoment

$$\int d^3x \,\tilde{j}_i = \int d^3x \,\tilde{j}_k \delta_{ki} = \int d^3x \,\tilde{j}_k \partial_k x_i = -\int d^3x \, x_i \,\partial_k \tilde{j}_k$$

Dabei wurde beim letzten Schritt partiell integriert. Die Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$ geht im Frequenzraum in die Gleichung $i\omega\tilde{\rho} = \operatorname{div}\tilde{\boldsymbol{j}}$ über. Deshalb finden wir

mit der Fouriertransformierten $\tilde{\mathfrak{p}}(k)$ des elektrischen Dipoloments $\mathfrak{p}(t)$. Schließlich ergibt sich

$$\int d^3x \, \tilde{j}_i(\boldsymbol{x}, k) = -i\omega \int x_i \tilde{\varrho}(\boldsymbol{x}, k) \, d^3x = -i\omega \, \tilde{\mathfrak{p}}_i(k)$$

Vektorpotential der Dipolstrahlung

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},k) = -ik\,\tilde{\mathfrak{p}}(k)\,\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (26.5)$$

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Die Rücktransformation in den Ortsraum liefert¹

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = -\int ick\,\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}(k)\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\,dk \tag{26.6}$$

26.2 Felder der Dipolstrahlung

Für Funktionen, die nur von $|\mathbf{x}|$ abhängen gilt: $\partial_i f(r) = n_i \partial_r f(r)$. Nutzen wir dies um die Fouriertransformierte $\tilde{B}(\mathbf{x}, k)$ des Magnetfelds zu berechnen:

$$\tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x},k) = \operatorname{rot} \tilde{\boldsymbol{A}}(r,k) = \boldsymbol{n} \times \partial_r \tilde{\boldsymbol{A}}(r,k) = -ik\boldsymbol{n} \times \tilde{\mathfrak{p}} \, \partial_r \frac{e^{ikr}}{r}$$

3. Näherung: $r \gg \lambda$ Führen wir eine weitere Näherung durch, nämlich $\partial_r (e^{ikr}/r) \approx ike^{ikr}/r$ für $r \gg \lambda$, so ergibt sich

Felder der Dipolstrahlung im Frequenzraum

$$\tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x},k) = k^2 \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\mathfrak{p}} \frac{e^{ikr}}{r}$$
(26.7)

Da die Stromdichte j nur innerhalb einer Umgebung der Ladungsverteilung mit Radius a von null verschieden ist, gilt außerhalb rot $B = \frac{1}{c} \partial_t E$. Im Frequenzraum gilt deshalb

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},k) = \frac{i}{k} \operatorname{rot} \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},k) = \frac{i}{k} \boldsymbol{n} \times \partial_{\boldsymbol{r}} \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},k) \approx \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},k) \times \boldsymbol{n}$$

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = \tilde{\boldsymbol{B}} \times \boldsymbol{n} \qquad (26.9)$$
(26.8)

Bemerkung 26.2 (Eigenschaften der Felder)

Die Felder sind im Mittel proportional zu 1/r; diese Eigenschaft charakterisiert sie als Strahlungsfeld. Das elektrische und magnetische Feld stehen zueinander senkrecht und beide stehen senkrecht zu n, also senkrecht zur Verbindungslinie von Quelle und Beobachter. Außerdem haben E- und B-Feld denselben Betrag.

26.3 Energiestrom und Leistung

Im Folgenden wollen wir von einer harmonischen Frequenzzerlegung ausgehen, d.h. die Fouriertransformierten der entsprechenden Größen sind nur für eine spezielle Frequenz ω ungleich null:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}, \ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = \tilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$$

¹Der Term $e^{i(kr-\omega t)}/r$ beschreibt das Verhalten einer Kugelwelle.

Man kann zeigen (z.B. in den Übungen zur Elektrodynamik im SoSe 08 – Tutorium I), dass das zeitliche Mittel des Poyntingvektors aus den Feldern in komplexer Notation durch $\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} E \times B^*$ gegeben ist. Hier ergibt sich also

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \tilde{\boldsymbol{E}} \times \tilde{\boldsymbol{B}}^* = \frac{c}{8\pi} \tilde{\boldsymbol{E}} \tilde{\boldsymbol{B}}^* \, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \frac{c}{8\pi} |\tilde{\boldsymbol{B}}|^2 = \boldsymbol{n} \frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} \, |\boldsymbol{n} \times \tilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}|^2 \tag{26.10}$$

Wegen $dP = \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} r^2 d\Omega$ gilt für die Strahlungsleistung pro Raumwinkel (Strahlstärke)

Strahlstärke eines Dipols

Energiestrom der Dipolstrahlung

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \boldsymbol{n} \cdot \langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} k^4 |\boldsymbol{n} \times \tilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}|^2$$
(26.11)

Bemerkung 26.3

Für $|\mathbf{n} \times \tilde{\mathfrak{p}}|^2$ können wir auch schreiben

$$\tilde{\mathfrak{p}}_{i}n_{j}\,\tilde{\mathfrak{p}}_{l}n_{m}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = |\mathfrak{p}|^{2} - |\boldsymbol{n}\cdot\tilde{\mathfrak{p}}|^{2} \tag{26.12}$$

Beispiel 26.1 (Oszillierende Punktladung)

en Das Dipolmoment einer entlang einer Achse (hier z-Achse) oszillierenden Punktladung ist durch

$$\mathfrak{p}(t) = qa\left(0, 0, \cos\omega t\right) = \Re\left(qa\,\hat{e_z}\,e^{-i\omega t}\right) \equiv \Re\left(\tilde{\mathfrak{p}}\,e^{-i\omega t}\right)$$

gegeben, wenn a die Amplitude der Oszillation ist. Hier erhalten wir also $\tilde{\mathfrak{p}} = qa \, \hat{e_z}$. Wir finden

$$|\boldsymbol{n} \times \tilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}| = |\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}| \sin \vartheta = qa \, \sin \vartheta \quad \Rightarrow \, \langle S \rangle, \frac{dP}{d\Omega} \propto \sin^2 \vartheta$$

Die Strahlung des schwingenden Dipols verschwindet somit in Oszillationsrichtung und ist senkrecht zu dieser maximal.

Beispiel 26.2 (Ladung auf Kreisbahn)

Befindet sich eine Ladung (z.B. das Elektron) auf einer Kreisbahn um den Ursprung, so ist das Dipolmoment durch

$$\mathfrak{p}(t) = qa\left(\cos\omega t, \sin\omega t, 0\right) = \Re\left[qa\left(1, i, 0\right)e^{-i\omega t}\right]$$

gegeben. Also ist $\tilde{\mathfrak{p}} = qa(1, i, 0)$. Damit

$$|\boldsymbol{n} \times \tilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}|^2 = |\tilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}|^2 - |\boldsymbol{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}|^2 = 2q^2a^2 - q^2a^2|n_x + in_y|^2 = q^2a^2(2 - \sin^2\vartheta)$$

Hier sind also $\langle S \rangle$, $\frac{dP}{d\Omega} \propto (1 + \cos^2 \vartheta)$, d.h. entlang der Symmetrieachse (z-Achse) ist die Abstrahlung maximal und senkrecht dazu sieht man nur die lineare Oszillation.

Punktladung in Kreisbewegung

Strahlungsverhalten eines linearen Oszillators Sind alle Komponenten des Dipolmoments $\mathfrak{p}(t)$ in gleicher Phase, so kann man schreiben

$$|\boldsymbol{n} imes \tilde{\mathfrak{p}}|^2 = |\tilde{\mathfrak{p}}|^2 \sin^2 \vartheta$$

Damit erhält man für elektrische Dipolstrahlung $(E1)^2$

Elektrische Dipolstrahlung (E1)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |\tilde{\mathbf{p}}|^2 \sin^2 \vartheta \qquad (26.13)$$

Und somit $P = \frac{ck^4}{3} |\tilde{\mathfrak{p}}|^2$.

Bemerkungen 26.4

(i) Diese Formeln stimmen mit den Beziehungen aus dem letzten Kapitel über beschleunigte Punktladungen überein, denn setzt man z.B. $r(t) = a \cos \omega t$, so ist nach der Larmor-Formel

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \langle \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \rangle = \frac{ck^4}{3} q^2 a^2$$

 (ii) Die obigen Überlegungen und Näherungen gelten nur in der sog. Fernzone (a ≪ λ ≪ r). Als Nahzone bezeichnet man den Bereich, in dem a ≪ r ≪ λ gilt. Hier können wir für die Fouriertransformierte des retardierten Vektorpotentials schreiben:

$$\tilde{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c} \int d^3 x' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} e^{ik|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \approx \frac{1}{c} \int d^3 x' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|},$$

was dem Ausdruck für das Vektorpotential der Magnetostatik entspricht. Man nennt deshalb

 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) \, e^{-i\omega t}$

quasistatisch. Der Bereich zwischen Nah- und Fernzone wird Zwischenzone ($a \ll r \approx \lambda$) genannt. Hier sind die Beziehungen komplizierter.

(iii) Berücksichtigt man in (26.3) auch den nächst höheren Term von $e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'} = 1 - ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}' + \dots$, so erhält man zusätzlich

$$ik\frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3x'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\tilde{\mathbf{j}} = \frac{ike^{ikr}}{cr}\int d^3x'\underbrace{\frac{1}{2}\left((\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}')\tilde{\mathbf{j}} + (\mathbf{n}\cdot\tilde{\mathbf{j}})\mathbf{x}'\right)}_{E2} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{x}'\times\mathbf{j})\times\mathbf{n}}_{M1}$$

Die Terme E2 führen zu *elektrischer Quadrupolstrahlung*, wobei aus M1 *magnetische Dipolstrahlung* entsteht.

Quasistatisches Potential der Nahzone

E2- und M1-Strahlung

 $^{^2\}mathrm{Man}$ bezeichnet mit Ek und M
k elektrische und magnetische $2^k\text{-}\mathrm{Strahlung}.$

Kapitel 27

Streuung von Licht

Hier wollen wir kurz darauf eingehen, wie die Streuung von Licht an gebundenen Elektronen behandelt werden kann. Dabei vernachlässigen wir relativistische Effekte ($\beta \ll 1$).

Trifft eine einfallende ebene Welle

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{E}_0 \, e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$$

auf ein gebundenes Elektron, so wird nach dem klassischen Oszillatormodell aus Abschnitt 20.1 ein Dipolmoment induziert:

Induziertes Dipolmoment

$$\mathbf{p}(t) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Dieses zeitabhängige Dipolmoment verursacht die Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen mit der Strahlstärke

$$\frac{dP}{d\Omega} \stackrel{(26.13)}{=} \frac{c}{8\pi} k^4 |\tilde{p}|^2 \sin^2 \vartheta = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} |\boldsymbol{E}_0|^2 \tag{27.1}$$

Definition 27.1 (Differentieller Wirkungsquerschnitt). Die Größe

Def.: Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{|\langle \mathbf{S} \rangle|} \frac{dP}{d\Omega} \tag{27.2}$$

mit der einfallenden Energiestromdichte S wird differentieller Wirkungsquerschnitt genannt. Wird dieser über den ganzen Raumwinkel integriert, so erhält man den totalen (oder integralen) Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \, d\Omega \tag{27.3}$$

Hier ergibt sich wegen $|\langle S \rangle| = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \sin^2 \vartheta \tag{27.4}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)}$$
(27.5)

Bemerkungen 27.1 (Spezialfälle)

Thomson- und

Rayleighstreuung

• Thomsonstreuung: $\omega_0 = \gamma = 0$ (freies Elektron) oder $\omega \gg \omega_0, \omega \gg \gamma$ Hier ist der totale Wirkungsquerschnitt gegeben durch

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 =: \frac{8\pi}{3} r_e^2 \tag{27.6}$$

mit dem klassischen Elektronenradius $r_e.$

• Rayleighstreuung: $\omega \ll \omega_0$ Hier gilt

$$\sigma(\omega) = \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \tag{27.7}$$

Teil VII

Anhang

Anhang A

Mehrdimensionale Analysis

Für die zusätzlichen Inhalte im folgenden Kapitel habe ich mich an *Mathematik für Physiker* und Mathematiker, Band 2 von Rainer Wüst und Applied Mathematics von Peter J. Olver orientiert und diese selbst an die Vorlesung angepasst, weswegen sicherlich einige Fehler enthalten sind, über deren Mitteilung ich mich freuen würde.

A.1 Felder, Tensoren und Drehungen

A.1.1 Drehungen

Drehmatrix

Def.: Skalarfeld

Wie wir bereits in der Vorlesung T1: Theoretische Mechanik kennengelernt haben, kann man die Transformation von Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$ unter Drehungen des Koordinatensystems mithilfe einer Drehmatrix R beschreiben:

$$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} \quad :\Leftrightarrow \quad x'_i = R_{ij}x_j := \sum_j R_{ij}x_j$$

Eine solche Drehmatrix ist orthogonal $(R^{-1} = R^T)$ und beispielsweise für eine einfache Drehung (um die z-Achse um den Winkel α) von der Form

 $R = \left(\begin{array}{rrrr} \cos \alpha & \sin \alpha & 0\\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

A.1.2 Felder

Definition A.1 (Skalarfeld).

Eine Abbildung $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x})$ heißt Skalarfeld.

Im gedrehten Koordinatensystem soll der Funktionswert $\varphi(\mathbf{x})$ aus dem ungedrehten System erhalten bleiben: $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(R^T \mathbf{x}') =: \varphi'(\mathbf{x}').$

Definition A.2 (Vektorfeld).

Eine Abbildung $\mathbf{A} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{x})$ wird Vektorfeld genannt. Dabei sei $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ als Element eines weiteren Exemplars des \mathbb{R}^3 mit Koordinatenursprung am Punkt \mathbf{x} interpretiert.

Unter Drehungen des Koordinatensystems verhält sich ein Vektorfeld gemäß A'(x') = RA(x).

A.1.3 Tensoren

Definition A.3 (Tensor).

Def.: Tensor

Def.: Vektorfeld

Ein Tensor n-ter Stufe ist eine n-fach indizierte Größe $T = (T_{i_1\cdots i_n}) =: T_{i_1\cdots i_n}$, welche unter einem Koordinatenwechsel folgendem Transformationsgesetz genügt:

$$T'_{i_1\cdots i_n}(x') = R_{i_1j_1}\cdots R_{i_nj_n}T_{j_1\cdots j_n}(x)$$
(A.1)

Beispiel A.1

Sind a, b zwei Vektoren, so ist durch $T_{ij} = A_i B_j$ ein Tensor zweiter Stufe definiert.

Bemerkung A.1

Ein als Tensorgleichung formuliertes Gesetz ist automatisch kovariant (forminvariant) unter räumlichen Drehungen. Die durch ein solches Gesetz beschriebene Physik ist somit unabhängig von der Orientierung des Koordinatensystems (z.B. F = ma).

Definition A.4 (Pseudotensor).

Def.: Pseudotensor Gilt für $S_{i_1 \cdots i_n}$ unter einem Koordinatenwechsel

$$S'_{i_1\cdots i_n} = (\det R) \ R_{i_1j_1}\cdots R_{i_nj_n} S_{j_1\cdots j_n}$$
(A.2)

Beispiel A.2

Sei R = P := -1 (Raumspiegelung/Paritätstransformation), so nennt man

- (i) ψ Pseudoskalar, falls gilt: $\psi'(P\mathbf{x}) = (\det P) \ \psi(\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x});$
- (ii) **A** Pseudovektor, falls gilt: $B'_i(P\mathbf{x}) = (\det P) P_{ij}B_j(\mathbf{x}) = B_i(\mathbf{x})$. Dabei sollte nicht verwechselt werden, dass für ein Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ gilt: $A'_i(P\mathbf{x}) = P_{ij}A_j(\mathbf{x}) = -A_j(\mathbf{x})$.

Satz A.1 (Invariante Tensoren)

Invariante Tensoren

- (i) Das Kronecker-Delta δ_{ij} ist ein Tensor zweiter Stufe und invariant unter orthogonalen Transformationen.
- (ii) Der Levi-Civitá-Tensor ϵ_{ijk} ist ein Pseudotensor und invariant unter orthogonalen Transformationen.

Beweis:

- 1. $\delta'_{ij} = R_{ik}R_{jl}\delta_{kl} = R_{ik}R_{jk} = R_{ik}R_{kj}^T = \delta_{ij}$
- 2. Es ist $R_{il}R_{jm}R_{kn}\epsilon_{lmn} = (\det R) \epsilon_{ijk}$. Da det $R = \pm 1$ und $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$, gilt $\epsilon'_{ijk} = (\det R) R_{il}R_{jm}R_{kn}\epsilon_{lmn}$.

A.1.4 Verjüngung

Die sogenannte Verjüngung weitet den Begriff der Spur auf Tensoren aus.

Definition A.5 (Verjüngung).

Def.: Verjüngung

Als Verjüngung bezeichnet man eine lineare Abbildung $C : T_{i_1 \cdots i_n} \mapsto T_{i_1 \cdots i_{n-2}}$, also eine Kontraktion des Tensors um zwei Stufen.

Beispiel A.3

Sei $T =: T_{ij}$ ein Tensor zweiter Stufe (Matrix), dann ist durch $\sum_{ij} \delta_{ij} T_{ij} = \sum_i T_{ii} = \text{Tr}(T)$ ein Tensor nullter Stufe (Skalar) gegeben. Die Spur einer Matrix ist also eine spezielle Verjüngung.

A.2 Mehrdimensionale Differentiation

A.2.1 Die Ableitung

Im Folgenden sei $m,n\in\mathbb{N},\,f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,\,\mathcal{D}(f)$ offen, $\pmb{x}\in\mathcal{D}(f)$ vorgegeben.

Definition A.6 (Landau-Symbol o).

Seien $l \in \mathbb{N}, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, g(\boldsymbol{x}) \neq 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}(g), \, \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g).$ Dann sei

$$f(\boldsymbol{x}) = o\left(g(\boldsymbol{x})\right) \quad (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0) \quad :\Leftrightarrow \quad \frac{\|f(\boldsymbol{x})\|}{\|g(\boldsymbol{x})\|} \to 0 \quad (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0) \tag{A.3}$$

Definition A.7 (Differenzierbarkeit, Ableitung).

f ist an der Stelle x differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $L \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ existiert, sodass

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}) = L\boldsymbol{u} + o(\boldsymbol{u}) \quad (\boldsymbol{u} \to 0)$$
(A.4)

L ist eindeutig bestimmt und heißt Ableitung von f an der Stelle x. Man schreibt

$$Df(x) := L \tag{A.5}$$

Im Folgenden sei f stets an der Stelle x differenzierbar.

Bemerkung A.2 (Partielle Ableitung)

Ist n = 1 – bzw. betrachtet man nur eine Komponentenfunktion – so wird die partielle Ableitung nach der k-ten Variablen

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m) \right]$$

auch mit $D_k f(x)$ oder $\partial_k f(x)$ bezeichnet.

Satz A.2 (Darstellung der Ableitung)

Da f in x differenzierbar ist, sind die Koordinatenfunktionen f_i $(i \in \{1, ..., n\})$ von f an der Stelle x partiell differenzierbar und die Ableitung von f an der Stelle x ist die Funktionalmatrix (Jakobi-Matrix):

$$Df(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\boldsymbol{x}) & \cdots & D_m f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(\boldsymbol{x}) & \cdots & D_m f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$
(A.6)

Beweis: Da die Ableitung Df(x) eine lineare Abbildung aus $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ist, kann sie als Matrix dargestellt werden. Deshalb können wir wegen Gl. (A.4) mit den Koordinatenfunktionen f_i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ schreiben:

$$f_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) - f_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^m d_{1j}u_j + o(\boldsymbol{u}) \quad (\boldsymbol{u} \to 0)$$

T3: Elektrodynamik

Jakobi-Matrix

Def.: Landau-Symbol o

Def.: Ableitung

Setzen wir nun $\boldsymbol{u} = h\hat{e}_k$ mit $h \in \mathbb{R}$, so ist

$$f_i(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) - f_i(\boldsymbol{x}) = d_{ik}h + o(h) \qquad (h \to 0)$$

Damit ist $d_{ik} \equiv D_k f_i(\boldsymbol{x})$.

In höherdimensionalen Räumen gelten zum Eindimensionalen analoge Rechenregeln für die Differentiation.

A.2.2 Der Gradient

Im Folgenden seien $m \in \mathbb{N}$, ϕ ein Skalarfeld ($\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$), $\mathcal{G} := \mathcal{D}(\phi) \subset \mathbb{R}^m$ offen.

Definition A.8 (Gradient).

Der Gradient des Skalarfelds ϕ ist definiert durch

grad
$$\phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x} \mapsto (D_1 \phi(\boldsymbol{x}) \quad \cdots \quad D_m \phi(\boldsymbol{x}))^T$$
(A.7)

Man schreibt $\nabla \phi := \operatorname{grad} \phi = (D_1 \phi \cdots D_m \phi)^T$.

Bemerkung A.3

(i) Mit obigen Voraussetzungen ist $\nabla \phi(\mathbf{x}) = D\phi(\mathbf{x})$. Das heißt, der Gradient ist die Ableitung eines Skalarfelds und wir können schreiben:

$$\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) - \phi(\boldsymbol{x}) = \nabla \phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u} + o(\boldsymbol{u}) \quad (\boldsymbol{u} \to 0)$$

Gradient unter orth. Transformationen

Def.: Gradient

(ii) Der Gradient verhält sich unter orthogonalen Transformationen $\nabla' \phi' := (D'_1 \phi' \cdots D'_m \phi')^T$ (mit $D'_i := \frac{\partial}{\partial x'_i}$) wie ein Tensor erster Stufe (Vektor):

$$\frac{\partial \phi'(\boldsymbol{x}')}{\partial x'_{i}} = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{x})}{\partial x'_{i}} = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{x})}{\partial x_{j}} \frac{\partial x_{j}}{\partial x'_{i}} = \frac{\partial \phi(\boldsymbol{x})}{\partial x_{j}} R_{ji}^{T} \quad \Rightarrow \quad \nabla' \phi'(\boldsymbol{x}') = R \; \nabla \phi(\boldsymbol{x})$$

Definition A.9 (Richtungsableitung).

Sei $u_0 \in \mathbb{R}^m$ normiert und $t \in \mathbb{R}$, so wird

Richtungsableitung

Def.:

$$D_{u_0}\phi(x) := \lim_{t \to 0} \frac{\phi(x + tu_0) - \phi(x)}{t}$$
(A.8)

die Richtungsableitung von ϕ an der Stelle x in Richtung u_0 genannt.

Bemerkung A.4

(i) Sei speziell $\boldsymbol{u}_0 = \hat{e}_k \ (k \in \{1, \dots, m\})$, so gilt

$$D_{u_0}\phi(\boldsymbol{x}) = D_k\phi(\boldsymbol{x}) \tag{A.9}$$

Das heißt, die Richtungsableitung in Richtung eines euklidischen Einheitsvektors \hat{e}_k ist gerade die partielle Ableitung nach der k-ten Variablen.

(ii) Allgemein gilt

$$D_{u_0}\phi(\mathbf{x}) = \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_0 \tag{A.10}$$

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Beweis: Es ist

$$D_{u_0}\phi(\boldsymbol{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\phi(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{u}_0) - \phi(\boldsymbol{x})) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (D\phi(\boldsymbol{x})t\boldsymbol{u}_0 + o(t\boldsymbol{u}_0))$$
$$= \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}_0 + \lim_{t \to 0} \frac{o(t\boldsymbol{u}_0)}{t} = \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}_0 + \lim_{t \to 0} \frac{o(t\boldsymbol{u}_0)}{t ||\boldsymbol{u}_0||}$$
$$= \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}_0$$

Die Richtungsableitung ist also gerade durch die Projektion des Gradienten in die Richtung u_0 gegeben. Damit können wir mithilfe der Schwarzschen Ungleichung zeigen, dass der Gradient immer in Richtung des steilsten Anstiegs des Skalarfelds $\phi(x)$ zeigt:

(iii) Es gilt

 $|D_{u_0}\phi(\boldsymbol{x})| = |\nabla\phi(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u}_0| \le \|\nabla\phi(\boldsymbol{x})\|\|\boldsymbol{u}_0\| = \|\nabla\phi(\boldsymbol{x})\|$

Die Gleichheit gilt bei der Schwarzschen Ungleichung dann, wenn $\nabla \phi$ und u_0 in die gleiche Richtung zeigen. Somit ist die Steigung von ϕ in diejenige Richtung u_0 am steilsten, die in dieselbe Richtung wie der Gradient zeigt. Obiges beweist ebenso, dass sich das Skalarfeld ϕ senkrecht zum Gradienten nicht ändert.

Der Gradient in Kugelkoordinaten A.2.3

Wege im \mathbb{R}^m und der Tangentialraum

Seien $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^m, \delta \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $\boldsymbol{x}(\cdot) : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^m, t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ sei stetig differenzierbar und $\mathcal{W}_{x_0} := \{ \boldsymbol{x}(\cdot) | \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \}$. Die Elemente von \mathcal{W}_{x_0} kann man sich als Bahnen von Teilchen vorstellen, die zur Zeit t = 0 am Punkt x_0 sind.

Zwei Wege $\boldsymbol{x}(\cdot)$ und $\boldsymbol{y}(\cdot)$ aus \mathcal{W}_{x_0} seien äquivalent, falls ihre Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{y}}$ Äquivalenzrelation zur Zeit t = 0 dieselben sind:

$$\boldsymbol{x}(\cdot) \sim \boldsymbol{y}(\cdot) \quad :\Leftrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \dot{\boldsymbol{y}}(0) \tag{A.11}$$

Alle Elemente, welche dieselbe Äquivalenzrelation erfüllen, gehören einer Äquivalenzklasse $[\boldsymbol{x}(\cdot)]$ an.

Definition A.10 (Tangentialraum).

Der Raum der Äquivalenzklassen

$$T_{x_0} := \{ [\boldsymbol{x}(\cdot)] : \boldsymbol{x}(\cdot) \in \mathcal{W}_{x_0} \}$$
(A.12)

wird Tangentialraum am Punkt x_0 genannt.

Definition A.11 (Skalarprodukt auf T_{x_0}).

Skalarprodukt auf T_{x_0}

Tangentialraum

in \mathcal{W}_{x_0}

Def.:

$$([\boldsymbol{x}(\cdot)], [\boldsymbol{y}(\cdot)])_{T_{x_0}} := (\dot{\boldsymbol{x}}(0), \dot{\boldsymbol{y}}(0)) = \sum_{j=1}^m \dot{x}_j(0) \dot{y}_j(0)$$
(A.13)

ist ein Skalarprodukt¹ auf T_{x_0} erklärt.

¹Mit (\cdot, \cdot) bezeichnen wir im Folgenden immer das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^m

Durch

Die Richtung des Gradienten ist die steilste

Bemerkung A.5

Im Folgenden unterscheiden wir nicht mehr zwischen der Äquivalenzklasse $[\boldsymbol{x}(\cdot)]$ und einem Repräsentanten $\boldsymbol{x}(\cdot) \in [\boldsymbol{x}(\cdot)]$, da uns jeweils nur $\dot{\boldsymbol{x}}(0)$ interessiert.

Koordinatentransformationen, Skalarprodukt in $T_{\Phi(x_0)}$

Wir betrachten eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (Koordinatentransformation). Ein Weg $\mathbf{x}(\cdot) \in T_{x_0}$ wird zu einem Weg

 $\Phi \circ \boldsymbol{x}(\cdot) =: \tilde{\boldsymbol{x}}(\cdot) ,$

der durch den Punkt $\Phi(\boldsymbol{x}_0)$ geht.

Durch das Skalarprodukt $(\boldsymbol{x}(\cdot), \boldsymbol{x}(\cdot))_{T_{x_0}} = (\dot{\boldsymbol{x}}(0), \dot{\boldsymbol{x}}(0)) = |\dot{\boldsymbol{x}}(0)|^2$ ist bis auf konstante Faktoren die kinetische Energie eines Teilchens zur Zeit t = 0 am Ort \boldsymbol{x}_0 gegeben. Diese Eigenschaft des Skalarprodukts in T_{x_0} soll bei Koordinatentransformationen erhalten bleiben. Dazu fordern wir allgemeiner

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}(\cdot), \tilde{\boldsymbol{y}}(\cdot))_{T_{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)}} := (\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(0), \dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}(0))_{T_{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)}} \stackrel{!}{=} (\dot{\boldsymbol{x}}(0), \dot{\boldsymbol{y}}(0))$$

Mit dieser Forderung können wir eine Darstellung des Skalarprodukts in $T_{\Phi(x_0)}$ entwickeln, denn es ist $\dot{\tilde{x}}(0) = D\Phi(x_0)\dot{x}(0)$ und damit $\dot{x}(0) = (D\Phi(x_0))^{-1}\dot{\tilde{x}}(0)$. Und wegen $y(0) = x(0) = x_0$ können wir schreiben

$$\begin{aligned} (\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(0), \dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}(0))_{T_{\varPhi(\boldsymbol{x}_{0})}} &= \left((D\varPhi(\boldsymbol{x}_{0}))^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(0), (D\varPhi(\boldsymbol{x}_{0}))^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}(0) \right) \\ &= \left(\left((D\varPhi(\boldsymbol{x}_{0}))^{-1} \right)^{T} (D\varPhi(\boldsymbol{x}_{0}))^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(0), \dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}(0) \right) \end{aligned}$$

Für unsere Zwecke ist es sinnvoll hier ein Satz aus der Analysis anzuwenden, der es gestattet folgende Umformung durchzuführen:

$$(D\Phi(\boldsymbol{x}_0))^{-1} = D\Phi^{-1}(\Phi(\boldsymbol{x}_0)) =: D\Phi^{-1}(\boldsymbol{z}_0)$$
(A.14)

Skalarprodukt auf $T_{\Phi(x_0)}$

Damit erhalten wir schließlich

$$(\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(0), \dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}(0))_{T_{\boldsymbol{\varPhi}(\boldsymbol{x}_0)}} = \left(D\boldsymbol{\varPhi}^{-1}(\boldsymbol{z}_0)^T D\boldsymbol{\varPhi}^{-1}(\boldsymbol{z}_0) \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(0), \dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}(0) \right)$$
(A.15)

Gradient

Sei nun $\mathcal{G}_{\varphi,x_0}$ eine Abbildung² auf dem Tangentialraum T_{x_0} , definiert über

$$\mathcal{G}_{\varphi,x_0}: T_{x_0} \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x}(\cdot) \mapsto \left. \frac{d}{dt} \varphi(\boldsymbol{x}(t)) \right|_{t=0}$$

Kinetische Energie unter Koordinatentransformation

²Fasst man φ als Potential auf, so gibt $\mathcal{G}_{\varphi,x_0}$ die zeitliche Änderung der potentiellen Energie zur Zeit t = 0 an.

mit einem Skalarfeld $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Nach der Kettenregel ergibt sich

$$\mathcal{G}_{\varphi,x_0}(\boldsymbol{x}(\cdot)) = \frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{x}(t)) = D\varphi(\boldsymbol{x}_0)\dot{\boldsymbol{x}}(0)$$

Dabei kann $D\varphi(\boldsymbol{x}_0)$ als lineares Funktional auf T_{x_0} verstanden werden, welches durch ein Element A aus T_{x_0} mittels des Skalarprodukts dargestellt werden kann: $D\varphi(\boldsymbol{x}_0)\dot{\boldsymbol{x}}(0) = (A, \dot{\boldsymbol{x}}(0))_{T_{x_0}}$. Dieses Element wollen wir mit grad $\varphi(\boldsymbol{x}_0)$ bezeichnen, da in T_{x_0} folgendes gilt:

$$D arphi(oldsymbol{x}_0) \dot{oldsymbol{x}}(0) = (
abla arphi(oldsymbol{x}_0), \dot{oldsymbol{x}}(0)) \quad \Rightarrow \
abla arphi(oldsymbol{x}_0) = A =: \operatorname{grad} arphi(oldsymbol{x}_0)$$

Def.: Gradient im Die definierende Gleichung für den Gradienten in T_{x_0} ist damit

Tangentialraum

$$D\varphi(\boldsymbol{x}_0) = (\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{x}_0), \cdot)_{T_{\boldsymbol{x}_0}}$$
 (A.16)

Gradient in neuen Koordinaten

Sei $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \Phi^{-1}$ mit einer Koordinatentransformation³ Φ . Wir führen im transformierten Raum $T_{\Phi(x_0)}$ eine analoge Abbildung $\mathcal{G}_{\tilde{\varphi},\Phi(x_0)}$ ein:

$$\mathcal{G}_{\tilde{\varphi},\Phi(x_0)}: T_{\Phi(x_0)} \to \mathbb{R}, \tilde{\boldsymbol{x}}(\cdot) \mapsto \left. \frac{d}{dt} \tilde{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) \right|_{t=0} = D\tilde{\varphi}(\underbrace{\Phi(\boldsymbol{x}_0)}_{=\boldsymbol{z}_0}) \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(0)$$

Nun ist einerseits

$$D\tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0) = (\nabla\tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0), \cdot) \qquad (\nabla\tilde{\varphi} = (D_1\varphi \ D_2\varphi \ \cdots \ D_m\varphi)^T)$$

und andererseits können wir den Gradienten in $T_{\Phi(x_0)}$ gemäß Gl. (A.16) einführen über

$$D\tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0) = (\operatorname{grad} \tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0), \ \cdot \)_{T_{\varPhi(\boldsymbol{x}_0)}} \stackrel{(A.15)}{=} \left(D\Phi^{-1}(\boldsymbol{z}_0)^T D\Phi^{-1}(\boldsymbol{z}_0) \operatorname{grad} \tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0), \ \cdot \ \right)$$

Damit ergibt sich

$$\nabla \tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0) = D \Phi^{-1}(\boldsymbol{z}_0)^T D \Phi^{-1}(\boldsymbol{z}_0) \operatorname{grad} \tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0)$$

Mit Gl. (A.14) ergibt sich schließlich als Transformationsgesetz für den Gradienten

grad
$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0) = D\Phi(\boldsymbol{x}_0)D\Phi(\boldsymbol{x}_0)^T \nabla \tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0)$$
 (A.17)

Transformation in Kugelkoordinaten

Spezielle Transformation

Gradient unter

Koordinatentransformation

> Als Beispiel wollen wir den Gradienten in Kugelkoordinaten darstellen. Im Falle der Kugelkoordinaten bietet es sich an, von der Rücktransformation $\Phi^{-1} =: K$ auszugehen:

³Hiermit ist gewährleistet, dass $\tilde{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) = \varphi(\boldsymbol{x}(t))$, wodurch die Funktionswerte des transformierten Potentials mit denen des ursprünglichen übereinstimmen.

$$K: (0,\infty) \times (0,\pi) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, (r,\theta,\phi) \mapsto (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$$

Die Ableitung $D\Phi(\boldsymbol{x}_0) = DK^{-1}(\boldsymbol{x}_0) = DK(\boldsymbol{z}_0)^{-1}$ hat in $T_{\Phi(\boldsymbol{x}_0)}$ die Darstellung

$$DK(\boldsymbol{z}_0) = \begin{pmatrix} \cos\phi_0 \sin\theta_0 & r_0 \cos\phi_0 \cos\theta_0 & -r_0 \sin\phi_0 \sin\theta_0\\ \sin\phi_0 \sin\theta_0 & r_0 \sin\phi_0 \cos\theta_0 & r_0 \cos\phi_0 \sin\theta_0\\ \cos\theta_0 & -r_0 \sin\theta_0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$DK(\boldsymbol{z}_0)^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \cos\phi_0 & \sin\theta_0 \sin\phi_0 & \cos\theta_0\\ \frac{1}{r_0} \cos\theta_0 \cos\phi_0 & \frac{1}{r_0} \cos\theta_0 \sin\phi_0 & -\frac{1}{r_0} \sin\theta_0\\ \frac{1}{r_0} \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & \frac{1}{r_0} \cos\theta_0 \sin\phi_0 & -\frac{1}{r_0} \sin\theta_0 \end{pmatrix}$$

$$DK(z_0)^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \phi_0 & \sin \theta_0 \sin \phi_0 & \cos \theta_0 \\ \frac{1}{r_0} \cos \theta_0 \cos \phi_0 & \frac{1}{r_0} \cos \theta_0 \sin \phi_0 & -\frac{1}{r_0} \sin \theta_0 \\ -\frac{1}{r_0 \sin \theta_0} \sin \phi_0 & \frac{1}{r_0 \sin \theta_0} \cos \phi_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$DK(\boldsymbol{z}_0)^{-1}(DK(\boldsymbol{z}_0)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_0^2 \sin^2 \theta_0} \end{pmatrix}$$

Also

$$\operatorname{grad}\tilde{\varphi}(r_0,\theta_0,\phi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{r_0^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r_0^2\sin^2\theta_0} \end{pmatrix} \nabla\tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0)}{\partial r}\\ \frac{1}{r_0^2}\frac{\partial\tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0)}{\partial \theta}\\ \frac{1}{r_0^2\sin^2\theta_0}\frac{\partial\tilde{\varphi}(\boldsymbol{z}_0)}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$
(A.18)

Um den Gradienten in Kugelkoordinaten darstellen zu können, benötigen wir die Darstellung der Einheitsvektoren $\hat{e}_r, \hat{e}_{\theta}, \hat{e}_{\phi}$ in $T_{\varPhi(x_0)}$. Dazu betrachten wir die speziellen Wege durch z_0

$$\mathbf{r}(t) = (r_0 + t, \theta_0, \phi_0)$$
, $\boldsymbol{\theta}(t) = (r_0, \theta_0 + t, \phi_0)$, $\boldsymbol{\phi}(t) = (r_0, \theta_0, \phi_0 + t)$

Die krummlinigen Einheitsvektoren erhalten wir über

$$\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (1,0,0) , \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}(0) = (0,1,0) , \quad \dot{\boldsymbol{\phi}}(0) = (0,0,1)$$

Bezüglich des Skalarprodukts

$$(\cdot, \cdot)_{T_{\varPhi(x_0)}} = (DK(\mathbf{z}_0)^T DK(\mathbf{z}_0) \cdot, \cdot) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_0^2 \sin^2 \theta_0 \end{pmatrix} \cdot, \cdot \right)$$

sind diese Vektoren orthogonal, aber nicht normiert:

$$\begin{aligned} \|\dot{\boldsymbol{r}}(0)\| &= \sqrt{(\dot{\boldsymbol{r}}(0), \dot{\boldsymbol{r}}(0))_{T(\varPhi(x_0))}} = 1 \\ \|\dot{\boldsymbol{\theta}}(0)\| &= \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\theta}}(0), \dot{\boldsymbol{\theta}}(0))_{T(\varPhi(x_0))}} = r_0 \\ \|\dot{\boldsymbol{\phi}}(0)\| &= \sqrt{(\dot{\boldsymbol{\phi}}(0), \dot{\boldsymbol{\phi}}(0))_{T(\varPhi(x_0))}} = r_0 \sin \theta_0 \end{aligned}$$

Eine mögliche Orthonormalbasis in $T_{\varPhi(x_0)}$ besteht also aus den Elementen

$$\hat{e}_r := (1,0,0) \ , \ \ \hat{e}_\theta := (0,\frac{1}{r_0},0) \ , \ \ \hat{e}_\phi := (0,0,\frac{1}{r_0\sin\theta_0})$$

Gradient in Kugelkoordinaten Gl. (A.18) kann somit geschrieben werden als

$$\operatorname{grad}\tilde{\phi}(r_0,\theta_0,\phi_0) = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}(\boldsymbol{z}_0)\hat{e}_r + \frac{1}{r_0}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}(\boldsymbol{z}_0)\hat{e}_\theta + \frac{1}{r_0\sin\theta_0}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\phi}(\boldsymbol{z}_0)\hat{e}_\phi \tag{A.19}$$

A.2.4 Divergenz, Rotation und der Laplace-Operator

Def.: Divergenz	Definition A.12 (Divergenz). Man nennt das Skalarfeld div $\mathbf{A} := \nabla \times \mathbf{A} = \partial_i A_i$ die Divergenz von \mathbf{A} .
Def.: Rotation (1)	Definition A.13 (Rotation). Das Pseudovektorfeld rot $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \partial_i A_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$ wird Rotation von \mathbf{A} genannt.
Def.: Laplace-Operator	Definition A.14 (Laplace-Operator). Den Operator $\triangle := \partial_i \partial_i = \nabla^2$ nennt man Laplace-Operator. Wendet man diesen auf ein Skalarfeld an, so erhält man die Identität

 $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$

Bemerkung A.6

Es gibt anschauliche Interpretationen der Divergenz und Rotation, auf die an späterer Stelle genauer eingegangen wird, wenn dazu das mathematische Rüstzeug zur Verfügung steht.

A.2.5 Differential

Totales Differential Seien
$$m \in \mathbb{N}, \phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
. Die lineare Abbildung

$$D\phi(\boldsymbol{x}): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \mapsto D\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}$$
(A.20)

wird oft (totales) Differential genannt. Dabei benutzt man häufig die Schreibweise

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_m} dx_m$$

Um zu verstehen, woher diese Schreibweise kommt, führen wir folgende Schritte durch:

(i) Umbenennung: $d\phi(\boldsymbol{x}) := D\phi(\boldsymbol{x})$. Damit wird

$$d\phi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \nabla\phi(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}u_1 + \dots + \frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})}{\partial x_m}u_m$$

(ii) Mit der Vereinbarung, dass wir links und rechts dasselbe x einsetzen, können wir das Argument weglassen. Außerdem verzichten wir auf der linken Seite auf das u, da es rechts abgelesen werden kann:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}u_1 + \dots + \frac{\partial\phi}{\partial x_m}u_m \tag{A.21}$$

(iii) Führen wir nun eine Abbildung g_i ein, welche die spezielle Koordinate x_i zurückgibt:

$$g_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \mapsto x_i$$

Und nennen wir diese Abbildung wie ihren Wert $x_i(\boldsymbol{x}) := g_i(\boldsymbol{x})$, so können wir von diesem Skalarfeld das Differential gemäß Gl. (A.21) bilden:

$$dx_i = Dg_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \frac{\partial x_i}{\partial x_1}u_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial x_m}u_m = u_i$$

Somit ergibt sich schließlich für $d\phi$:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_m} dx_m \tag{A.22}$$

A.3 Kurvenintegrale

A.3.1 Kurven

Definition A.15 (Weg). Seien $a, b \in \mathbb{R}$, a < b, $m \in \mathbb{N}$ und

 $\boldsymbol{\eta}: [a,b] \to \mathbb{R}^m$

eine Abbildung. Ist η stetig, so kann man – wie bereits eingeführt – η als Weg im \mathbb{R}^m bezeichnen. $\eta(a)$ wird dann Anfangspunkt, $\eta(b)$ Endpunkt und der Wertebereich $\mathcal{W}(\eta)$ Spur des Weges η genannt.

Unter dem Begriff *Kurve* versteht man eher die Spur eines Weges. Sind also die Wertebereiche verschiedener Wege gleich, so kann man sie unter Umständen als ein und dieselbe Kurve identifizieren. Um aber z.B. verschiedene Durchlauf-Richtungen unterscheiden zu können, führen wir eine neue Äquivalenzrelation ein:

Definition A.16.

Äquivalenzrelation von Wegen

Def.: Kurve,

Parametrisierung

Def.: Weg

Seien $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a < b, \alpha < \beta$ und $\boldsymbol{\eta} : [a, b] \to \mathbb{R}^m \quad , \quad \boldsymbol{\vartheta} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$

zwei Wege im \mathbb{R}^m . η und ϑ sind äquivalente Wege, falls eine streng monoton wachsende, stetige Funktion

$$\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b] \text{ mit } \phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$$

existient, und $\eta(\phi(\tau)) = \vartheta(\tau) \ (\forall \tau \in [\alpha, \beta])$ gilt.

Damit besitzen zwei äquivalente Wege denselben Wertebereich und die gleiche Durchlaufrichtung. Sind die Wege geschlossen, ist außerdem garantiert, dass sie gleich oft durchlaufen werden.

Definition A.17 (Kurve).

- (i) Eine Äquivalenzklasse $[\eta]$ von Wegen bezüglich der oben eingeführten Äquivalenzrelation wird als Kurve im \mathbb{R}^m bezeichnet.
- (ii) Sei $\Gamma := [\eta]$ eine Kurve, so nennt man jeden Repräsentanten von Γ eine (Parameter-) Darstellung.

Eine übliche Schreibweise für die Einführung einer Kurve ist

 $\Gamma: t \mapsto \eta(t) \quad (t \in [a, b]) \quad :\Leftrightarrow \quad \Gamma \text{ ist die durch die Darstellung } \eta \text{ definierte Kurve.}$

A.3.2 Kurvenintegrale

Wenn im Folgenden Ableitungen von Kurven (bzw. deren Darstellungen) auftreten, dann wollen wir immer davon ausgehen, dass diese existieren und stetig sind.

Motivation: Arbeit

Seien $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^3$, η ein Weg in \mathcal{G} , $F : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Ist η der Weg eines Teilchens, das der Kraft F ausgesetzt ist, so wirkt zur Zeit t am Ort $\eta(t)$ die Kraft $F(\eta(t))$.

Um die Arbeit zu berechnen, die nötig ist, um ein Teilchen im Feld F entlang einer geraden Strecke s zu bewegen, summiert man die Komponenten auf:

$$F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{s})$$

Das Linienstück zwischen $\eta(t)$ und $\eta(t+h)$ ist für hinreichend kleines h näherungsweise eine gerade Strecke. Man kann die benötigte Arbeit entlang dieses Stücks dann abschätzen durch

$$W \approx (\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}(t)), \boldsymbol{\eta}(t+h) - \boldsymbol{\eta}(t))$$

Zerlegt man [a, b] in kleine Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, so können wir die Gesamtarbeit von $\eta(a)$ bis $\eta(b)$ entlang des Weges η abschätzen durch

$$W \approx \sum_{i} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}(t_i)), \boldsymbol{\eta}(t_{i+1}) - \boldsymbol{\eta}(t_i) \right)$$

Für hinreichend kleine h ist $\eta(t+h) - \eta(t) = D\eta(t) \cdot h + o(h)$. Also gilt in weiterer Näherung

$$W \approx \sum_{i} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}(t_i)), \dot{\boldsymbol{\eta}}(t_i) \right) \left(t_{i+1} - t_i \right)$$

Bsp.: Arbeitsintegral Wählen wir die Teilintervalle immer kleiner, so wird die Näherung genauer und die (Riemannsche) Summe geht in ein Integral über. Da die Summe für kleinere Intervalle die Arbeit immer besser approximiert, wird sie im Grenzübergang $\Delta t \to 0$ Arbeitsintegral genannt.

$$W = \int_{a}^{b} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}(t)), \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \right) dt$$

Die Arbeit entlang eines Weges hängt allerdings nicht von der Geschwindigkeit ab, mit der er durchlaufen wird, also auch nicht von der speziellen Parameterdarstellung. Diese Eigenschaft liefert folgender Satz

Satz A.3 (Unabhängigkeit von der Darstellung)

Seien Γ eine Kurve in \mathcal{G} und $\boldsymbol{\eta} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\vartheta} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ zwei Darstellungen von Γ . Dann gilt

$$\int_{a}^{b} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}(t)), \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\vartheta}(t)), \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(t) \right) dt$$
(A.23)

Beweis: ϑ und η sind äquivalent, also existient $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ mit $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$ und

 $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\phi}(\tau)) = \boldsymbol{\vartheta}(\tau)$

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Mit der Substitutions- und Kettenregel folgt

$$\int_{a}^{b} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}(t)), \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \right) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\eta}(\phi(\tau))), \dot{\boldsymbol{\eta}}(\phi(\tau)) \right) \phi'(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\vartheta}(\tau)), \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(\tau) \right) d\tau \qquad \Box$$

Definition A.18 (Kurvenintegral).

Def.: Kurvenintegral

Seien
$$\Gamma$$
 eine Kurve in \mathcal{G} , $\boldsymbol{x} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ eine Darstellung von Γ und $\boldsymbol{E} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^m$ eine Vektorfeld. Das Kurvenintegral im Feld \boldsymbol{E} längs Γ ist definiert über

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}) := \int_{a}^{b} (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}(t)), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) \, dt \tag{A.24}$$

Bemerkung A.7 (zur Schreibweise)

Anstatt (E(x), dx) schreibt man meist $E(x) \cdot dx$ oder auch $E_1(x) dx_1 + \cdots + E_m(x) dx_m$:

$$\int_{\Gamma} (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} E_{1}(\boldsymbol{x}) dx_{1} + \dots + E_{m}(\boldsymbol{x}) dx_{m}$$
(A.25)
$$:= \int_{a}^{b} (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}(t)), \dot{\boldsymbol{x}}(t)) dt$$

$$= \int_{a}^{b} (E_{1}(\boldsymbol{x}(t)) \dot{\boldsymbol{x}}_{1}(t) + \dots + E_{m}(\boldsymbol{x}(t)) \dot{\boldsymbol{x}}_{m}(t)) dt$$
(A.26)

Das heißt, man erhält das gewohnte Integral (A.26), wenn man in (A.25) x durch x(t) und dx_i durch $\dot{x}_i(t)dt$ ersetzt.

A.3.3 Konservative Felder, Potentialfelder

Definition A.19 (Streckenzug, Gebiet).

Def.: Streckenzug, Gebiet (i) Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, so heißt die Kurve

$$S(x,y): t \mapsto \boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \quad (t \in [0,1])$$

Streckenzug von \boldsymbol{x} nach \boldsymbol{y} .

- (ii) Sei $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^m$. \mathcal{G} ist zusammenhängend, falls zu $x, y \in \mathcal{G}$ ein Weg $x : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ existiert, mit x(a) = x und x(b) = y und Spur von $x(\cdot)$ in \mathcal{G} .
- (iii) \mathcal{G} ist ein Gebiet, wenn \mathcal{G} offen und zusammenhängend.

Definition A.20 (Konservatives Feld).

$$\int_{\Gamma_1} (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma_2} (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{d}\boldsymbol{x})$$
(A.27)

Satz A.4

Mit obigen Voraussetzungen und einer beliebigen geschlossenen Kurve Γ in \mathcal{G} gilt

$$oldsymbol{F}$$
 konservativ $\Leftrightarrow \int_{arGamma}(oldsymbol{F}(oldsymbol{x}),oldsymbol{dx})=0$

Beweis: Zerlege \varGamma in zwei beliebige Wege. Deren Wegintegrale unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. $\hfill \Box$

Definition A.21 (Potentialfeld, Potential).

Def.: Potentialfeld, Unter obigen Voraussetzungen wird \mathbf{F} Potentialfeld genannt, falls ein Skalarfeld $q: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ Potential existiert, mit

 $\nabla q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$

q heißt dann Potential zu F.

Ist $z \in \mathcal{G}$ der Endpunkt einer Kurve Γ_y in \mathcal{G} mit festem Anfangspunkt x_0 und F konservativ, so ist das Kurvenintegral $\int_{\Gamma_x} (F(x), dx)$ eine Funktion, die nur von y abhängt.

Satz A.5

Konservative Felder Ist $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^m$ ein offenes Gebiet und $\mathbf{F} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^m$ ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt: und Potentiale

- (i) F ist genau dann konservativ, falls F ein Potentialfeld ist.
- (ii) Ist q ein Potential zu \mathbf{F} , dann ist für eine Kurve $K_{y,z}$ in \mathcal{G} mit \mathbf{y} als Anfangs- und \mathbf{z} als Endpunkt

$$\int_{y}^{z} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{dx} \right) := \int_{K_{y,z}} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{dx} \right) = q(\boldsymbol{z}) - q(\boldsymbol{y}) \tag{A.28}$$

Beweis: Einen Beweis findet man im Buch *Mathematik für Physiker und Mathematiker* von Rainer Wüst (S. 718ff).

A.4 Oberflächenintegrale

Definition A.22 (Oberfläche).

Def.: Oberfläche

Singuläre

Oberflächen

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $p, q \in \Omega$. Als Öberfläche bezeichnet man eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^3$, die über eine Parametrisierung

$$\boldsymbol{x}: \Omega \to \mathbb{R}^3, (p,q) \mapsto (\boldsymbol{x}(p,q), \boldsymbol{y}(p,q), \boldsymbol{z}(p,q))$$
(A.29)

festgelegt wird.

Wir wollen im Folgenden immer davon ausgehen, dass die Oberflächen sich nicht selbst schneiden, also aus $\boldsymbol{x}(p,q) = \boldsymbol{x}(\tilde{p},\tilde{q})$ stets $\tilde{p} = p$ und $\tilde{q} = q$ folgt.

Beispiel A.4 (Sphäre)

Eine Sphäre S_r mit Radius r kann parametrisiert werden durch

$$\boldsymbol{x}(\phi,\theta) = (r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi\sin\theta, r\cos\theta) \quad \text{mit } (\theta,\phi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi)$$

Eine andere Möglichkeit, die obere Halbsphäre S_r^+ darzustellen, ist die Wahl des Graphen der Funktion $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ als Parameterdarstellung:

$$\pmb{x}(x,y) = (x,y,f(x,y)) = (x,y,\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \quad \text{mit} \ x^2 + y^2 < r^2$$

Tangentialebene Ein Weg $\eta(t) = (p(t), q(t))$ in Ω wird durch eine Parameterdarstellung x einer Oberfläche S über Ω auf einen Weg $x(\eta(t))$ abgebildet. Der Vektor

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q}\frac{dq}{dt}$$

steht dann in jedem Punkt der Kurve tangential zur Oberfläche S. Dieser ist eine Linearkombination aus den Tangentialvektoren $\frac{\partial x}{\partial p}$ und $\frac{\partial x}{\partial q}$, welche die Tangentialebene im entsprechenden Punkt aufspannen.

Sind diese beiden (Basis-)Tangentialvektoren in einem bestimmten Punkt linear abhängig, so wird dieser Punkt *singulär* genannt⁴ Wir wollen im Folgenden immer davon ausgehen, dass die betrachteten Oberflächen in keinem Punkt singulär sind.

A.4.1 Flächeninhalt

Sei S eine Oberfläche, die durch $\boldsymbol{x}(p,q)$ parametrisiert wird. Um den Flächeninhalt eines infinitesimalen Flächenstücks zu erhalten, betrachten wir die infinitesimalen Weglängen der beiden Wege $\boldsymbol{\eta}(p) := \boldsymbol{x}(p,q = \text{const})$ und $\boldsymbol{\vartheta}(q) := \boldsymbol{x}(p = \text{const},q)$:

$$d\eta = \left\| \frac{\partial x}{\partial p} \right\| dp , \quad d\vartheta = \left\| \frac{\partial x}{\partial q} \right\| dq$$

⁴Diese Bedingung ist äquivalent zur Existenz eines Normalenvektors $\mathbf{N} := D_p \mathbf{x} \times D_q \mathbf{x} \neq 0$.

und berechnet den Flächeninhalt des infinitesimalen Parallelogramms:

$$dS = d\eta \ d\vartheta \ \sin \alpha = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial p} \right\| \left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q} \right\| \sin \alpha \ dp \ dq = \left\| D_p \boldsymbol{x} \times D_q \boldsymbol{x} \right\| \ dp \ dq$$

Flächeninhalt einer Oberfläche

iner (α sei der Winkel zwischen $\frac{\partial x}{\partial p}$ und $\frac{\partial x}{\partial q}$). Den gesamten Flächeninhalt erhalten wir dann über die Integration

$$A_S = \int_S dS = \int_\Omega \|D_p \boldsymbol{x} \times D_q \boldsymbol{x}\| \, dp \, dq \tag{A.30}$$

Im Spezialfall einer Parametrisierung $\pmb{x}(x,y)=(x,y,u(x,y))$ mit einem Skalarfeldu(x,y)ergibt sich

$$A_S = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy \tag{A.31}$$

A.4.2 Flussintegral

Fluss durch dieSeien n der Normaleneinheitsvektor (||n|| = 1) der Oberfläche S und F ein Vektorfeld, dann
schreibt man

$$\int_{S} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} := \int_{S} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{\Omega} \boldsymbol{F} \cdot (D_{p}\boldsymbol{x} \times D_{q}\boldsymbol{x}) \, dp \, dq \tag{A.32}$$

für das sogenannte *Flussintegral*, welches den *Fluss* des Vektorfelds F durch die Fläche S angibt⁵.

⁵Das Skalarprodukt $F \cdot n$ liefert einen großen Beitrag, falls das Vektorfeld senkrecht, einen kleinen Beitrag, falls es parallel zur Fläche steht.
A.5 Integralsätze

A.5.1 Satz von Gauß

Satz A.6 (Satz von Gauß)

Seien \mathbf{F} ein Vektorfeld, $V \subset \mathbb{R}^3$ und $\sigma := \partial V$. Dann gilt

$$\int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, d^{3}x = \oint_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d\sigma} \qquad (A.33)$$

Das heißt, es ist gleichbedeutend, die Divergenz von F in einem Volumen V zu integrieren oder den Fluss des Felds F durch den Rand des Volumens zu berechnen.

Beweis: Wir betrachten ein infinitesimales Volumenelement μ mit Volumen dx dy dz gemäß Abb. A.1. Es seien $S := \partial \mu$ der Rand von μ , s_i die Flächenstücke mit $S = \bigcup_{i=1}^{6} s_i$ gemäß Abb. A.1, n_i die Normalen der entsprechenden Flächenstücke, $A_{s_k} = \int_{s_k} dS$ der Flächeninhalt der jeweiligen Stücke und

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x + dx \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y + dy \\ z \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + dz \end{pmatrix}$$

Der Fluss eines Vektorfeldes F durch S ist damit gegeben durch

$$\begin{split} \oint_{S} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dS} &= \sum_{i=1}^{6} \int_{s_{i}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}_{i} \ dS = \sum_{j=1}^{3} F_{j}(\boldsymbol{x}_{j}) A_{s_{j}} - \sum_{k=1}^{3} F_{k}(\boldsymbol{x}_{0}) A_{s_{k}} \\ &= F_{1}(x + dx, y, z) \ dy \ dz + F_{2}(x, y + dy, z) \ dx \ dz + \dots - F_{1}(x, y, z) \ dy \ dz - \dots \\ &= F_{1}(x, y, z) \ dy \ dz + \frac{\partial F_{1}}{\partial x} \ dx \ dy \ dz + \dots - F_{1}(x, y, z) \ dy \ dz - \dots \\ &= \partial_{1} F_{1} \ d^{3}x + \partial_{2} F_{2} \ d^{3}x + \partial_{3} F_{3} \ d^{3}x = \operatorname{div} \boldsymbol{F} \ d^{3}x \end{split}$$

Bemerkung A.8 (Interpretation der Divergenz)

Divergenz als lokale Aus obigem Beweis kann man eine Interpretation der Divergenz als lokale Quellendichte ableiten: Quellendichte

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d\sigma}$$
(A.34)

A.5.2 Satz von Stokes

Zirkulation

Satz von Gauß

Betrachtet man spezielle Vektorfelder, z.B. ein statisches Geschwindigkeitsfeld V einer Strömung, so kann es nötig sein, in bestimmten Punkten Wirbel nachzuweisen. Das Kurvenintegral

$$\int_{arGamma} (oldsymbol{V}(oldsymbol{x}),oldsymbol{d}oldsymbol{x})$$

entlang eines geschlossenen Weges Γ ergibt einen großen Wert, falls die Tangentialvektoren \dot{x} (entlang des Weges x) meistens parallel zum Feld V stehen und einen kleinen Wert, wenn



Abbildung A.1: Zum Satz von Gauß

sie öfters andere Richtungen einnehmen. Dieses Kurvenintegral – Zirkulation genannt – gibt also eine erste qualitative Beschreibung der Strömungsverhältnisse an.

Wir benutzen für die Beschreibung der Zirkulation eine andere Formulierung, die aber – wie wir in Satz A.7 sehen werden – zu nahezu demselben Ergebnis führt.

Definition A.23 (Rotation).

Def.: Rotation (2) Sei Gebiet in \mathbb{R}^m , $\mathbf{S} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^m$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, dann ist die Rotation von \mathbf{S} an der Stelle \mathbf{x}_0 definiert durch

$$\operatorname{Rot} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \mapsto (D\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (D\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$
(A.35)

Satz A.7

Mit obigen Voraussetzungen und $\partial A_{u,v}(\boldsymbol{x}_0) := \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \ (vgl. \ Abb. \ A.2)$ wobei

Rotation und Zirkulation

$$\begin{split} &\Gamma_1: \bm{x}_1(t) &:= \bm{x}_0 - \frac{1}{2}(\bm{u} + \bm{v}) + t\bm{u} \\ &\Gamma_2: \bm{x}_2(t) &:= \bm{x}_0 + \frac{1}{2}(\bm{u} - \bm{v}) + t\bm{v} \\ &\Gamma_3: \bm{x}_3(t) &:= \bm{x}_0 + \frac{1}{2}(\bm{u} + \bm{v}) - t\bm{u} \\ &\Gamma_4: \bm{x}_4(t) &:= \bm{x}_0 - \frac{1}{2}(\bm{u} - \bm{v}) - t\bm{v} \end{split}$$

(jeweils mit $t \in [0, 1]$) ist

$$\int_{\partial A_{u,v}(\boldsymbol{x}_0)} (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}) = \operatorname{Rot} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + o\left((\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2 \right)$$
(A.36)

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)



Abbildung A.2: Zum Satz von Stokes

Beweis: Berechnen wir die Zirkulation entlang $\partial A_{u,v}$:

$$\int_{\partial A_{u,v}} (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}) = \left(\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right) (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}) = \int_0^1 (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_1(t)), \dot{\boldsymbol{x}}_1(t)) \, dt + \dots$$

Wählen wir den Bereich, den Abb. A.2 darstellt genügend klein, so können wir $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_1(t))$ entwickeln zu

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_1(t)) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0) + D\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_0) \left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + t\boldsymbol{u} \right)$$

Damit können wir obiges Integral vereinfachen zu

$$\int_{0}^{1} \left[\left(S(x_{0}) + DS(x_{0}) \left(-\frac{1}{2}(u+v) + tu \right), u \right) + \left(S(x_{0}) + DS(x_{0}) \left(\frac{1}{2}(u-v) + tv \right), v \right) \right] dt$$

$$+ \left(S(x_{0}) + DS(x_{0}) \left(\frac{1}{2}(u+v) - tu \right), -u \right) + \left(S(x_{0}) + DS(x_{0}) \left(-\frac{1}{2}(u-v) - tv \right), -v \right) \right] dt$$

$$= \int_{0}^{1} \left(DS(x_{0}) \left(-(u+v) + 2tu \right), u \right) + \left(DS(x_{0}) \left((u-v) + 2tv \right), v \right) dt$$

$$= \left(DS(x_{0})(u-v), v \right) - \left(DS(x_{0})(u+v), u \right) + \left(DS(x_{0})u, u \right) + \left(DS(x_{0})v, v \right)$$

$$= \left(DS(x_{0})u, v \right) - \left(DS(x_{0})v, u \right) = \operatorname{Rot} S(x_{0})(u, v)$$

Damit haben wir also gezeigt, dass für genügend kleine ||u||, ||v|| das Integral $\int_{\partial A_{u,v}} (S(x_0), dx)$ und die oben definierte Rotation dasselbe ausdrücken.

Die Rotation kann also zur Beschreibung der Strömungsverhältnisse von Feldern dienen. Die uns bekannte Rotation im Dreidimensionalen unterscheidet sich auf den ersten Blick grundlegend von der hier Eingeführten. Dies liegt an einer etwas irreführenden Notation; genauer daran, dass verschiedene Ausdrücke in diesem Zusammenhang als *Rotation* bezeichnet werden.

Satz A.8 (Rotation und Wirbeldichte)

Sei nun $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $S: \mathcal{G} \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, dann ist

$$\operatorname{Rot} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\operatorname{rot} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \tag{A.37}$$

Rotation und Wirbeldichte mit rot $\mathbf{S}(\mathbf{x}) := (D_2 S_3(\mathbf{x}) - D_3 S_2(\mathbf{x}), D_3 S_1(\mathbf{x}) - D_1 S_3(\mathbf{x}), D_1 S_2(\mathbf{x}) - D_2 S_1(\mathbf{x})).$ rot $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ wird dabei wieder Rotation (Wirbeldichte) von \mathbf{S} genannt.

Beweis: Wir berechnen (und schreiben DS für DS(x)):

Rot
$$\mathbf{S}(\mathbf{x})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (D\mathbf{S}\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}, D\mathbf{S}\mathbf{v}) = ((D\mathbf{S} - D\mathbf{S}^T)\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2(D_2S_1 - D_1S_2) + u_3(D_3S_1 - D_1S_3) \\ u_1(D_1S_2 - D_2S_1) + u_3(D_3S_2 - D_2S_3) \\ u_1(D_1S_3 - D_3S_1) + u_2(D_2S_3 - D_3S_2) \end{pmatrix}, \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

$$= (\text{rot } \mathbf{S}(\mathbf{x}), \mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

Satz A.9 (Satz von Stokes)

Satz von Stokes

Rotation als

Wirbeldichte

Seien F ein Vektorfeld, σ eine (offene oder geschlossene) Oberfläche, η eine Parametrisierung der Kurve $\partial \sigma$. Dann gilt

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d\sigma} = \oint_{\partial \sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d\eta} \qquad (A.38)$$

Das bedeutet, der Fluss der Rotation von \mathbf{F} durch die Fläche σ ist gleich dem Kurvenintegral von \mathbf{F} entlang des Randes der Fläche σ .

Beweis: Sei $\boldsymbol{x}(p,q)$ eine Parametrisierung der Oberfläche σ . Nach den Sätzen A.7 und A.8 gilt:

$$\oint_{\partial A_{u,v}(\boldsymbol{x}_0)} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$$

, wobei $\|\boldsymbol{u}\|$ und $\|\boldsymbol{v}\|$ genügend klein zu wählen sind und damit $A_{u,v}(\boldsymbol{x}_0)$ ein kleines Flächenstück von σ im Punkte \boldsymbol{x}_0 angbit. Setzen wir nun $\boldsymbol{u} = \partial_p \boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{v} = \partial_q \boldsymbol{x}$ und $\|\boldsymbol{u}\| =: dp, \|\boldsymbol{v}\| =: dq$ dann ist $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_0) := (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})/(dp \ dq)$ der Normaleneinheitsvektor von σ in \boldsymbol{x}_0 . Damit ist

$$\oint_{\partial A} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dx} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dp \, dq = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\eta} \qquad \Box$$

Integration über q und p liefert das gewünschte Ergebnis.

Bemerkung A.9 (Interpretation der Rotation)

Die bereits angesprochene Interpretation der Rotation als (lokale) *Wirbeldichte* wird klarer, wenn man den Zusammenhang aus obigem Beweis betrachtet:

$$\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \lim_{\Delta \sigma \to 0} \frac{1}{\Delta \sigma} \oint_{\Delta \sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d\eta}$$
(A.39)

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Satz A.10 (Folgerungen aus dem Satz von Stokes)

- (i) Da das Kurvenintegral entlang des Randes von σ nur von diesem Rand, aber nicht von der Fläche an sich abhängt, ist auch der Fluss der Rotation durch die Oberfläche σ unabhängig von dieser.
- (ii) Ist σ geschlossen, so verschwindet der Rand ($\partial \sigma \rightarrow 0$) und damit das gesamte Kurvenintegral. In diesem Fall verschwindet also der Fluss der Rotation von \mathbf{F} durch σ ebenfalls.
- Rotationsfreies Feld (iii) Ein Vektorfeld **F** ist genau dann konservativ, falls die Rotation von **F** für alle Punkte verschwindet:

 $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi \text{ mit } \boldsymbol{F} \equiv \operatorname{grad} \varphi \tag{A.40}$

Konservative Felder werden deshalb wirbelfrei genannt.

Quellenfreies Feld (iv) Es gilt außerdem

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{A} \operatorname{mit} \boldsymbol{F} \equiv \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{A.41}$$

Beweis (von (iii)): Sei zunächst $F := \operatorname{grad} \varphi$, so ist

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla \times \partial_j \varphi \hat{e}_j = \partial_i \partial_j \varphi \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = -\partial_j \partial_i \epsilon_{jik} \equiv 0$$

Sei nun rot $F \equiv 0$ vorgegeben, dann folgt aus dem Satz von Stokes, dass das Wegintegral von F entlang der geschlossenen Kurve $\partial \sigma$ verschwindet. Damit ist nach Satz A.4 F konservativ und nach Satz A.5 existiert eine Skalarfeld φ mit grad $\varphi \equiv F$.

Beispiel A.5 (Wirbelfreies Feld) Für das Vektorfeld F(x) := x gilt

div $\mathbf{F} = \partial_i x_i = 3$, rot $\mathbf{F} = \partial_i x_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = \delta_{ij} \epsilon_{ijk} \hat{e}_k = 0$

 ${\pmb F}$ hat damit eine konstante Quellendichte und ist wirbelfrei.

Beispiel A.6 (Quellenfreies Feld) Das Vektorfeld $A(x) := (-y \ x \ 0)^T$ hat die Eigenschaften

 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \partial_i A_i = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = (0 \ 0 \ 2)^T \; ,$

ist also quellenfrei bei konstanter Wirbeldichte.

A.5.3 Helmholtz-Theorem

Satz A.11 (Helmholtz-Theorem)

Helmholtz-Theorem Jedes differenzierbare Vektorfeld $F(\hat{x})$, welches für $||x|| \to \infty$ schneller als 1/||x|| verschwindet, kann zerlegt werden in

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad}\left(\frac{-1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|} d^3 \boldsymbol{x}'\right) + \operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}')}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|} d^3 \boldsymbol{x}'\right)$$
(A.42)

Beweis: siehe Übung

A.6 Kontinuitätsgleichung

Seien $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ ein Skalarfeld – bzw. hier speziell die Ladungsträgerdichte –, V ein geschlossenes Volumen, $q(t) := \int_V \rho(\boldsymbol{x}, t) d^3 x$ die Gesamtladung in V. Aus den Maxwellgleichungen (2.1) und (2.2)⁶ folgt die

Lokale Ladungserhaltung

Eine zeitliche veränderliche Gesamtladung q(t) (mit $\dot{q} \neq 0$) ist nur mit einem Ladungsfluss durch die Oberfläche ∂V möglich

Definition A.24 (Stromdichte).

Def.: Stromdichte

Sei v ein Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, so definiert man die sog. Stromdichte als Ladung pro Fläche und Zeit:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) := \varrho(\boldsymbol{x},t) \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$$
(A.43)

Die lokale Ladungserhaltung besagt also, dass die zeitliche Änderung $\partial_t \rho$ in einem Volumen dem Fluss von j durch den Rand ($\partial V =: \sigma$) dieses Volumens gleich sein muss (mit entgegengesetztem Vorzeichen) :

$$\int_{V} \partial_{t} \varrho \ d^{3}x \stackrel{!}{=} -\oint_{\partial V} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{d\sigma} = -\int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{j} \ d^{3}x$$

Kontinuitätsgleichung Da diese Gleichung für beliebige Volumina V gilt, ist die sog. Kontinuitätsgleichung (lokale Ladungserhaltung in differentieller Form) erfüllt:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$$
 (A.44)

Beispiel A.7 (Punktladung)

Sei $\rho(\boldsymbol{x},t) = q\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t))$ die Ladungsverteilung einer Punktladung am Ort $\boldsymbol{r}(t)$ mit der Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$. Die Stromdichte ist dann gegeben durch

 $j_i(\boldsymbol{x},t) = \varrho \ \dot{r}_i = q \ \dot{r}_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t))$

Und damit ist

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = \partial_i j_i = \dot{r}_i \partial_i \varrho = q \, \dot{r}_i \, \partial_{x_i} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t)) = -q \, \dot{r}_i \partial_{r_i} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t)) = -\dot{r}_i \partial_{r_i} \varrho = -\partial_t \varrho \,,$$

also die Kontinuitätsgleichung div $\mathbf{j} + \partial_t \varrho = 0$ erfüllt.

⁶Man bildet die Zeitableitung von (2.1) und die Divergenz von (2.2) und setzt $\partial_t \operatorname{div} \boldsymbol{E}$ ein.

A.7 Krummlinige Koordinaten

Linienelement in allg. Koordinaten

Seien u, v, w beliebige Koordinaten (z.B. Kugel- oder Zylinderkoordinaten) mit der Orthonormalbasis $\{\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w\}$. Es sei außerdem ein Linienelement dl definiert, welches eine infinitesimale Strecke im Raum angibt:

$$d\boldsymbol{l} := f \, du \, \hat{\boldsymbol{e}}_u + g \, dv \, \hat{\boldsymbol{e}}_v + h \, dw \, \hat{\boldsymbol{e}}_w \tag{A.45}$$

Beispiele für u, v, w und f, g, h sind in folgender Tabelle zu finden:

	u	v	w	f	g	h
kartesische Koordinaten:	x	y	z	1	1	1
Zylinderkoordinaten:	ρ	φ	z	1	r	1
Kugelkoordinaten:	r	θ	ϕ	1	r	$r\sin\theta$

Satz A.12 (Darstellung der Differentialoperationen)

Die Differentialoperationen grad, rot, div, \triangle werden in allgemeinen Koordinaten u, v, w den folgenden Gleichungen entsprechend dargestellt:

(i)
$$\operatorname{grad} \chi = \frac{1}{f} \frac{\partial \chi}{\partial u} \hat{e}_u + \frac{1}{g} \frac{\partial \chi}{\partial v} \hat{e}_v + \frac{1}{h} \frac{\partial \chi}{\partial w} \hat{e}_w$$
 (A.46)

(*ii*)
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{fgh} \left[\partial_u (ghA_u) + \partial_v (fhA_v) + \partial_w (fgA_w) \right]$$
(A.47)

(*iii*)
$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{gh} \left[\partial_v (hA_w) - \partial_w (gA_v) \right] \hat{e}_u + \operatorname{zykl. Perm. von} \begin{pmatrix} f & g & h \\ u & v & w \end{pmatrix}$$
(A.48)

Beweis:

(i) Definiert man den Gradienten über das Differential

$$d\chi = \nabla \chi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial \chi}{\partial u} du + \frac{\partial \chi}{\partial v} dv + \frac{\partial \chi}{\partial w} dw \qquad \Box$$

so wird (i) sofort klar.

c

(ii) Wir berechnen den Strom eines Vektorfelds A durch die Oberfläche eines infinitesimalen Volumenelements (analog zum Beweis des Satzes von Gauß):

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = (A_u \ g \ dv \ h \ dw)|_{u+du} - (A_u \ g \ dv \ h \ dw)|_u + \dots$$

$$= \partial_u (A_u gh) \ du \ dv \ dw + \dots$$

$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \operatorname{div} \mathbf{A} \ dV = \operatorname{div} \mathbf{A} \ fgh \ du \ dv \ dw$$

Also ist div $A = \frac{1}{fgh} [\partial_u (A_u gh) + \ldots].$

(iii) Für die Rotation machen wir uns den Satz von Stokes zunutze, indem wir zunächst ein Kurvenintegral entlang des Randes eines infinitesimalen Flächenstücks (in der v - w-Ebene) auswerten:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (A_w h \ dw)|_{v+dv} - (A_w h \ dw)|_v + (A_v g \ dv)|_w - (A_v g \ dv)|_{w+dw}$$

$$= (\partial_v (hA_w) - \partial_w (gA_v)) \ dv \ dw$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \hat{e}_u \ gh \ dv \ dw$$

T3: Elektrodynamik

Sebastian Gottwald (LMU)

Darstellung der Differentialoperatoren in allg. Koordinaten

Index

Α

Ableitung, 124 Abstand Infinitesimaler, 51 Kovarianz, 51 Lichtartiger, 52 Raumartiger, 52 Relativistischer, 51 Zeitartiger, 52 Ampèresches Gesetz, 3

В

Bewegungsgleichung, 2, 69 in kovarianter Form, 70
Biot-Savart-Gesetz, 40
Brechung, 82
Brechungsindex, 78, 91
Brewsterwinkel, 85

С

Coulombgesetz, 21

D

Dielektrikum, 14 Differential, 130 Dipol -moment Elektrostatisches, 28 Magnetostatisches, 44 -wechselwirkung, 29 Elektrischer, 28 Magnetischer, 44 Punkt-, 46 Dipolstrahlung, 113 Dirichlet-Randbedingung, 30 Dispersion, 90 Dispersionsrelation, 79 in Leitern, 88 Divergenz, 130, 138 Darstellungen, 145 Drehmatrix, 121

Drude-Formel, 91

\mathbf{E}

Ebene Wellen, 78, 79
Allgemeine, 81
Eichinvarianz, 6, 71
Eichtransformation, 6
Eigenlänge, 55
Eigenzeit, 52
Eindeutigkeitssatz, 31
Eindringtiefe, 88
Elektromagnetische Wellen, 78

in Leitern, 87

Elektrostatisches Feld, 20
Energiedichte

elektromagnetischer Wellen, 79

Evaneszente Wellen, 86

\mathbf{F}

Faradayscher Käfig, 31 Feldenergie, 24 Feldstärketensor, 69 Flächeninhalt, 136 Flussintegral, 137 Fresnelsche Formeln, 83

G

Galilei-Transformation, 54 Gaußscher Satz, 138 Gaußsches Gesetz, 2 Gradient, 125 Darstellungen, 145 Greensche Funktion, 35, 102 des Laplace-Operators, 36 Grenzflächen Elektromagnetische Wellen, 82 Gyromagnetisches Verhältnis, 45

Η

H-Feld, 14

Hamiltonfunktion einer Ladung, 68 Helmholtz-Theorem, 143 Hochfrequenzlimes, 93

Ι

Impulsdichte, 10 Impulserhaltung, 10 Induktionsgesetz, 3 Integralsätze, 63, 138 Intensität, 79, 84 Interne Stromdichte, 92 Invarianten, 76

J

Jakobi-Matrix, 124

\mathbf{K}

Konservatives Feld, 135 Konstituierende Gleichung, 92 Konstruierende Gleichungen, 14 Kontinuitätsgleichung, 71, 144 Kontravariante Vektoren, 58 Kovariante Formulierung der Elektrodyn., 50 Kovariante Vektoren, 58 Krummlinige Koordinaten, 145 Kurve, 132 Kurvenintegrale, 132, 133

\mathbf{L}

Ladungserhaltung, 71, 144 Landau-Symbol, 124 Laplace-Gleichung, 21 Lösung Eigenschaften, 31 Kugelkoordinaten, 32 Laplace-Operator, 130 Larmor-Formel, 111 Legendre-Polynome, 26 Leiter in der Elektrostatik, 23 Ohmscher, 15 Levi-Civita-Symbol, 61 Liénard-Wiechert-Potentiale, 105 Lorentz -Gruppe, 60 -Skalare, 60 -Tensoren, 60 -Transformation, 54, 60 -Transformation der Feldstärken, 74 -Vektoren, 60

-kraft, 2, 68 Lorenz-Eichung, 7, 101

\mathbf{M}

Magnetikum, 14 Magnetisierungsdichte, 13 Magnetostatik, 39 Magnetostatisches Feld, 39 Maxwellgleichungen Allgemeine Lösung, 101 der Elektrostatik, 20 der Magnetostatik, 39 im Vakuum, 4 in Materie, 14, 78 Kovariante Form, 72 Kovarianz, 74 Maxwellscher Spannungstensor, 10 Minkowski-Metrik, 51 Monopol, 27 Multipolentwicklung, 26, 43

Ν

Neumann-Randbedingung, 30 Niederfrequenzlimes, 92

0

Oberflächenintegrale, 136 Oberflächenladung, 35, 37 Ohmsche Leiter, 92 Oszillatormodell, 90

Ρ

Plasmafrequenz, 93 Poisson-Gleichung, 21, 41 Formale Lösung, 35 Polarisation, 80 Polarisierungsdichte, 13 Potential, 135 Elektrostatisches, 21 Magnetostatisches, 40 Potentiale, 6 der Dipolstrahlung, 113 Liénard-Wiechert-, 105 Retardierte, 102 Wellengleichungen, 7, 101 Poynting-Theorem, 9 Poynting-Vektor, 9, 80 Pseudotensor, 122

Q

Quadrupol -moment, 28 Elektrischer, 28

R

Randbedingungen an Grenzflächen, 16 bei Randwertproblemen, 30 Randwertprobleme, 30, 42 Rayleighstreuung, 119 Reflexion, 82 Reflexionsgrad, 85 Relativistische Energie, 65 Relativistische Energie-Impuls-Beziehung, 65 Relativistische Mechanik, 64 Relativistischer Impuls, 65 Relativitätsprinzip, 50 Retardierte Potentiale, 102 Richtungsableitung, 125 Rotation, 130, 139 Darstellungen, 145

\mathbf{S}

Skalarfeld, 121 Skineffekt, 88 Spiegelladungen, 36 Stokesscher Satz, 138 Strahlstärke, 110 Strahlung, 101 Dipol-, 113 einer beschleunigten Punktladung, 108 Strahlungsverlust, 110 Streuung von Licht, 118

Т

Tangentialebene, 136 TE-Welle, 99 TE-Wellen, 98 TEM-Welle, 98 Tensor, 122 Feldstärke-, 69 Metrischer, 59 Totalantisymmetrischer, 61 Tensoren, 57, 59 Antisymmetrische, 59 Differentiation, 61 Duale, 61 Integration, 61 Kontravariante, 59 Kovariante, 59 Symmetrische, 59 Thomsonstreuung, 119 TM-Welle, 98 Totalreflexion, 85 Transmissionsgrad, 85

V

Vektorfeld, 122 Verjüngung, 123 Verschiebungsdichte, 14 Verschiebungsstrom, 4 Viererbeschleunigung, 58 Vierergeschwindigkeit, 58 Viererimpuls, 66 Viererpotential, 67 Viererstromdichte, 71 Vierervektor, 57 Länge, 57 Orts-, 57 Vierervektoren Differentiation, 61 Integration, 61

W

Weg, 132
Wellengleichung, 78
in Leitern, 88
Wellenleiter, 97
Wellenpakete, 94
Weltlinien, 53
Wirbeldichte, 141
Wirkung
eines freien Teilchens, 64
im elektromagn. Feld, 67
Vollständige, 73
Wirkungsquerschnitt, 118

\mathbf{Z}

Zwillingsparadoxon, 53