

T1: Theoretische Mechanik

Sommersemester 2007

Prof. Dr. Jan von Delft

Vorlesungsskript

verfasst von
Sebastian Gottwald

24. April 2008

Teil I

Elementare Newtonsche
Mechanik

Kapitel 1

Newton'sche Sätze

(Originalformulierung)

1. Jeder Körper verharrt in einem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte dazu gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.
2. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.
3. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich; oder: die Wirkung zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

1.1 Newtons Axiome

Beschreibung von Newtons Axiomen in der Sprache der Theoretischen Mechanik.

1.1.1 Axiom N1 Definition von Inertialsystemen

Es gibt Bezugssysteme (BS), in denen kräftefreie Bewegung durch $\dot{r}(t) = v(t) = \text{const}$ beschrieben wird. Diese BS heißen Inertialsysteme (IS).

Bemerkungen

- N1 gilt nicht in jedem BS (z.B. nicht auf einem Karusell)
- In IS sind physikalische Gesetze besonders einfach.
- N1 ist nicht Spezialfall von N2 mit Kraft = 0, sondern Definition von IS.

1.1.2 Axiom N2 Dynamik

In einem IS folgt die Bewegung unter Einfluss einer Kraft folgendem Gesetz

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} \quad (\text{Kraft}) \quad \text{mit} \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad (\text{Impuls}) \quad (1.1)$$

N2 beinhaltet also:

- die Definition von Masse (vergleiche Beschleunigung für gleiche Kraft)
- die Definition von Kraft (als Beschleunigung mal Masse)
- Aussage über die Bahnbewegung

Bemerkung

N2 gilt nur für nicht-relativistische Geschwindigkeiten.

1.1.3 Axiom N3 Aktion = Reaktion

$$\vec{K}_{\text{actio}} = -\vec{K}_{\text{reactio}} \quad (1.2)$$

1. Zusatz

Der Satz gilt nur für Kräfte entlang der Verbindungslinie.

2. Zusatz

Für Kräfte gilt das Superpositionsprinzip

$$\vec{K} = \sum_i \vec{K}_i \quad (\vec{K}_i \text{ Einzelkräfte})$$

Bemerkung

Die Gültigkeit von N3 ist eingeschränkt, denn N3 impliziert instantane Reaktion, im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie (nichts propagiert schneller als Licht).

1.1.4 Beispiel: Lösung von N2 für 1-dim Problem

$$m\ddot{x} = K(x(t)) \quad \text{wobei} \quad K(x) = -\partial_x U(x) \quad (1.3)$$

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\dot{x} \partial_x U(x) \quad (1.4)$$

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x})^2 = -\frac{d}{dt} U(x(t)) \quad (1.5)$$

$$\frac{m}{2} \int dt \frac{d}{dt} (\dot{x})^2 = -\int dt \frac{d}{dt} U(x(t)) + E \quad (1.6)$$

$$\frac{m}{2} (\dot{x})^2 = -U(x(t)) + E \quad (1.7)$$

Die Integrationskonstante E , welche der Gesamtenergie entspricht, ergibt sich also zu

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \quad \text{Energieerhaltung} \quad (1.8)$$

Außerdem erhält man die Differentialgleichung (nach \dot{x} gelöst)

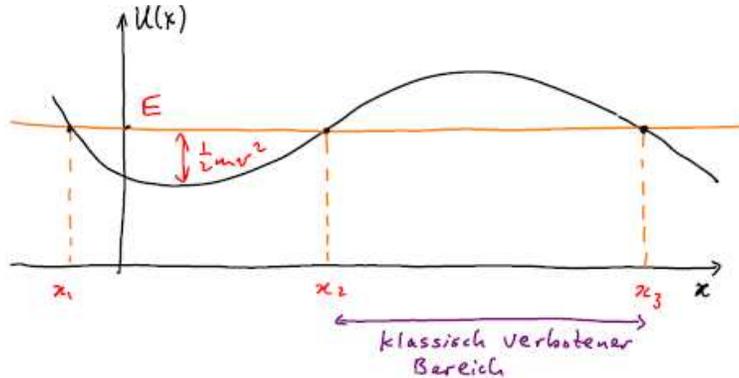
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} \quad (1.9)$$

welche nach Trennung der Variablen leicht zu lösen ist und es ergibt sich:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{m}{2}(E - U(x'))}} \quad (1.10)$$

Die Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = v_0$ legen die Integrationskonstante fest: $E = \frac{m}{2}v_0^2 + U(x_0)$

Graphische Analyse



- Die Umkehrpunkte sind an den Stellen, für die gilt $\dot{x} = 0$, also bei x_1, x_2, x_3 .
- Zwischen den Umkehrpunkten ist die Bewegung periodisch, mit

$$\frac{1}{2} T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{m}{2}(E - U(x'))}} \quad (1.11)$$

Kapitel 2

Erhaltungssätze I

Zunächst mittels N2 hergeleitet, später eleganter mittels Lagrange-Formalismus (tieferer Grund: Symmetrien).

2.1 Impulserhaltung

Aus $\vec{K} = \frac{d}{dt}\vec{p}$ (N2), ergibt sich

$$\boxed{\vec{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const} \quad (2.1)}$$

2.2 Drehimpulserhaltung

2.2.1 Def.: Drehimpuls

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.2)$$

2.2.2 Def.: Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{K} \quad (2.3)$$

wobei

$$\dot{\vec{l}} = \vec{M} \quad (\text{N2 für Rotationen}) \quad (2.4)$$

wie man leicht nachprüft. Daraus folgt nun die

2.2.3 Drehimpulserhaltung

$$\boxed{\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{l} = \text{const} \quad (2.5)}$$

2.3 Energieerhaltungssatz

2.3.1 Def.: Arbeit

Ein Teilchen mit Masse m bewege sich unter Einfluss einer äußeren Kraft von Punkt 1 nach 2 entlang Weg C . Die von der Kraft auf m geleistete Arbeit ist

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{K} \quad (2.6)$$

Die Arbeit entspricht der vom Kraftfeld auf m übertragenen Energie.

2.3.2 Def.: Kinetische Energie

Aus (??) ergibt sich

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt \cdot m\dot{\vec{v}} \quad (2.7)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \vec{v}^2 \quad (2.8)$$

$$= \frac{m}{2} (\vec{v}(t_2)^2 - \vec{v}(t_1)^2) \quad (2.9)$$

Also entspricht eine Energieänderung einer Geschwindigkeitsänderung, was zur Definition führt

$$E_{\text{kin}} = T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.10)$$

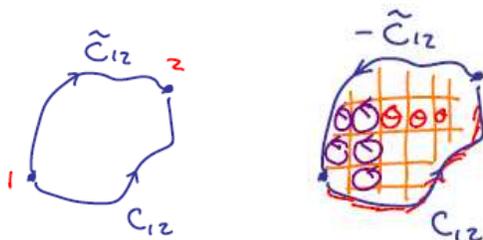
2.3.3 Def.: Konservatives Kraftfeld

Falls Arbeit zwischen 1 und 2 *unabhängig* vom Weg ist, wird das Kraftfeld konservativ genannt. Das heißt

$$\int_{C_{12}} d\vec{r} \cdot \vec{K} = \int_{\tilde{C}_{12}} d\vec{r} \cdot \vec{K} \quad (2.11)$$

Also

$$0 = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{K} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_A d\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{K} = 0 \quad (2.12)$$



Also kann \vec{K} wie folgt geschrieben werden

$$\boxed{\vec{K} = -\vec{\nabla}(U(\vec{r}) + U_0)} \quad (2.13)$$

Denn $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}U = 0$, da $\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k U = \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k U - \epsilon_{ijk} \partial_k \partial_j U) = 0$

(U_0 ist beliebige Konstante, $U(\vec{r})$ ist skalares Feld, welches Potential/potenzielle Energie genannt wird)

2.3.4 Energieerhaltungssatz

Betrachte die Differenz der potentiellen Energien an zwei verschiedenen Punkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 auf der Bahn:

$$U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = \int_{U_1}^{U_2} dU \quad (2.14)$$

$$\stackrel{(\star)}{=} - \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad (2.15)$$

$$= - \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{K}(\vec{r}) \stackrel{(1.17)}{=} A_{1 \rightarrow 2} \quad (2.16)$$

$$\stackrel{(\star\star)}{=} T_2 - T_1 \quad (2.17)$$

(\star): die Änderung des Potentials in Richtung $d\vec{r}$ entspricht $d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}U$.

Daraus folgt

$$\boxed{U_1 + T_1 = U_2 + T_2} \quad (2.18)$$

D.h. entlang einer Trajektorie in einem konservativen Kraftfeld bleibt die Gesamtenergie $E = T + U$ erhalten.

Bemerkungen

- Eine alternative Herleitung ist im Skript von Prof. von Delft [NM13] zu finden.
- Energieerhaltung gilt nicht für zeitabhängige Potentiale, denn dann würde (\star) nicht gelten.
Physikalischer Grund: Ein externes System wäre dann für die Zeitänderung des Potentials verantwortlich, welches Energie zuführen oder abführen kann.

2.3.5 Beispiel: Kraft auf geladenens Teilchen im Magnetfeld

$$\vec{K}_L = q \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \quad (2.19)$$

$$T_2 - T_1 = \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{K} \quad (2.20)$$

$$= \int_1^2 dt \cdot q \cdot \vec{B} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \quad (2.21)$$

Die Energie ist erhalten, also ist die Kraft konservativ.

Bemerkung

Die Erhaltungssätze heißen „Integrale der Bewegung“, weil sie Differentialgleichungen 1. Ordnung sind, und somit „Integrale“ der DG 2. Ordnung $\vec{K} = m\ddot{\vec{r}}$.

Kapitel 3

Erhaltungssätze II

Im Folgenden wird gezeigt, wie anhand von Symmetriebetrachtungen Erhaltungssätze gewonnen werden können.

Vorbemerkungen

- **Abgeschlossenes System:** Massenpunkte innerhalb eines abgeschlossenen Systems haben keine Wechselwirkung mit der Umgebung außerhalb des Systems.
- **abg. System mit Potential** Ein System aus N Massenpunkten sei beschrieben durch das Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$, dann wirkt auf ein Massenpunkt ν in Richtung i , wobei $i = 1, 2, 3$ ($= x, y, z$), die Kraft:

$$F_{\nu i} = -\frac{\partial V}{\partial r_{\nu i}} = -\partial_{r_{\nu i}} V \quad (3.1)$$

Beispiel: Gravitationspotential

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = -G \sum_{\nu < \mu} \frac{m_\mu m_\nu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|} \quad (3.2)$$

Hier für N Körper: Summe aus Zweikörperpotentialen (Abzählung so, da hier kein Teilchen mit sich selbst wechselwirkt).

3.1 Energieerhaltung

Betrachte folgende Symmetrieeigenschaft eines Potentials:

Homogenität der Zeit

Das bedeutet: Keine „absolute Zeit“ ist ausgezeichnet, z.B.: zwei Beobachter in unterschiedlichen IS mit verschiedenem Zeitursprung sehen die gleichen Naturgesetze.

Satz

Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ beschrieben. Falls V nicht explizit von der Zeit abhängt („ V invariant unter Zeitverschiebung“) ist die Gesamtenergie zeitlich konstant.

Beweis

Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \tag{3.3}$$

beschrieben. Die Gesamtenergie sei

$$E = \sum_{\nu} \frac{1}{2} m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu}^2 + V(\vec{r}_{\nu}) \tag{3.4}$$

Für deren zeitliche Änderung ergibt sich

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu} \ddot{\vec{r}}_{\nu} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial r_{\nu i}} \frac{dr_{\nu i}}{dt} \tag{3.5}$$

$$= \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu} \ddot{\vec{r}}_{\nu} + \vec{\nabla}_{\nu} V \cdot \dot{\vec{r}}_{\nu} \tag{3.6}$$

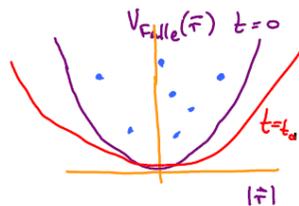
$$= \sum_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu} (m_{\nu} \ddot{\vec{r}}_{\nu} - \vec{F}_{\nu}) = 0 \tag{3.7}$$

Also ist E zeitlich konstant.

Bemerkung

Falls $V = (V(\vec{r}_{\nu}, t), t)$, ergibt sich beim Differenzieren ein Zusatzterm $\frac{\partial V}{\partial t}$, wodurch die zeitliche Ableitung der Energie nicht mehr verschwindet.

Beispiel: Atome in optischer Falle



Wird zur Zeit t_0 das äußere Potential deaktiviert, fallen die Teilchen nach unten. Das äußere Potential wird damit zeitabhängig.

3.2 Impulserhaltung

Betrachte folgende Symmetrieeigenschaft eines Potentials:

Homogenität des Raums

Das bedeutet: Kein Punkt im Raum ist ausgezeichnet.

Satz

Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ beschrieben. Falls V invariant unter Verschiebung um beliebigen Vektor \vec{a} ist, d.h.

$$V(\vec{r}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_n + \vec{a}) = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \quad (3.8)$$

ist der Gesamtimpuls des Systems zeitlich konstant.

Beweis

Sei (3.8) vorausgesetzt, so ist

$$0 = \partial_{a_i} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \stackrel{(3.8)}{=} \partial_{a_i} V(\vec{r}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{r}_n + \vec{a}) \quad (3.9)$$

$$= \sum_{\nu} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial V}{\partial r_{\nu j}} \frac{\partial (r_{\nu j} + a_j)}{\partial a_i} \quad (3.10)$$

$$= - \sum_{\nu} \sum_{j=1}^3 F_{\nu i j} \delta_{ij} \quad (3.11)$$

$$= - \sum_{\nu=1}^n F_{\nu i} = - \frac{d}{dt} \sum_{\nu} p_{\nu i} = - \frac{d}{dt} P_i \quad (3.12)$$

Also ist der Gesamtimpuls \vec{P} zeitlich konstant.

Bemerkungen

- Bedingung für eine Zweiteilchen-Wechselwirkung ist ein Potential, das nur von Ortsdifferenzen abhängt, z.B. das Gravitationspotential.
- **Folgerung:** Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems mit Eigenschaft (4.8) bewegt sich gleichförmig mit Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{\vec{P}}{M}$.

3.3 Drehimpulserhaltung

Betrachte folgende Symmetrieeigenschaft eines Potentials:

Isotropie des Raums

Das bedeutet: Das Potential ist invariant unter Drehung um den Ursprung (von griech.: *isos* gleich; griech.: *tropos* Drehung, Richtung):

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = V(\vec{r}_1', \dots, \vec{r}_n') \quad (3.13)$$

Satz

Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ beschrieben. Falls V isotrop, dann ist der Gesamtdrehimpuls bezüglich des Ursprungs $\vec{L} = \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times \vec{p}_{\nu}$ zeitlich erhalten.

Beweis

Betrachte infinitesimale Drehung $d\phi$ um den Einheitsvektor \hat{e} :

$$\vec{r}' = \vec{r} + \hat{e} \times \vec{r} d\phi \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{d}{d\phi} \right|_{\phi=0} V(\vec{r}_1', \dots, \vec{r}_n') \stackrel{(?)}{=} \left. \frac{d}{d\phi} \right|_{\phi=0} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = 0 \quad (3.15)$$

$$= \sum_{\nu} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial r'_{\nu i}} \frac{dr'_{\nu i}}{d\phi} \quad (3.16)$$

$$\stackrel{(?)}{=} - \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \hat{e} \times \vec{r}_{\nu} \quad (3.17)$$

$$= - \sum_{\nu} \hat{e} (\vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\nu}) \quad (3.18)$$

D.h. für die Drehimpulsänderung

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\nu} = 0 \quad (3.19)$$

Also ist der Gesamtdrehimpuls \vec{L} zeitlich konstant.

Bemerkungen

- Die Verallgemeinerung für Drehung um jeden anderen Punkt ist offensichtlich.
- **Folgerung:** Isotrope Zweiteilchenpotentiale können nur von Abständen abhängen. (z.B. das Gravitationspotential $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$)

- Für Zentralkräfte (wirkt in Richtung der Verbindungslinie) gilt Drehimpulserhaltung:

$$\vec{F}_{\mu\nu} \parallel (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \quad (3.20)$$

$$\vec{M} = \vec{r}_\nu \times F_{\mu\nu} + \vec{r}_\mu \times F_{\nu\mu} = (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \times F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.21)$$

- **Folgerung:** Isotrope Zweiteilchensysteme führen zu Zentralkräften

$$V(\vec{r}) = f(|r|) \quad (3.22)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial r_i} \hat{e}_i \quad (3.23)$$

$$= -\sum_i \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dr_i} \hat{e}_i \quad (3.24)$$

$$= -\sum_i \frac{\partial f}{\partial r} \frac{r_i}{r} \hat{e}_i = -\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} \quad (3.25)$$

Also ist $\vec{F} \parallel \vec{r}$, d.h. \vec{F} ist Zentralkraft.

- Es gibt auch isotrope Dreikörpersysteme, die keine Zentralkräfte sind. Auch für diese gilt, wie gezeigt, Drehimpulserhaltung.
- Der Ansatz aus Symmetrien Erhaltungssätze zu erlangen, ist zentrales Thema in der modernen Theoretischen Physik.

Kapitel 4

Bezugssysteme

4.1 System von Massenpunkten

Betrachtet man an einzelnes Teilchen eines Mehrteilchensystems (MTS), so kann man die auf dieses Teilchen wirkende Gesamtkraft wie folgt zerlegen

$$\vec{K}_\nu = m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \vec{K}_\nu^{(a)} + \sum_{\mu=1, \dots, N}^{\mu \neq \nu} \vec{K}_{\nu\mu}^{(i)} \quad (4.1)$$

\vec{K}_ν : äußere Kraft, $\vec{K}_{\nu\mu}^{(i)}$: die von μ auf ν ausgeübte innere Kraft

4.1.1 Def.: Schwerpunkt

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{\nu} m_\nu \vec{r}_\nu} \quad (4.2)$$

$M = \sum_{\nu} m_\nu$: Gesamtmasse

Kraft auf den Schwerpunkt eines MTS

Summieren wir die Gesamtkräfte über alle Teilchen, so ergibt sich für die Gesamtkraft

$$M \ddot{\vec{R}} \stackrel{(\text{??})}{=} \sum_{\nu} m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \sum_{\nu} \vec{K}_\nu^a + \sum_{\nu} \left(\sum_{\mu}^{\nu \neq \mu} K_{\mu\nu} \right) \quad (4.3)$$

$$= \sum_{\nu} \vec{K}_\nu^a + \sum_{\nu, \mu}^{\mu \neq \nu} \vec{K}_{\nu\mu} \quad (4.4)$$

$$\stackrel{(N3)}{=} \sum_{\nu} \vec{K}_\nu^a - \sum_{\nu, \mu}^{\nu \neq \mu} \vec{K}_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

$$= \sum_{\nu} \vec{K}_{\nu}^a = \vec{K} \quad (\text{gesamte \u00e4u\u00dfere Kraft}) \quad (4.6)$$

Der Schwerpunkt verh\u00e4lt sich also wie ein Partikel mit Masse M mit Ortsvektor \vec{R} unter Einfluss einer \u00e4u\u00dferen Kraft \vec{K} , unabh\u00e4ngig von inneren Kr\u00e4ften. Das hei\u00dft aber auch, dass sich das gesamte System gleichf\u00f6rmig bewegt, wenn keine \u00e4u\u00dfere Kr\u00e4fte wirken. Der Gesamtimpuls sollte sich also nicht \u00e4ndern, solange von au\u00dfen keine Kraft einwirkt.

Deshalb ist es oft sinnvoll, das Koordinatensystem so zu w\u00e4hlen, dass der Schwerpunktsimpuls gleich null ist. Dieses BS hei\u00dft Schwerpunktsystem.

Der Gesamtimpuls des Systems l\u00e4sst sich wie folgt ausdr\u00fccken

$$\vec{P} = \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \frac{d}{dt} \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu} = M \frac{d}{dt} \vec{R} = M \dot{\vec{R}} \quad (4.7)$$

Gesamtimpuls ist somit der Schwerpunktsimpuls, weshalb auch hier gilt:

4.1.2 Impulserhaltung

$$\vec{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \text{const} \quad (4.8)$$

4.1.3 SP-Drehimpuls u. Externes Drehmoment

$$\vec{L} = \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu} \quad (4.9)$$

$$\vec{M} = \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times \vec{K}_{\nu}^a \quad (4.10)$$

Wie (2.4):

$$\dot{\vec{L}} = \underbrace{\sum_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu} \times m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu}}_{=0} + \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \ddot{\vec{r}}_{\nu} \quad (4.11)$$

$$= \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times \vec{K}_{\nu}^a + \sum_{\nu, \mu}^{\nu \neq \mu} \vec{r}_{\nu} \times \vec{K}_{\nu\mu}^i \quad (4.12)$$

$$\stackrel{(N3)}{=} \vec{M} + \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu, \mu}^{\nu \neq \mu} \vec{r}_{\nu} \times \vec{K}_{\nu\mu}^i - \sum_{\mu, \nu}^{\nu \neq \mu} \vec{r}_{\mu} \times \vec{K}_{\mu\nu}^i \right) \quad (4.13)$$

$$= \vec{M} + \frac{1}{2} \left(\sum_{\nu, \mu}^{\nu \neq \mu} (\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}) \times \vec{K}_{\mu\nu}^i \right) = \vec{M} \quad (4.14)$$

Deshalb gilt auch hier

4.1.4 Drehimpulserhaltung

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const} \quad (4.15)$$

4.1.5 Transformation ins SP-System

1. Schreibe

$$\vec{r}_\nu = \vec{R} + \vec{r}_{\nu,s} \quad (4.16)$$

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_s + \vec{v}_{\nu,s} \quad (4.17)$$

$\vec{r}_{\nu,s}$: Ortsvektor von ν im SP-System,
 $\vec{v}_{\nu,s}$: Geschw. von ν im SP-System,
 \vec{v}_s : SP-Geschwindigkeit

2. Wähle Ursprung so, dass

$$\vec{R}' = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \vec{r}_{\nu,s} = 0 \quad (4.18)$$

$$\dot{\vec{R}}' = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \dot{\vec{r}}_{\nu,s} = 0 \quad (4.19)$$

(SP ruht im Ursprung des SP-Systems)

Gesamtdrehimpuls

Der Gesamtdrehimpuls kann in folgender Weise zerlegt werden

$$\vec{L} = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \quad (4.20)$$

$$= \sum_\nu (\vec{R} + \vec{r}_{\nu,s}) \times m_\nu (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_{\nu,s}) \quad (4.21)$$

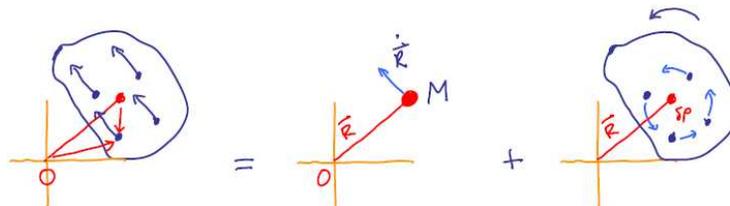
$$= m_\nu \cdot \sum_\nu (\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}_{\nu,s} + \vec{r}_{\nu,s} \times \dot{\vec{R}} + \vec{r}_{\nu,s} \times \dot{\vec{r}}_{\nu,s}) \quad (4.22)$$

$$= \sum_\nu (\vec{R} \times m_\nu \dot{\vec{R}} + \underbrace{\vec{R} \times \vec{p}_{\nu,s}}_{=0} + \underbrace{m_\nu \vec{r}_{\nu,s} \times \dot{\vec{R}}}_{=0} + \vec{r}_{\nu,s} \times \vec{p}_{\nu,s}) \quad (4.23)$$

$$= \vec{L}_s + \sum_\nu \vec{L}_\nu \quad (4.24)$$

Dies ist der *Steinersche Satz*

$$\vec{L} = \vec{L}_s + \sum_\nu \vec{L}_\nu \quad (4.25)$$



Energie

siehe Skript von Prof. von Delft [NM20]

4.2 Inertialsysteme, Galilei-Transformation

4.2.1 Das Relativitätsprinzip von Galilei

N1 liefert die Definition von Inertialsystemen (IS). Darauf aufbauend lautet das Relativitätsprinzip von Galilei:

Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.

Dies bedeutet konkret:

N1, N2, N3 sind forminvariant (oder kovariant = „sehen gleich aus“) unter Transformationen von IS zu IS'.

4.2.2 Galilei-Transformation

Wir betrachten ein Ereignis, welches in

- IS die Koordinaten (x_i, t) und in
- IS' die Koordinaten (x'_i, t') besitzt.

In IS gelten N1 und N2:

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \begin{cases} 0 \\ K_i(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \end{cases} \quad (4.26)$$

Prinzip von Galilei: In IS' haben N1 und N2 dieselbe Form:

$$m \frac{d^2 x'_i}{dt'^2} = \begin{cases} 0 \\ K'_i(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t') \end{cases} \quad (4.27)$$

Galilei-Transformation

$$\boxed{x'_i = \left(\sum_j A_{ij} x_j \right) - v_i t - x_{0i} \quad t' = t - t_0 \quad (4.28)}$$

A : Drehmatrix, \vec{v} : Relativgeschwindigkeit,
 \vec{x}_0 : Ursprungsschiebung

Check:

$$\frac{d}{dt'} x'_i(t') = \left(\sum_j A_{ij} \dot{x}_j \right) - v_i \quad (4.29)$$

$$m \frac{d^2}{dt'^2} x'_i(t') = m \sum_j A_{ij} \ddot{x}_j = \begin{cases} 0 \\ \sum_j A_{ij} K_j(x, \dot{x}, t) \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ K'_i(x', \dot{x}', t') \end{cases} \quad (4.30)$$

Also ist N2 forminvariant. K_i und K'_i sind im Allgemeinen verschiedene Funktionen ihrer Argumente. Dennoch gilt

$$\vec{K} = \sum_i m \ddot{x}_i \hat{e}_i = \sum_i m \ddot{x}'_i \hat{e}'_i = \vec{K}' \quad (4.31)$$

denn dies sind die selben Vektoren, nur beschrieben in unterschiedlichen Bezugssystemen.

4.2.3 Zusammenfassung

- **Inertialsysteme**

Newtons Bewegungsgleichungen gelten nur in Inertialsystemen.

- **Forminvarianz von N2**

Transformationen von kartesischen KS zu anderen lassen im Allgemeinen $m\ddot{\vec{r}} = 0$ nicht gelten. Die Forminvarianz von N2 gewährleisten nur Galileitransformationen:

$$\vec{r} \mapsto \vec{r}' = D\vec{r} + \vec{v}t + \vec{r}_0 \quad (4.32)$$

$$t \mapsto t' = t + t_0 \quad (4.33)$$

- **Passive und aktive Transformation:**

1. *Passive Transformation:*

Ein physikalisches System wird von zwei Inertialsystemen aus betrachtet. Beide Experimentatoren sehen die gleichen physikalischen Gesetze (Forminvarianz der Bewegungsgleichung N2). Dies ist in (??) und (??) der Fall.

2. *Aktive Transformation:*

Betrachte zwei physikalische Systeme vom gleichen Inertialsystem aus, welche durch Galileitransformation ineinander übergehen. Auch hier gilt Forminvarianz von N2.

- **Bemerkungen**

- Galilei-Invarianz gilt nur für Geschwindigkeiten $v \ll c$, denn die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist in allen Bezugssystemen konstant (gleich), was ein Widerspruch zu $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}$ darstellt.
- Die Klasse dieser Inertialsysteme - verknüpft mit den Galileitransformationen - definiert Newtons *absoluten Raum*:

Newton: „Der absolute Raum, in seiner Natur ohne Beziehung zu etwas Äußerem, bleibt immer gleich und unveränderlich.“

Kritik: Woran kann man diesen absoluten Raum festmachen? (Erde im Zentrum der Welt?, Sonne ...?, Milchstraße ...?)

Einstein: „Physik ist nicht „einfach“ in einem globalen, absoluten Raum, sondern sie ist „einfach“ in jedem lokalen, „frei fallenden“ Bezugssystem.“

⇒ Aufgabe des Postulats des absoluten Raums.

4.3 Beschleunigte Bezugssysteme

Wird O' relativ zu O beschleunigt, misst O' andere Kräfte als O , und merkt so die Beschleunigung. O' ist somit kein IS.

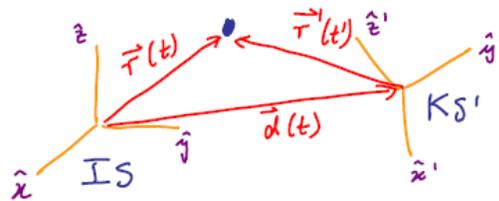
4.3.1 Beispiele



O sagt: Ich ruhe, Kugel bewegt sich nicht, spürt also keine Kraft.
 O' sagt: Ich ruhe, Kugel beschleunigt mit $a\hat{x}$ nach rechts, spürt also Kraft $\vec{F}' = m\vec{a}$ (Scheinkraft bzw. Trägheitskraft)

Eine *Scheinkraft* oder *Trägheitskraft* ist keine wirkliche Kraft, sie wird nur gebraucht, um die Messung in dem beschleunigten BS O' zu interpretieren, falls diese Beschleunigung nicht berücksichtigt wird. In einem IS sind keine Scheinkräfte vorhanden.

2. Linear beschleunigtes BS



Betrachte *passive Transformation*:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{d}(t) \tag{4.34}$$

z.B. $\vec{d}(t) = \frac{1}{2}\vec{b}t^2$, also ist KS' kein IS.

Für ein kräftefreies Teilchen in IS gilt

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = 0 \tag{4.35}$$

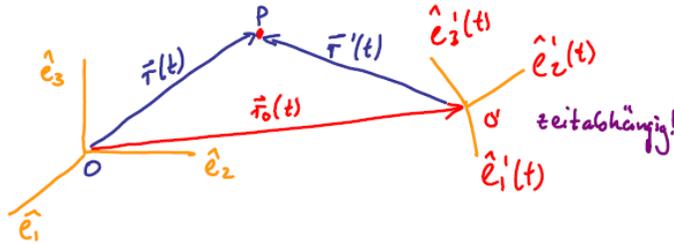
In KS' dagegen

$$m\ddot{\vec{r}}'(t) \stackrel{(3.31)}{=} m(\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{d}}) = 0 - m\vec{b} \neq 0 \tag{4.36}$$

Im beschleunigten BS empfindet das Teilchen also eine Trägheitskraft.

4.3.2 Allgemeine Transformationsregel

Sei O (z.B. raumfest) ein IS, O' (z.B. rotierend) kein IS.



Ort

Dann ergibt sich für den Ortsvektor in O'

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0(t) \tag{4.37}$$

Geschwindigkeit

$$\dot{x}'_i(t)\hat{e}'_i(t) = x_i(t)\dot{\hat{e}}_i - x_{i0}(t)\dot{\hat{e}}_i \tag{4.38}$$

$$\underbrace{\dot{x}'_i(t)\hat{e}'_i(t)}_{(1)} + \underbrace{x'_i(t)\dot{\hat{e}}'_i(t)}_{(2)} = \underbrace{\dot{x}_i(t)\hat{e}_i}_{(3)} - \underbrace{x_{i0}(t)\dot{\hat{e}}_i}_{(4)} \tag{4.39}$$

- (1) Geschwindigkeit von P in O'
- (2) Geschwindigkeit eines starr mit O' rotierenden Punktes von O aus gesehen
- (3) Geschwindigkeit von P in O
- (4) Relativgeschwindigkeit zwischen O und O'.

Kurznotation für (??) (der Punkt als Hinweis auf die Zeitableitung gilt hier ausnahmsweise nur für die Komponenten):

$$\dot{\vec{r}}' + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}'}_{(??)} = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0 \tag{4.40}$$

Einschub

Warum ist $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ die allgemeinste Form von $\sum_j x'_j(t)\dot{\hat{e}}'_j(t)$?

Anforderung an die Basisvektoren von O':

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij} \quad \forall t \tag{4.41}$$

Da diese Beziehung für alle Zeiten gelten muss, gilt für die zeitliche Änderung dieses Zusammenhangs

$$0 = \frac{d}{dt}(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j) = \begin{cases} 2 \dot{\hat{e}}'_i \cdot \hat{e}'_i & \text{falls } i = j \\ \dot{\hat{e}}'_i \cdot \hat{e}'_j + \hat{e}'_i \cdot \dot{\hat{e}}'_j & \text{falls } i \neq j \end{cases} \tag{4.42}$$

Diese Bedingung wird erfüllt durch

$$\dot{\hat{e}}'_i = \vec{\omega} \times \hat{e}'_i \quad (4.43)$$

Check:

$$2(\vec{\omega} \times \hat{e}'_i)\hat{e}'_i = 2\vec{\omega}(\hat{e}'_i \times \hat{e}'_i) = 0$$

$$(\vec{\omega} \times \hat{e}'_i) \cdot \hat{e}'_j + \hat{e}'_i \cdot (\vec{\omega} \times \hat{e}'_j) = (\hat{e}'_j \times \vec{\omega}) \cdot \hat{e}'_i + \hat{e}'_i \cdot (\vec{\omega} \times \hat{e}'_j) = 0$$

$\vec{\omega}$: momentane Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}$: Drehachse $ \vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt}$: Drehgeschwindigkeit	(vgl. mit (??))
---	-----------------

Ende des Einschubs

Für die Transformation der Geschwindigkeitsvektoren gilt somit

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{d}{dt}(\vec{r}') = \underbrace{\dot{\vec{r}}'}_{\text{nur Komponenten}} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4.44)$$

$\frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \hat{e}'_i + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4.45)$
--

(Eselbrücke: $(\frac{d}{dt}R)_{IS} = (\frac{d}{dt}\vec{R}')_{BS'} + (\vec{\omega} \times \vec{R}')_{BS'}$)

Beschleunigung

$$\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}' = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0) = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.46)$$

$$= \ddot{\vec{r}}' + (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}') + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.47)$$

$$= \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'(1 + 1) + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.48)$$

Daraus folgt für die Bewegungsgleichung (N2) in O':

$$\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}' \quad (4.49)$$

$$\stackrel{(??.)}{=} \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} - \underbrace{m\ddot{\vec{r}}_0}_{\vec{F}_l} + \underbrace{2m\dot{\vec{r}}' \times \vec{\omega}}_{\vec{F}_c} + \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega})}_{\vec{F}_z} + m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}} \quad (4.50)$$

$$= \vec{F} + \vec{F}_l + \vec{F}_c + \vec{F}_z + m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}} \quad (4.51)$$

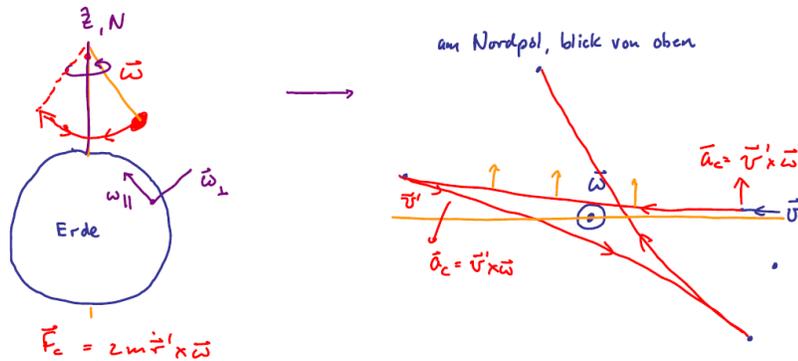
Die Scheinkräfte $\vec{F}_l, \vec{F}_c, \vec{F}_z, m\vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}$ werden in O' (aber nicht in O) benötigt (weil O' kein IS ist), um die (sehr realen!), in O' gemessenen Beschleunigungen zu interpretieren.

4.3.3 Beispiel: Corioliskraft

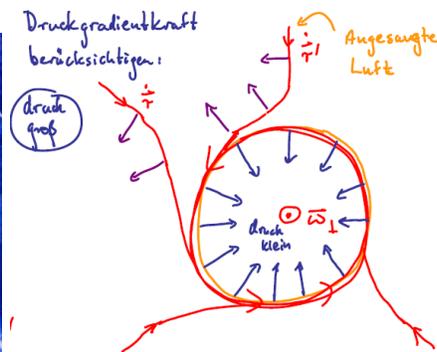
Wir betrachten die Wirkung der Corioliskraft

$$\vec{F}_c = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega}) \tag{4.52}$$

auf ein am Nordpol aufgestelltes Pendel:



Anwendung: Wirbelstürme



Warme Luft über dem Ozean steigt auf und erzeugt ein Niedrigdruckgebiet, das Luft lateral ansaugt. Die Corioliskraft lenkt die angesaugte Luft ab, sodass ein Wirbel entsteht. Naiv würde man somit einen Wirbel erwarten, der sich im Uhrzeigersinn dreht, doch Wirbelstürme drehen immer gegen den Uhrzeigersinn. Dies kann man sich klar machen, wenn man die Druckgradientkraft berücksichtigt, die der Corioliskraft entgegenwirkt, weshalb in einer bestimmten Auslenkung der angesaugten Luft ein Kräftegleichgewicht entsteht, welches die Luftströmung auf einer Kreisbahn im Gegenuhrzeigersinn hält.

Teil II

Kleine Schwingungen

Kapitel 5

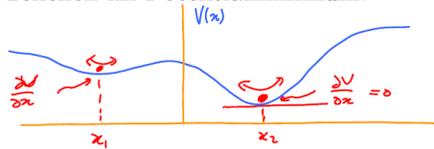
Freie Schwingungen

Ziel

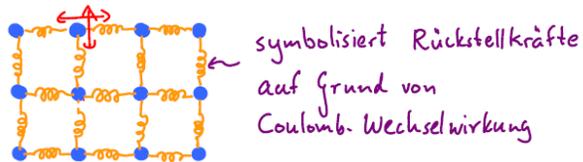
Generische Beschreibung der Dynamik der Umgebung von stabiler Gleichgewichtslage.

Beispiele

- Teilchen im Potentialminimum:



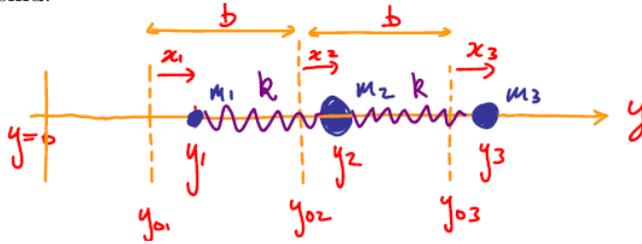
- Atome im Kristallgitter:



5.1 Beispiel: Dreiatomiges Molekül

Problembeschreibung und Variablendeklaration

Es werden drei Atome betrachtet, die durch zwei harmonische Federn gekoppelt sind:



- Positionen: y_i , wobei $i \in \{1, 2, 3\}$
- Gleichgewichtspositionen: y_{0i}
- Gleichgewichtsabstände: $b = y_{03} - y_{02} = y_{02} - y_{01}$
- Auslenkungen: $x_i = y_i - y_{0i}$

Beschreibung der Potentiellen Energie

$$V(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}k((y_2 - y_1 - b)^2 + (y_3 - y_2 - b)^2) \quad (5.1)$$

$$= \frac{1}{2}k((y_2 - y_1 - (y_{02} - y_{01}))^2 \quad (5.2)$$

$$+ (y_3 - y_2 - (y_{03} - y_{02}))^2) \quad (5.3)$$

$$= \frac{1}{2}k((x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2) \quad (5.4)$$

$$= \frac{1}{2}k(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 + x_2^2) \quad (5.5)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i \hat{V}_{ij} x_j \quad \text{wobei } \hat{V} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Beschreibung der kinetischen Energie

$$T(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{y}_i^2 \quad (5.7)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i \hat{T}_{ij} x_j \quad \text{wobei } \hat{T} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Kraft auf Teilchen n

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n} \quad (5.10)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i \hat{V}_{ij} x_j \right) \quad (5.11)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ni} \hat{V}_{ij} x_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i \hat{V}_{ij} \delta_{nj} \quad (5.12)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_j \hat{V}_{nj} x_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 x_j \hat{V}_{jn} \quad (5.13)$$

$$\stackrel{(\text{??})}{=} -\sum_j \hat{V}_{nj} x_j \stackrel{(N2)}{=} m_n \ddot{y}_n \quad (5.14)$$

System von DGL

Daraus ergibt sich in vektorieller Schreibweise ein System von Differentialgleichungen: (Setze $(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}$)

$$\boxed{\hat{T} \ddot{\vec{x}} = -\hat{V} \vec{x}} \quad (5.15)$$

Ansatz: $\vec{x}(t) = \vec{A} e^{i\omega t}$ (ω und \vec{A} sind zu bestimmen.)

Einsetzen:

$$(\hat{T} \ddot{\vec{x}})_i = -(\hat{T} \vec{A})_i e^{i\omega t} \omega^2 = -e^{i\omega t} (\hat{A} \hat{V})_i \quad (5.16)$$

$$\Leftrightarrow (\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) \vec{A} = 0 \quad (5.17)$$

Dies ist ein verallgemeinertes Eigenwertproblem der Form $(\hat{M} - \omega^2) \vec{A} = 0$ mit $\hat{M} = \hat{T}^{-1} \hat{V}$.

Lineares Gleichungssystem

Gleichung (??) ist ein Lineares Gleichungssystem, welches für $\vec{A} \neq 0$ nur lösbar ist, wenn die Matrix $(\hat{V} - \omega^2 \hat{T})$ nicht invertierbar ist. Dies lässt sich bewerkstelligen mit

$$\boxed{\det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) = 0} \quad (5.18)$$

Explizit eingesetzt mit $m_1 = m_3 = m, m_2 = M$:

$$0 = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m_1 & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} \quad (5.19)$$

$$= \dots = (k - \omega^2 m) \cdot \omega^2 \cdot (\omega^2 m M - k(2m + M)) \quad (5.20)$$

Dies liefert die *Eigenwerte*:

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M} \right) \quad (5.21)$$

welche Gleichung (??) mit den zugehörigen Eigenvektoren erfüllen.

Eigenvektoren

Folgende Eigenwertbedingung ist durch die Eigenvektoren mit ihren Eigenwerten zu erfüllen (Gleichung (??)):

$$(\hat{V} - \omega_{(k)}^2 \hat{T}) \cdot \vec{A}^{(k)} = 0 \quad (5.22)$$

Das ergibt für jeden Eigenwert ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbestimmten (den Komponenten der Eigenvektoren). Diese können mit ein wenig Algebra gelöst werden (siehe Skript von Prof. von Delft [KSchw7]) und man erhält die (unnormierten) Eigenvektoren („Normalmoden“):

$$\vec{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Allgemeine Lösung des Systems von DGLen (??)

Es werden *sechs* unabhängige Integrationskonstanten (sechs Anfangsbedingungen: für jede Masse Ort und Geschwindigkeit) benötigt.

1. Versuch:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^3 c^{(k)} \vec{A}^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t + \phi^{(k)}) \quad (5.24)$$

($c^{(k)}$ und $\phi^{(k)}$ konstant)

Aber für $\omega^{(1)} = 0$ ist $c^{(1)}$ und $\phi^{(1)}$ linear abhängig (fällt zu einer Konstanten zusammen, d.h. es könnten mit dieser Lösung keine zwei Randbedingungen für die Schwingungsmode 1 berücksichtigt werden.)

2. Versuch:

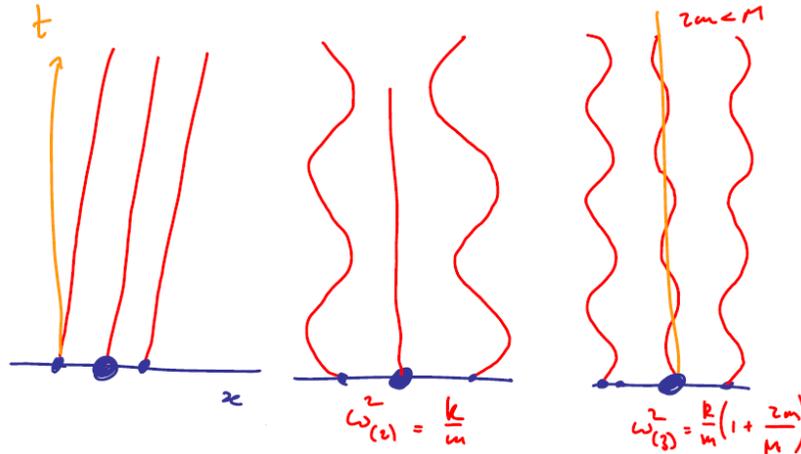
$$\vec{x}(t) = \vec{A}^{(1)}(c^{(1)} + v^{(1)}t) + \sum_{k=2}^3 c^{(k)} \vec{A}^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t + \phi^{(k)}) \quad (5.25)$$

Da nun die $A^{(k)}$ den vollständigen Vektorraum aufspannen, sind beliebige Anfangsbedingungen durch $c^{(1)}, v^{(1)}, c^{(2)}, \phi^{(2)}, c^{(3)}, \phi^{(3)}$ repräsentierbar.

Die korrekte allgemeine Lösung von (??) lautet also

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (a_1 t + b_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \\ & + \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} A_3 \cos(\omega_3 t + \alpha_3) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Visualisierung der drei Eigenschwingungen



3D-Illustrationen der Eigenschwingungen verschiedener Molekülen sind zu finden auf www.ess.ucla.edu/~schauble/molecular_vibrations.htm.

Zusammenfassung: Gekoppelte Schwingung dreier Atome

(Bewegung in einer Dimension, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ Auslenkung für Teilchen 1,2,3)

Potentielle Energie $V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_i \hat{V}_{ij} x_j$ mit $\hat{V} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Kraft auf Teilchen n $F_n = -\sum_j \hat{V}_{nj} x_j$

Bewegungsgleichung $\hat{T} \ddot{\vec{x}} = -\hat{V} \vec{x}$ mit $\hat{T} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$

Lösungsansatz $\vec{x}(t) = \vec{A} e^{i\omega t}$

Eigenwertproblem $(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) \vec{A} = 0 \Rightarrow \det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) = 0$

liefert die Eigenwerte

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)$$

und die Eigenvektoren $\vec{A}^{(k)}$

$$\vec{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allg. Lösung

$$\vec{x}(t) = \vec{A}^{(1)}(c^{(1)} + v^{(1)}t) + \sum_{k=2}^3 c^{(k)} \vec{A}^{(k)} \cos(\omega^{(k)}t + \phi^{(k)})$$

wobei $c^{(k)}$ und $\phi^{(k)}$ konstant

(für die Erfüllung von Randbedingungen)

5.2 Schwingungen vieler Teilchen

Betrachte System mit f Freiheitsgraden.

(z.B. N Teilchen in drei Dimensionen: $f=3N$)

- Koordinaten: $q = (q_1, \dots, q_f)$ z.B. $(r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}, \dots, r_{Nx}, r_{Ny}, r_{Nz})$
- Geschwindigkeiten: $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$
- Potentielle Energie: $U = U(q_1, \dots, q_f)$
- Bewegungsgleichung: $m\ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$

Gleichgewichtslagen

Gleichgewichtslagen (Fixpunkte) sind die zeitunabhängigen Lösungen der Bewegungsgleichung, d.h. die Stellen q_i an denen die Teilchen sich nicht bewegen. Also gilt dort

$$q_i = q_{i0} \quad \forall i = 1, \dots, f \quad \text{und} \quad \dot{q}_i = 0, \quad \ddot{q}_i = 0 \quad (5.27)$$

und für die Bewegungsgleichung an diesen Stellen

$$\boxed{-\frac{\partial U}{\partial q_i} \Big|_{q_{i0}} = m\ddot{q}_i = 0} \quad (5.28)$$

O.E.d.A. kann man für einen Fixpunkt fordern

$$E_{i0} = U(q_{i0}) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{q}_{i0} = 0 \quad (5.29)$$

Umgebung eines Fixpunktes des Potentials

Bei kleinen Auslenkungen $x_i = q_i - q_{i0}$ kann die Umgebung eines Fixpunktes näherungsweise als parabelförmig angenommen werden, deshalb:

Taylor-Entwicklung von U in f Koordinaten um die q_{i0} :

$$\begin{aligned} U(q_1, \dots, q_i, \dots, q_f) &= \\ &= \underbrace{U(q_0)}_{\stackrel{(\text{??})}{=} 0} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q_i} \Big|_{q_{i0}}}_{\stackrel{(\text{??})}{=} 0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q_{i0}} x_i x_j + O(x^3) \end{aligned} \quad (5.30)$$

(wobei $O(x^3)$ Terme wie x_i^3 und $x_i^2 \cdot x_j$ enthält)

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}}_{\text{Hess-Matrix: } = \hat{V}_{ij} \Big|_{q_{i0}}} x_i x_j + O(x^3) \quad (5.31)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i \hat{V}_{ij} x_j = -\frac{1}{2} (x_1, \dots, x_f) \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{fi} & \dots & V_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

In Kurznotation:

$$U(q) = \frac{1}{2}x^T \hat{V}x \quad (5.33)$$

Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (5.34)$$

$$\stackrel{(\text{??})}{=} -\sum_{k=1}^f \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x_k}}_{\sum_j \hat{V}_{kj}x_j} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_i}}_{\delta_{ki}} \quad (5.35)$$

$$= -\sum_{k,j} \hat{V}_{kj}x_j \delta_{ki} \quad (5.36)$$

$$m_i \ddot{x}_i = -\sum_j \hat{V}_{ij}x_j \quad (5.37)$$

Gleichgewichtsbedingung

Bedingung für *stabiles Gleichgewicht*:

$$U(q_0) < U(q_0 + x) \quad (5.38)$$

solange x genügend klein. D.h. mit Forderung (??) und der Notation $D^{-1}VD$ für die diagonalisierte Matrix von V.

$$0 < U(x) = \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i \hat{V}_{ij}x_j \quad (5.39)$$

$$= \frac{1}{2}x^T DD^{-1}\hat{V}DD^{-1}x \quad (5.40)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \tilde{x}_i \underbrace{\tilde{V}_{ij}}_{=\delta_{ij}\tilde{V}_i} \tilde{x}_j \quad (5.41)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \tilde{V}_i \tilde{x}_i^2 \Rightarrow \tilde{V}_i > 0 \quad (5.42)$$

D.h. die Eigenwerte von V sind positiv. Man nennt V dann positiv-definit.

System von DGLen

Die Differentialgleichung (??) lässt sich in Matrixnotation schreiben als

$$\hat{T}\ddot{\vec{x}} + \hat{V}\vec{x} = 0 \quad (5.43)$$

wobei $\vec{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_f)$

Allgemeines Lösungsverfahren

Komplexer Lösungsansatz:

$$X(t) = Ae^{-i\omega t} \tag{5.44}$$

wobei A und X komplexe Vektoren mit f Komponenten sind.

Einsetzen:

$$0 = e^{-i\omega t} \sum_j (-\omega^2 \hat{T}_{ij} + \hat{V}_{ij}) A_j \tag{5.45}$$

$$= (\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) A \tag{5.46}$$

Dies ist ein Eigenwertproblem, welches für nicht-triviale Lösungen erfordert:

$$\det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) = 0 \tag{5.47}$$

Die Determinante in (??) liefert ein Polynom vom Grad f von ω^2 :

$$p^{(f)}(\omega^2) = 0 \quad (\text{charakteristisches Polynom}) \tag{5.48}$$

Eigenfrequenzen, Eigenvektoren, Lösungen

Die Nullstellen $\omega_{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \dots, f$) des Polynoms (??) sind die Eigenwerte, welche mit den zugehörigen Eigenvektoren die Gleichung (??) erfüllen und somit die Lösungen der DGL (??) liefern:

$$X^{(\alpha)}(t) = A^{(\alpha)} e^{-i\omega_{(\alpha)} t} \tag{5.49}$$

- *Instabiles Gleichgewicht:*

Im Allgemeinen können die Eigenwerte komplexwertig, also $\omega_{(\alpha)}^2$ negativ sein. Dann ist entweder $Im(\omega_{(\alpha)}) > 0$ oder $Im(-\omega_{(\alpha)}) > 0$, woraus folgt

$$X^{(\alpha)}(t) = A^{(\alpha)} e^{-i(Im(\omega_{(\alpha)}))t} = A^{(\alpha)} e^{Im(\omega_{(\alpha)})t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty \tag{5.50}$$

was ein instabiles Gleichgewicht beschreibt. Daraus folgt die

Bedingung für stabiles Gleichgewicht:

$$(\omega_{(\alpha)})^* = \omega_{(\alpha)}^2 \geq 0 \tag{5.51}$$

- *Spezialfall $\omega_{(\alpha)} = 0$:*
Eingesetzt in (??) ergibt sich

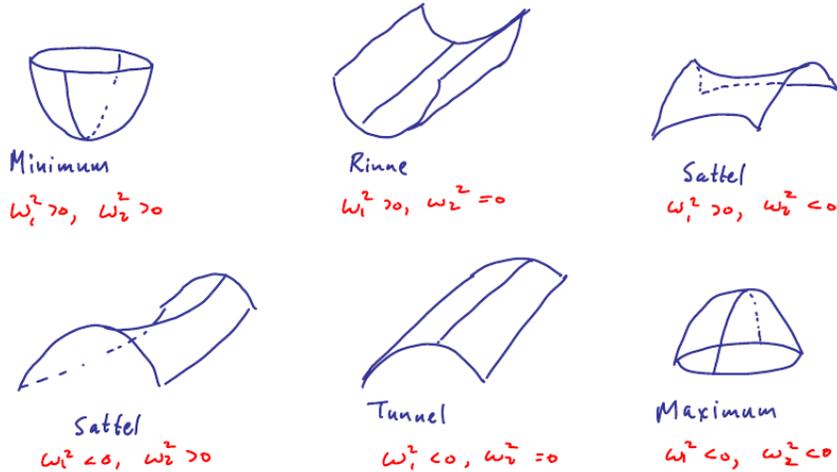
$$\sum_j \hat{V}_{ij} A_j^{(\alpha)} = 0 \tag{5.52}$$

(D.h. das Potential ändert sich nicht in A_j^α -Richtung.)

$$= -F_i^{(\alpha)} = -m_i \ddot{x}_i \Rightarrow x^{(\alpha)}(t) = C_1 + C_2 t \tag{5.53}$$

D.h. $\omega_{(\alpha)} = 0$ entspricht einer gleichförmigen Bewegung in $A^{(\alpha)}$ -Richtung.

• Beispiele



Beispiel für $f=1$

Gleichung (??) wird zu

$$U(p) = U_0 + \frac{1}{2}kx^2 + O(x^3) \tag{5.54}$$

Daraus folgt für die Bewegungs-DGL

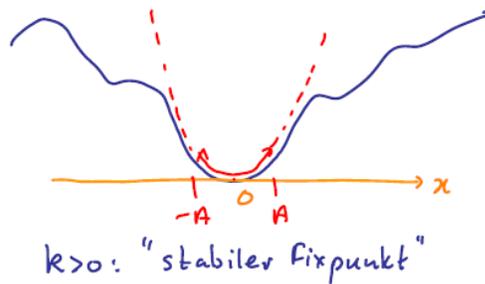
$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{5.55}$$

welche der Standard-DGL für den *Homogenen Oszillator* mit Eigenschwingung $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ entspricht.

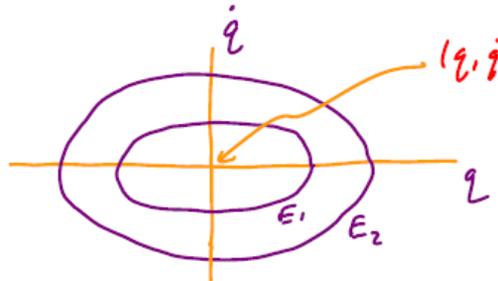
Bestätigung von (??):

- Fall $k > 0$: stabiler Fixpunkt

Lösung für (??): $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$



System folgt einer Ellipse im *Phasenraum*:

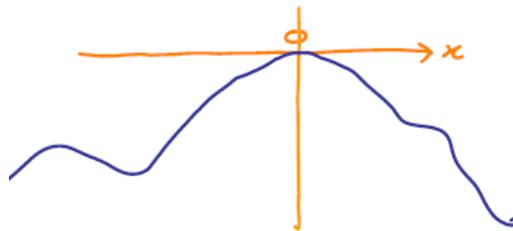


(Bahn mit konstanter Gesamtenergie $E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2$)

Man nennt den Ursprung dann den *elliptischen Fixpunkt*.

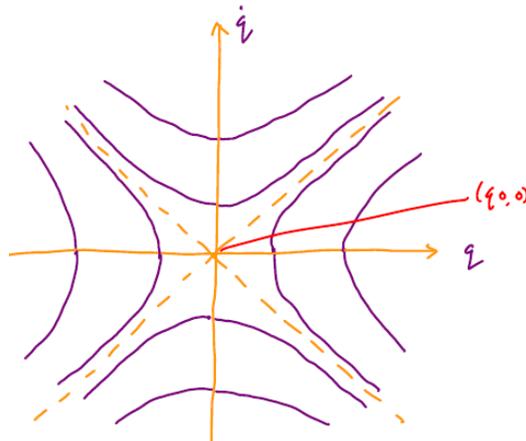
- Fall $k < 0$: instabiler Fixpunkt
Lösung für (??): $x(t) = A \cosh(\omega_0 t + \delta)$

Denn eine Lösung des charakteristischen Polynoms lautet dann
 $\omega_0 = \sqrt{-k/m} = i\omega_0 \Rightarrow x(t) = Ae^{-i(i\omega_0)t} = Ae^{\omega_0 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$



$k < 0$: "instabiler Fixpunkt"

System folgt einer Hyperbel im *Phasenraum*:



(Näherung für kurze Zeiten)

Man nennt den Ursprung dann den *hyperbolischen Fixpunkt*.

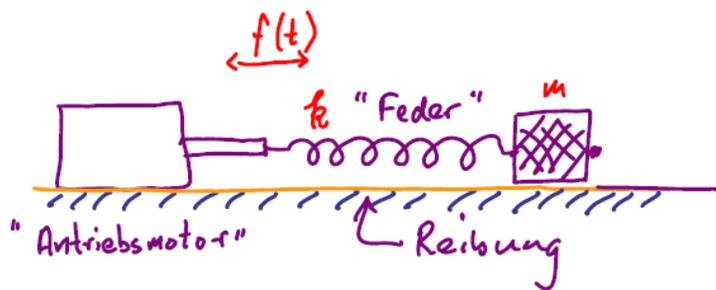
Zusammenfassung: Schwingungen vieler Teilchen(System mit f Freiheitsgraden, z.B. $f=3N$ für N Teilchen in 3 Dimensionen)

Potentielle Energie $U(q_i) = \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i \hat{V}_{ij} x_j$ wobei $i = 1, \dots, f$ und $\hat{V}_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$ **Kraft/Bewegungsgleichung** $m_i \ddot{x}_i = - \sum_{j=1}^f \hat{V}_{ij} x_j \Leftrightarrow \hat{T} \ddot{\vec{x}} + \hat{V} \vec{x} = 0$ **Lösungsansatz (komplex)** $X(t) = A e^{-i\omega t}$ **Eigenwertproblem** $(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) \vec{A} = 0 \Rightarrow \det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) = 0$ liefert das charakteristische Polynom vom Grad f
 $p^{(f)}(\omega^2) = 0$ Dessen Nullstellen ω_α sind die Eigenfrequenzen, die zusammen mit den zugeh. Eigenvektoren die Lösung der DGL liefern:**Lösung** $X_\alpha(t) = A_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}$ **stabiles Gleichgewicht** $\omega_\alpha^2 \geq 0$ (Bedingung)

Kapitel 6

Erzwungene Schwingungen

eines gedämpften harmonischen Oszillators



Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad (6.1)$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m}} \quad (6.2)$$

λ : Reibungskonstante (für $m=\text{const}$) $\lambda > 0$

ω_0 : Eigenfrequenz

$F(t)$: antreibende Kraft

Abkürzende Schreibweise:

$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\lambda\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)}_{:=L_t} = \frac{F(t)}{m} \quad \Leftrightarrow \quad L_t x = \frac{F(t)}{m} \quad (6.3)$$

Ziel ist es, eine Lösung obiger DGL für eine beliebige antreibende Kraft zu finden.

6.1 Periodischer Antrieb

Antriebskraft

$$F(t) = f_\omega \cos(\omega t) \quad (6.4)$$

Wir betrachten nun aus praktischen Gründen die

komplexe DGL (Realteil dieser DGL ist die eigentliche)

$$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = L_t X = \frac{f_\omega}{m} e^{i\omega t} \quad (6.5)$$

Die gesuchte Funktion $x(t)$ ist also $\Re(X(t))$.

Lösung

Allgemeine Form der Lösung:

$$X(t) = X_{\text{hom}} + X_{\text{par}} \quad (6.6)$$

X_{hom} : Allgemeine Lösung der Homogenen DGL

X_{par} : Partikuläre Lösung der Inhomogenen DGL

1. Homogene Lösung

$$\text{Ansatz: } X_h(t) = C e^{-i\nu t} \quad (6.7)$$

$$\text{eingesetzt: } L_t X_h(t) = 0 \quad (6.8)$$

$$= e^{-i\nu t} ((-i\nu)^2 - 2i\nu\lambda + \omega_0^2) \quad (6.9)$$

Polynom von ν (nach ν gelöst):

$$\boxed{\nu_\pm = \pm \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}_{:= \Omega} - i\lambda} \quad (6.10)$$

Nun kann man *drei Fälle* unterscheiden:

- *schwache Dämpfung*: $\omega_0 > \lambda$ also $\Omega \in \mathbb{R}$

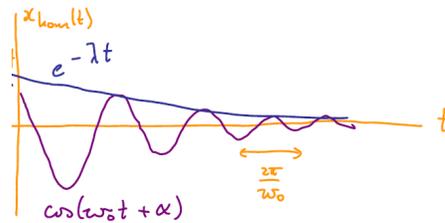
$$\Rightarrow x_h(t) = \Re(X_h(t)) \quad (6.11)$$

$$= \Re(C_- e^{-i\Omega t - \lambda t} + C_+ e^{i\Omega t - \lambda t}) \quad (6.12)$$

$$= \Re(e^{-\lambda t} (C_- e^{-i\Omega t} + C_+ e^{i\Omega t})) \quad (6.13)$$

Für $C_\pm = \frac{|C|}{2} \cdot e^{\pm i\alpha}$ erhält man zwei äquivalente Darstellungen der

$$\text{Lösung: } \boxed{\begin{aligned} x_h(t) &= e^{-\lambda t} |C| \cos(\Omega t + \alpha) & (6.14) \\ x_h(t) &= e^{-\lambda t} (A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t)) & (6.15) \end{aligned}}$$



- *starke Dämpfung*: $\omega_0 < \lambda$ also $\Omega \in \mathbb{C}$

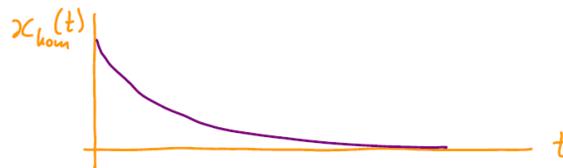
$$\Rightarrow i\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} := i\Gamma \quad \text{wobei } \Gamma \in \mathbb{R} \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \nu_{\pm} = \pm i\Gamma - i\lambda = -i(\pm\Gamma + \lambda) \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow x_h(t) = C_+ e^{-\Gamma t - \lambda t} + C_- e^{\Gamma t - \lambda t} \quad (6.18)$$

Dies ist keine periodische Funktion mehr:

$$x_h(t) := (A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}) \quad (6.19)$$



- *aperiodischer Grenzfall*: $\omega_0 = \lambda$

$$\Rightarrow \nu_{\pm} = \nu_+ = \nu_- = -i\lambda \quad (6.20)$$

$$x_h(t) = (A + Bt)e^{-\lambda t} \quad (6.21)$$

In der allgemeinen Lösung befindet sich ein zusätzlicher in t linearer Term, da sie sonst nur eine Randbedingung erfüllen würde.

2. Partikuläre Lösung

$$\text{Ansatz: } X_p(t) = \frac{f\omega}{m} \chi(\omega) e^{i\omega t} \quad (6.22)$$

$$\text{eingesetzt in: } L_t X_p(t) = \frac{f\omega}{m} e^{i\omega t} \quad (6.23)$$

$$= \frac{f\omega}{m} \chi(\omega) e^{i\omega t} (-\omega^2 + 2i\omega\lambda + \omega_0^2) \quad (6.24)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \chi(\omega) (-\omega^2 + 2i\omega\lambda + \omega_0^2) \quad (6.25)$$

$$(6.26)$$

Die Funktion

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\lambda} \quad (6.27)$$

heißt *Dynamische Suszeptibilität*. (Statische Suszeptibilität $\chi(0) = \frac{1}{\omega_0^2}$)

Eigenschaften der Suszeptibilität:

- Suszeptibilität = $\frac{\text{Reaktion}}{\text{äußere Störung}} = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} \left(= \frac{X_p}{f_\omega e^{i\omega t}/m} \right)$
- Betrag von $\chi(\omega) = |\chi(\omega)|e^{i\delta(\omega)}$:

$$|\chi(\omega)| = \left| \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega\lambda} \right| = \left| \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega\lambda}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\lambda)^2} \right| \quad (6.28)$$

$$= \left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\lambda)^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\lambda)^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.29)$$

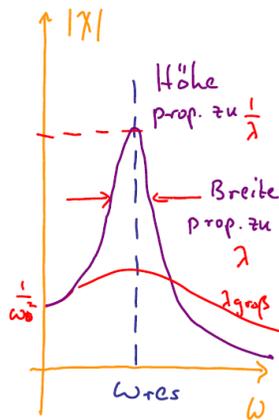
$$= \frac{1}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\lambda)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.30)$$

Amplitude:

$$|\chi(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\lambda)^2}} \quad (6.31)$$

Resonanzfrequenz:

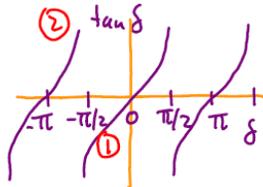
$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \quad (6.32)$$



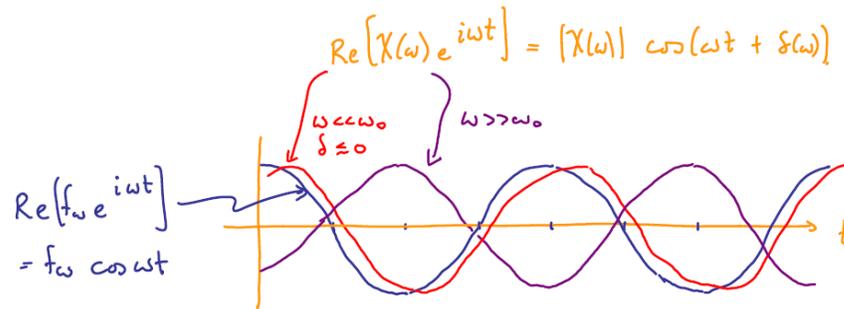
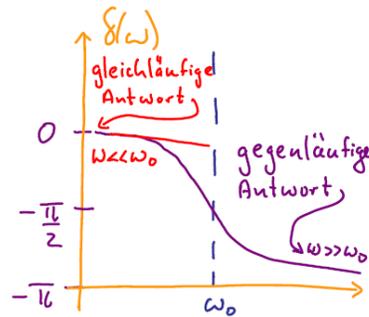
- Phasenverschiebung von $\chi(\omega) = |\chi(\omega)|e^{i\delta(\omega)}$:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\omega\lambda}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\lambda)^2} \quad (6.33)$$

$$\tan \delta(\omega) = \frac{2\omega\lambda}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (6.34)$$



Man sieht dass für $\omega < \omega_0$ die Phasenverschiebung zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ (1), und für $\omega > \omega_0$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $-\pi$ (2) verlaufen muss.



Zusammenfassung: Erzwungene Schw. mit periodischem Antrieb

-
- **Bewegungsgleichung:** $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_w \cos(\omega t)$
 - **...im Komplexen:** $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_w}{m} e^{\pm i\omega t}$
 - **Allgemeiner Ansatz:** $X(t) = X_{\text{hom}} + X_{\text{part}}$
 - **Homogene Lösung(en):** $X_h(t) = e^{-\lambda t} \dots$ (exponentieller Abfall)
 - **Partikuläre Lösung:** $X_p(t) = \chi(\omega) \frac{f_w}{m} e^{\pm i\omega t}$ (periodisch)

mit der **Dynamischen Suszeptibilität:** $\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\lambda\omega} = |\chi(\omega)| e^{i\delta(\omega)}$

mit **Amplitude:** $|\chi(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\lambda)^2}}$

deren **Resonanzfrequenz:** $\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

und **Phasenverschiebung:** $\delta(\omega) = \arctan\left(\frac{2\omega\lambda}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)$

6.2 Allgemeiner Antrieb

In der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)/m \quad (6.35)$$

seien nun beliebige Funktionen zugelassen.

6.2.1 Lösung mit Fourieranalyse

Wie betrachten die Funktion nun unter der Fouriertransformation

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f_\omega e^{-i\omega t} \quad (6.36)$$

mit der Fouriertransformierten von f bzw. Umkehrtransformation

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{i\omega t'} \quad (6.37)$$

Check:

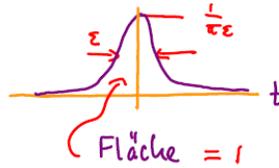
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} \quad (6.38)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t'} e^{-i\omega t} f(t')}_{\stackrel{*}{=} \delta(t-t')} \quad (6.39)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t-t') f(t') = f(t) \quad (6.40)$$

*: Betrachte die Verbreiterte Lorentz-Funktion:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t - |\omega|\epsilon} \quad (|\omega|\epsilon \text{ ist Dämpfungsfaktor}) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(e^{-\omega(it+\epsilon)} + e^{-\omega(-it+\epsilon)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left. \frac{e^{-\omega(it+\epsilon)}}{-it-\epsilon} \right|_0^{\infty} + \left. \frac{e^{-\omega(-it+\epsilon)}}{it-\epsilon} \right|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{it+\epsilon} + \frac{1}{-it+\epsilon} \right) \\ &= \frac{\epsilon/\pi}{\epsilon^2 + t^2} \end{aligned} \quad (6.41)$$



Lösung

Für die Bewegungsgleichung (??) ($L_t X = f(t)/m$) wählen wir nun den (Fourier-)Ansatz

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} X_\omega e^{-i\omega t} \quad (6.42)$$

Wenn wir für die allgemeine Antriebskraft ebenfalls eine Fourierdarstellung wählen, erhalten wir für die Bewegungsgleichung

$$L_t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} X_\omega e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \quad (6.43)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} X_\omega L_t e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \quad (6.44)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(X_\omega L_t e^{-i\omega t} - \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \right) = 0 \quad (6.45)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \underbrace{\left(X_\omega (-\omega^2 - 2\lambda i\omega + \omega_0^2) - \frac{f_\omega}{m} \right)}_{=0} = 0 \quad (6.46)$$

$$\Rightarrow X_\omega = \frac{f_\omega/m}{-\omega^2 - 2\lambda i\omega + \omega_0^2} \quad (6.47)$$

Setzen wir das Frequenzspektrum nun in (??) ein, erhalten wir die Lösung

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{f_\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\lambda i\omega} \quad (6.48)$$

Für die *Dynamische Suszeptibilität* erhalten wir

$$\chi(\omega) = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{X_\omega}{f_\omega/m} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\lambda i\omega} \quad (6.49)$$

Zusammenfassung: Erzwungene Schw. mit beliebigem Antrieb

Bewegungsgleichung	$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)/m$
Fouriertransf. der Kraft	$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} f_\omega e^{-i\omega t}$ mit Umkehrtransf. $f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{i\omega t'}$
Fourieransatz	$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} X_\omega e^{-i\omega t}$
Lösung für X_ω	$X_\omega = \frac{f_\omega/m}{-\omega^2 - 2\lambda i\omega + \omega_0^2}$
Dynamische Suszeptibilität	$\chi(\omega) = \frac{X_\omega}{f_\omega/m} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\lambda i\omega}$

6.2.2 Lösung mit Greenscher Funktion

Sei eine *Kraft*

$$f(t) = m\delta(t) \quad (6.50)$$

mit der Fouriertransformierten

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} m\delta(t) = m \quad (6.51)$$

Dann erhalten wir nach Lösen der Bewegungsgleichung für das *Frequenzspektrum* der Lösung

$$X_\omega = \frac{1}{-\omega^2 - 2\lambda i\omega + \omega_0^2} = \chi(\omega) \quad (6.52)$$

welches umgeschrieben werden kann in eine *Nullstellen-Zerlegung des Nenners*

$$X_\omega = -\frac{1}{(\omega - \nu_+)(\omega - \nu_-)} \quad (6.53)$$

$$\text{mit } \nu_+ = \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}_{:=\Omega} - i\lambda \quad \text{und} \quad \nu_- = -\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}_{:=\Omega} - i\lambda$$

Eingesetzt in (??) liefert

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{-1}{(\omega - \nu_+)(\omega - \nu_-)} \quad (6.54)$$

Nach Ausführen der Integration (z.B. mittels Bronstein) erhalten wir die *Lösung*

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{1}{\Omega} e^{-\lambda t} \sin(\Omega t) & \text{für } t > 0 \end{array} \right\} := \eta(t) \quad (6.55)$$

Diese Lösung wird *Greensche Funktion* genannt. Sie ist sehr nützlich, denn sie liefert einen formalen Ausdruck für die Antwort auf eine beliebige Antriebskraft $f(t)$:

$$X(t) = X_{\text{hom}} + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \eta(t-t') \frac{f(t')}{m} \quad (6.56)$$

Die Greensche Funktion erfüllt die DGL

$$L_t \eta(t) = \delta(t) \quad (6.57)$$

$$(\text{Check: } L_t X(t) = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t-t') \frac{f(t')}{m} = f(t)/m)$$

Außerdem folgt nach (??):

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega) e^{-i\omega t} \quad (6.58)$$

Konstruktion der Greenschen Funktion

mit Hilfe der *Kausalitätsbedingung*:

$$\eta(t-t') \propto \Theta(t-t') \quad (6.59)$$

$$\text{Wobei } \Theta(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}$$

und es gilt

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \Theta(t) \quad (\text{spez. 1-Funktion}) \quad (6.60)$$

$$\int_{-\infty}^t \Theta(t) dt = t \Theta(t) \quad (\text{Knick bei } t=0) \quad (6.61)$$

Aus der Kausalitätsbedingung und (??) resultieren zwei Eigenschaften für η :

1. $\eta(t)$ hat einen Knick bei $t=0$
2. $\eta_p(t) = \Theta(t)g(t)$ wobei g die homogene Lösung der DGL ist: $L_t g(t) = 0$

Ansatz (für $t > 0$ und $\omega_0 > \lambda$):

- $g(t) = e^{-\lambda t}(A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t))$
- Knick bei $t=0 \Rightarrow B = 0, A = \frac{1}{\omega_0}$

Resultat

$$\eta(t) = \Theta(t) \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} e^{-\lambda t} \quad (6.62)$$

Zusammenfassung: Greensche Funktion

Bewegungsgleichung $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)/m$

Zuerst lösen: $\ddot{\eta} + 2\lambda\dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = \delta(t)$ (Lösung ist Greensche Funktion)

Allgemeine Lösung $x(t) = x_{hom}(t) + \int dt' \eta(t-t')f(t')/m$

hier erhalten wir $\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{1}{\Omega} e^{-\lambda t} \sin(\Omega t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$

mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

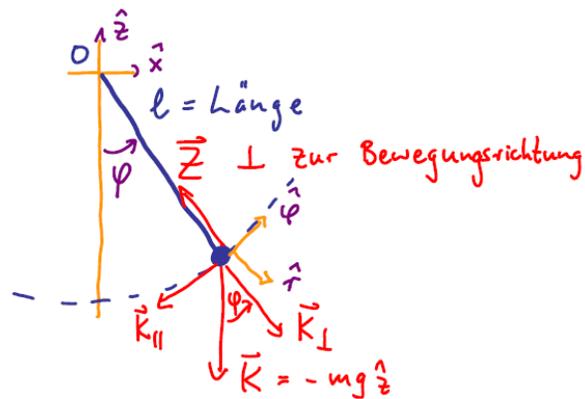
Teil III

Lagrangeformalismus

Nach Newton kann die Bewegung eines Systems mit einer gegebenen Kraft \vec{K}^{tot} (N2) berechnet werden. Oftmals treten allerdings Zwangskräfte auf, die erst durch die Bewegung geweckt werden. Somit gilt für die Gesamtkraft

$$\vec{K}^{\text{tot}} = \vec{K}^{\text{ext}} + \vec{K}^{\text{Zwang}} = \vec{K} + \vec{Z} \quad (6.63)$$

Beispiel: Ebenes Pendel



$$\text{Newton: } m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z} \quad (6.64)$$

$$\text{Zwangsbed. (ZB): } g(\vec{r}) = \vec{r}^2 - l^2 = 0 \quad (\text{Kugel mit Radius } l) \quad (6.65)$$

Lösungsmethoden

1. Lagrange-Methode 1. Art:

Bestimme \vec{Z} explizit und löse (??) für $\vec{r}(t)$.

Hier: $\vec{Z} = Z(x, z)\hat{r}$

2. Lagrange-Methode 2. Art:

Erfülle die Zwangsbedingung durch Wahl geeigneter Koordinaten und löse deren Bewegungsgleichung.

Hier: $\vec{r} = l \sin \varphi \hat{x} - l \cos \varphi \hat{z}$

Löse: $m\ddot{\varphi} = \dots$ für $\varphi(t)$

Kapitel 7

Lagrangegleichungen 1. Art

Lösungsrezept mit Lagrange-Gl. 1. Art

1. Formulierung der Zwangsbedingungen: $g_\alpha(x, t) = 0$
2. Aufstellung der Bewegungsgleichungen: $m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha$
3. Eliminierung der λ_α
4. Lösung der Bewegungsgleichung (für x_n)
5. Bestimmung der Integrationskonstanten (so, dass ZB und Anfangsbed. erfüllt sind)
6. Bestimmung der Zwangskräfte $Z_\alpha^n = \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x, t)$
7. Diskussion

7.1 Zwangsbedingungen (ZB)

Speziell: 1 Teilchen in \mathbb{R}^3

1. ZB: $g_1(\vec{r}, t) = 0$ (definiert 2D-Fläche F_1 im 3D-Raum)
 2. ZB: $g_2(\vec{r}, t) = 0$ (definiert noch eine 2D-Fläche F_2 im 3D-Raum)
- $\Rightarrow g_1$ und g_2 definieren zusammen eine Kurve.

Für obiges Beispiel (ebenes Pendel): $g_1 = x^2 + z^2 - l^2 = 0$ und $g_2 = y = 0$

Allgemein: N Teilchen in \mathbb{R}^3

Sei $x := (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$

$$R \text{ Zwangsbedingungen: } g_\alpha(\vec{r}, t) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R \quad (7.1)$$

$$f \text{ Freiheitsgrade: } f = 3N - R \quad (7.2)$$

Beispiel 1: Zwei Massen an einem Stab
 ZB: Abstand fest $\Rightarrow f = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

Beispiel 2: Wippe
 ZB: Abstand und Schwerpunkt fest $\Rightarrow f = 3 \cdot 2 - 1 - 3$

Klassifikation von Zwangsbedingungen

- *Holonome Zwangsbedingung:*
 Zwangsbedingung, die nicht von Geschwindigkeiten abhängt

$$g_\alpha(x, t) = 0 \begin{cases} \text{falls } \frac{\partial}{\partial t} g_\alpha(x, t) = 0 & \text{skleronom (zeitunabhängig)} \\ \text{falls } \frac{\partial}{\partial t} g_\alpha(x, t) \neq 0 & \text{reonom (zeitabhängig)} \end{cases} \quad (7.3)$$

- *Anholonome oder nicht-holonome Zwangsbedingung:*
 (im folgenden nicht weiter diskutiert)... alles andere, z.B.

$$g_\alpha(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (\text{geschwindigkeitsabhängig}) \quad (7.4)$$

$$g_\alpha(x, t) \leq 0 \quad (\text{ungleich}) \quad (7.5)$$

7.2 Zwangskräfte und Bewegungsgleichungen

Eine *holonome Zwangsbedingung* (ZB) $g_\alpha(t, x) = 0$ zwingt die Bewegung in eine $(3N - R)$ - dimensionale Hyperfläche (Höherdimensionale Fläche, d.h. ein Raum mit einer kleineren Dimension als die des übergeordneten Raums $(3N)$) hinein, doch innerhalb der Hyperfläche liefert sie keine Einschränkung auf die Bewegung.

Die zugehörige *Zwangskraft* hängt von der Bewegung ab. Sie zwingt die Bewegung dazu, innerhalb der Hyperfläche zu verlaufen. Deshalb gilt

$Zwangskraft \perp \text{Hyperfläche} \quad (7.6)$

7.2.1 Beschreibung für N=1 Teilchen

Ansatz für Zwangskräfte (für N=1):

$\vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha(t) \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x}, t) \quad (7.7)$

Richtung: $\vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x}, t) \perp \text{HF}$ (Beweis siehe unten) (7.8)

Betrag: $|\vec{Z}|$ wird durch $\lambda_\alpha(t)$ so eingestellt, dass die Bewegung trotz äußerer Kräfte in der Hyperfläche bleibt (7.9)

Beweis von (??):

Sei $\vec{x}, \vec{x}' \in \text{HF}$ und $\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x}$ dann gilt

$$0 = g_\alpha(\vec{x}, t) = g_\alpha(\vec{x}', t) \quad (7.10)$$

$$= g_\alpha(\vec{x} + \delta\vec{x}, t) \quad (7.11)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \underbrace{g_\alpha(\vec{x}, t)}_{=0} + \delta\vec{x} \cdot \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x}, t) \quad (7.12)$$

$$\Rightarrow \delta \vec{x} \perp \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x}, t) \tag{7.13}$$

$$\tag{7.14}$$

$$\begin{aligned} (*) : \quad g_\alpha(\vec{x} + \delta \vec{x}) &= g_\alpha(x_1 + \delta x_1, x_2 + \dots) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} g_\alpha(x_1, x_2, x_3) + \delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} g_\alpha(x_1, x_2, x_3) + \delta x_2 \dots \\ &= g_\alpha(\vec{x}, t) + \delta \vec{x} \cdot \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x}, t) \end{aligned} \tag{7.15}$$

Beispiel: Ebenes Pendel

- *Hyperfläche 1:*

$$\text{Zwangsbedingung 1 : } g_1(x, y, z, t) = x^2 + z^2 - l^2 = 0 \tag{7.16}$$

$$\text{Zwangskraft 1 : } \vec{Z}_1 = \lambda_1(t) \vec{\nabla} g_1(\vec{r}, t) \tag{7.17}$$

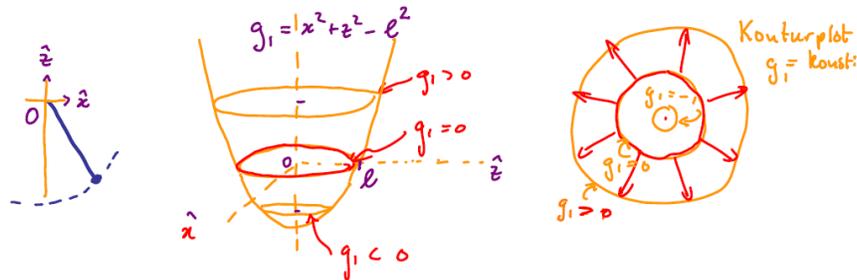
$$\vec{\nabla} g_1(\vec{r}, t) = 2(x\hat{x} + 0 + z\hat{z}) = 2\vec{r} \quad (\vec{r} \text{ in x-z-Ebene})$$

$$\Rightarrow \vec{Z}_1 = 2\lambda_1(t)\vec{r} \tag{7.18}$$

- *Hyperfläche 2:*

$$\text{Zwangsbedingung 2 : } g_2(x, y, z, t) = y = 0 \tag{7.19}$$

$$\text{Zwangskraft 2 : } \vec{Z}_2 = \lambda_2(t) \vec{\nabla} g_2(\vec{r}, t) = \lambda_2(t) \hat{y} \tag{7.20}$$



Bewegungsgleichungen

Den Ausdruck für die Zwangskräfte (??) eingesetzt in N2:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{K}^{ext} + \vec{Z} \tag{7.21}$$

$$= \vec{K}^{ext} + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x}, t) \tag{7.22}$$

mit den Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, R \tag{7.23}$$

(??) besteht aus 3 Gleichungen, (??) aus R Gleichungen, insgesamt stehen also $3 + R$ Gleichungen zur Verfügung, mit $3 + R$ $(x_1, x_2, x_3, \lambda_\alpha)$ Variablen, d.h. durch Lösung dieser Gleichungen können alle Unbekannten bestimmt werden.

7.2.2 Beschreibung für N Teilchen

R Zwangsbedingungen:

$$g_\alpha(x, t) = 0 \quad \text{mit } x = (x_1, \dots, x_{3N}), \quad \alpha = 1, \dots, R \quad (7.24)$$

$3N$ Zwangskräfte:

$$Z^{(n)} = \sum_\alpha Z_\alpha^n = \sum_\alpha \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x, t) \quad \text{mit } n = 1, \dots, 3N \quad (7.25)$$

$3N$ Bewegungsgleichungen:

$$m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x, t) \quad (7.26)$$

Die Zwangsbedingungen (??) und die Bewegungsgleichungen (??) bilden die *Lagrange-Gleichungen 1. Art* ($3N+R$ Gleichungen für $3N+R$ Unbekannte).

7.3 Eliminierung der λ_α

Eliminiere zunächst \ddot{x}_n :

$$g_\alpha(x, t) = 0 \quad = \quad \frac{d^2}{dt^2} g_\alpha(x, t) = \frac{d}{dt} \sum_n \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \dot{x}_n \quad (7.27)$$

$$= \sum_n \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \ddot{x}_n + \underbrace{\sum_n \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \dot{x}_n}_{:= -F_\alpha(\dot{x}, x, t)} \quad (7.28)$$

$$\text{mit } \ddot{x}_n \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{m} \left(K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x, t) \right) \quad \text{ergibt sich}$$

$$F_\alpha(\dot{x}, x, t) = \sum_n \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{1}{m} \left(K_n + \sum_\beta \lambda_\beta \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x, t) \right) \quad (7.29)$$

was ein lineares inhomogenes Gleichungssystem für R Größen darstellt, welches im Prinzip für λ_α gelöst werden kann. Allgemeine Form der Lösung:

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(x, \dot{x}, t) \quad (7.30)$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung (??) ergibt

$$m_n \ddot{x}_n = K_n(x, \dot{x}, t) + \sum_\alpha \lambda_\alpha(x, \dot{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x, t) \quad (7.31)$$

Die rechte Seite ist eine bekannte Funktion von x, \dot{x}, t und kann durch Integration gelöst werden.

7.4 Erhaltungssätze

Falls die Zwangsbedingungen Symmetrien verletzen gelten die entsprechenden Erhaltungssätze nicht.

- Impulserhaltung: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{K} + \vec{Z} \stackrel{\text{falls}}{=} 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const.}$
- Drehimpulserh.: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times (\vec{K} + \vec{Z}) \stackrel{\text{falls}}{=} 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$
- Energieerhaltung:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt} \sum_n \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 + U_n(x_n(t)) \quad (7.32)$$

$$= \sum_n \dot{x}_n m_n \ddot{x}_n + \frac{\partial U}{\partial x_n} \dot{x}_n \quad (7.33)$$

$$= \sum_n \dot{x}_n (F_{ges} - K_n) \quad (7.34)$$

$$= \sum_n \dot{x}_n \sum_\alpha Z_n^\alpha = \sum_\alpha \lambda_\alpha \underbrace{\sum_n \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \dot{x}_n}_{\frac{dg_\alpha}{dt} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}} \quad (7.35)$$

Mit $g_\alpha(x, t) = 0 = \frac{d}{dt}g_\alpha(x, t)$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \quad (7.36)$$

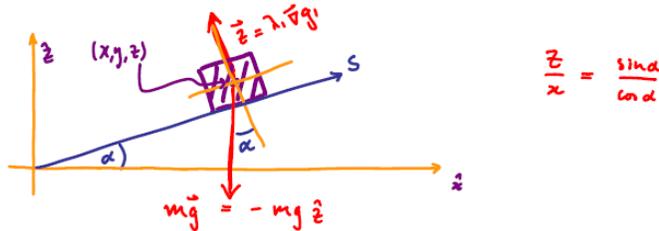
D.h. falls die Zwangsbedingung g_α nicht explizit von der Zeit abhängt, herrscht Energieerhaltung.

Zusammenfassung: Lagrangegleichungen 1. Art

System mit 3N Freiheitsgraden	$x = (x_1, x_2, x_3 \dots, x_{3N})$
R Zwangsbedingungen	$g_\alpha(x, t) = 0$ mit $x = (x_1, \dots, x_{3N})$, $\alpha = 1, \dots, R$
Ansatz für die Zwangskräfte	$Z_\alpha^n = \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x, t)$ mit $n = 1, \dots, 3N$
3N Bewegungsgleichungen	$m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha Z_\alpha^n$
Eliminierung von \ddot{x}_n	$0 = \frac{d^2}{dt^2} g_\alpha(x, t)$ liefert Term mit \ddot{x}_n in den die Bewegungsgl. eingesetzt werden kann, wodurch ein lineares Gleichungssystem für $\lambda_\alpha(x, \dot{x}, t)$ entsteht.
Eliminierung der λ_α	Lösungen des LGS für $\lambda_\alpha(x, \dot{x}, t)$ liefern die Zwangskräfte $Z_\alpha^n = \lambda_\alpha(x, \dot{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha$
Lösen der Bewegungsgleichung	durch Integration.

7.5 Beispiele

Beispiel 1: Reibungsfreies Gleiten auf schiefer Ebene



Schritt 1 (Zwangsbedingung): $g(\vec{r}) = x \sin \alpha - z \cos \alpha = 0$

Schritt 2 (Bewegungsgleichung): $m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(\vec{r}) = \lambda \sin \alpha$
 $m\ddot{z} = -mg + \lambda \frac{\partial}{\partial z} g(\vec{r}) = -mg - \lambda \cos \alpha$

Schritt 3 (Elimination von λ): $0 = \frac{d^2}{dt^2} g(\vec{r}, t) = \ddot{x} \sin \alpha - \ddot{z} \cos \alpha$
 $\Rightarrow \lambda = -mg \cos \alpha$

$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg \sin \alpha \cos \alpha = -m\tilde{g} \cos \alpha$
 $m\ddot{z} = \dots = -m\tilde{g} \sin \alpha$

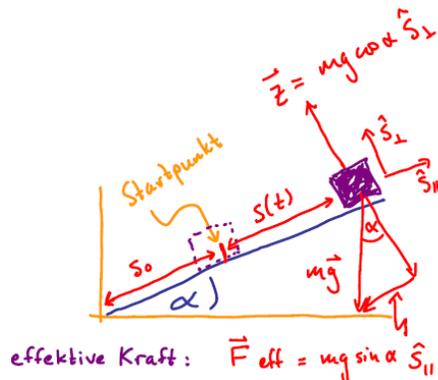
\tilde{g} entspricht effektivem g (entlang Gerade)

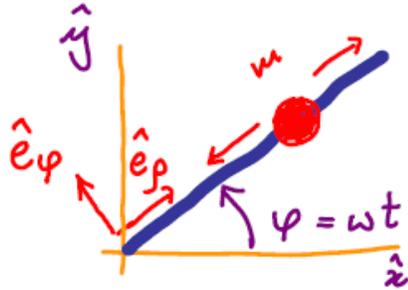
Schritt 4 u. 5 (Lösen der DGL): $x(t) = s(t) \cos \alpha$ wobei $s(t) = -\frac{1}{2}\tilde{g}t^2 + v_0t + s_0$
 $z(t) = s(t) \sin \alpha$

$s(t)$ ist zurückgelegter Abstand entlang \hat{s} -Achse.

Schritt 6 (Bestimmung der ZK): $\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} g(\vec{r}) = -mg \cos \alpha \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} = \underbrace{mg \cos \alpha}_{-m\tilde{g}} \hat{s}_\perp$

Schritt 7 (Diskussion): $s(t)$ ist eine verallgemeinerte Koordinate. D.h. ein Freiheitsgrad der ZB wird bereits berücksichtigt.
 Die entsprechende Bewegungsgleichung ist $m\ddot{s} = -m\tilde{g}$



Beispiel 2: Reibungsloser Massenpunkt an rotierender Stange

Schritt 1 (Zwangsbedingung): $g(\phi, t) = \phi - \omega t = 0$

Schritt 2 (Bewegungsgleichung): $m\ddot{\vec{r}} = \lambda \vec{\nabla} g(\phi, t)$
 in Polarkoordinaten $m\ddot{\vec{r}} = m \left((\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi \right)$
 $\lambda \vec{\nabla} g(\phi, t) = \lambda \left(\hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) g(\phi, t)$
 $= 0 + \hat{e}_\phi \frac{\lambda}{\rho}$

gleichgesetzt: $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = 0$
 $m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = \frac{\lambda}{\rho}$

Schritt 3 (Elimination von λ): $0 = \frac{d^2}{dt^2} g(\phi, t) = \ddot{\phi}$
 $\Rightarrow \lambda(\rho, \dot{\rho}, \phi, \dot{\phi}, t) = 2m\rho\dot{\phi}$

\Rightarrow Bewegungsgl.: $\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2 = 0$
 $m\rho\ddot{\phi} = 0$

Schritt 4 u. 5 (Lösen der DGL): $\rho(t) = 0$ ist triviale instabile Lösung,
 deshalb für $\rho(t) \neq 0$: aus ZB: $\dot{\phi}(t) = \omega t$
 eingesetzt in DGL: $\ddot{\rho} - \rho\omega^2 = 0$
 $\Rightarrow \rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

Schritt 6 (Bestimmung der ZK): $\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} g = \frac{\lambda}{\rho} \hat{e}_\phi = 2m\dot{\rho}\dot{\phi}\hat{e}_\phi$
 $= 2m\omega^2(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})\hat{e}_\phi \perp \vec{r}$

Kapitel 8

Lagrangegleichungen 2. Art

Oft sind wir nicht an der genauen Form der Zwangskraft interessiert. In solchen Fällen ist es geschickter, neue „verallgemeinerte Koordinaten“ zu wählen, die die Zwangsbedingungen automatisch erfüllen, und eine Transformation von den kartesischen zu den verallgemeinerten Koordinaten durchzuführen.

$$(x_1, \dots, x_{3N}) \rightarrow (q_1, \dots, q_f) \quad (8.1)$$

Aber leider ist das zweite Newtonsche Gesetz nicht forminvariant unter einer solchen Transformation zu anderen Koordinatensystemen. Dies stellt zwar an sich kein Problem dar, doch es ist sehr unästhetisch. Deshalb wäre eine alternative Formulierung der Newtonschen Bewegungsgleichungen wünschenswert, welche die Forminvarianz unter diesen Transformationen erfüllt.

Satz

N2 ist äquivalent zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art (L2):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \text{mit } i = 1, \dots, f \quad (8.2)$$

wobei L die *Lagrangefunktion* darstellt:

$$L = T - U \quad (8.3)$$

(Beweis siehe weiter hinten)

Satz

Die Gleichungen L2 sind forminvariant, d.h. für verallgemeinerte Koordinaten gilt ebenfalls

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{mit } i = 1, \dots, f \quad (8.4)$$

8.1 Vorbemerkungen und Definitionen

Bemerkungen über L2

- L2 ist in Situationen, in denen man nicht an der genauen Form der Zwangskräfte interessiert ist, den Lagrangegleichungen 1. Art vorzuziehen.
- Die Lagrangegleichungen 2. Art sind $f = 3N - R$ Differentialgleichungen 2. Ordnung für f Koordinaten, mit Anfangsbedingungen $q(0), \dot{q}(0)$
- $L(q, \dot{q}, t)$ ist nicht eindeutig, denn q kann verschieden gewählt werden.
- $L(q, \dot{q}, t)$ ist nicht messbar, aber sehr nützliche theoretische Größe.
- Vorzüge von L2:
 - f Gleichungen, statt $3N + R$.
 - Die Lagrangefunktion L ist ein Skalar, und somit viel leichter zu bestimmen als Bewegungsgleichungen (mehrdimensional).
 - L hat oft eine sehr einfache Form.
 - Erhaltungssätze lassen sich leicht von L ablesen.

8.1.1 Verallgemeinerter Impuls und zyklische Koordinaten

Def.: *Verallgemeinerter Impuls*

$$P_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (8.5)$$

Def.: *zyklische Koordinate*

Falls L für ein bestimmtes k nicht von q_k abhängt, sondern nur von \dot{q}_k , d.h. falls

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (8.6)$$

so nennt man q_k eine *zyklische Koordinate*.

Satz

Für eine zyklische Koordinate ist der verallgemeinerte Impuls erhalten.

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = P_k = \text{const.} \quad (8.7)$$

Beispiel: harmonischer Oszillator in 2D (vgl. Beispiel 3):

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}k\rho^2 = L(\rho, \dot{\rho}, \varphi) \quad (8.8)$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ zyklisch} \quad \Rightarrow P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = \text{const} = \text{Drehimp.} \quad (8.9)$$

8.1.2 Metrischer Tensor

Sei die Koordinate x_n abhängig von anderen Koordinaten: $x_n = x_n(q_1, \dots, q_m)$ (z.B. $q = (\rho, \varphi, z)$). Dann folgt für $ds^2 = \sum_n dx_n^2$:

$$ds^2 = \sum_n dx_n \cdot dx_n = \sum_n \left(\sum_i \frac{\partial x_n}{\partial q_i} dq_i \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial x_n}{\partial q_j} dq_j \right) \quad (8.10)$$

$$\stackrel{\text{ESK}}{=} \underbrace{\frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} dq_i dq_j}_{:=g_{ij}} := g_{ij} dq_i dq_j \quad (8.11)$$

g_{ij} ist ein *metrischer Tensor*.

Dann lässt sie z.B. die kinetische Energie wie folgt schreiben:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_n \dot{x}_n = \sum_{i,j} \frac{1}{2} m \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (8.12)$$

Beispiele:

- kartesische Koordinaten: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Polarkoordinaten: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$
- Kugelkoordinaten: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$

8.2 Gewinnung von L2 aus N2 ohne ZB

Wir betrachten ein System mit $3N$ Freiheitsgraden

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_{3N}(t)) \quad (8.13)$$

Für die Bewegungsgleichung in einem konservativen Kraftfeld folgt

$$m_n \ddot{x}_n = -\frac{\partial}{\partial x_n} U(x_1, \dots, x_f) \quad (8.14)$$

Dies kann umgeschrieben werden zu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_n} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^f \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2}_{=T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f)} \right) \right) = -\frac{\partial}{\partial x_n} U(x_1, \dots, x_f) \quad (8.15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_n} T \right) = -\frac{\partial}{\partial x_n} U(x_1, \dots, x_f) \quad (8.16)$$

Wir definieren die Lagrangefunktion als

$$L(x_1, \dots, x_f, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_f) := T - U \quad (8.17)$$

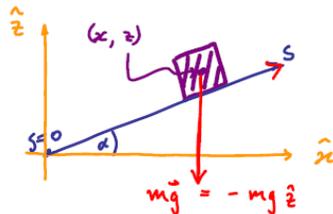
Damit kann Gleichung (??) auch geschrieben werden als

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_n} L \right) = -\frac{\partial}{\partial x_n} L} \quad (8.18)$$

Da $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_n} U = 0$ und $\frac{\partial}{\partial x_n} T = 0$.

8.3 Beispiele

8.3.1 Beispiel 1: Schiefe Ebene



Zwangsbedingung: $\frac{z}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Verallgemeinerte Koordinate: $s(t) :=$ Abstand eines Punktes auf der Geraden vom Ursprung

Transformation: $x = s \cos \alpha$ und $z = s \sin \alpha$
 $\dot{x} = \dot{s} \cos \alpha$ und $\dot{z} = \dot{s} \sin \alpha$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$

Potenzielle Energie: $U = mgz = mgs \sin \alpha = m\tilde{g}s$

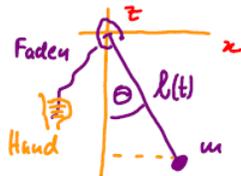
Lagrange-Funktion: $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - m\tilde{g}s = L(s, \dot{s})$

Lagrangegleichung: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{\partial L}{\partial s} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} m\dot{s} = -m\tilde{g}$

\Rightarrow N2 für s : $m\ddot{s} = -m\tilde{g}$

Bewegungsgleichung: $s(t) = \frac{1}{2}\tilde{g}t^2 + v_0t + s_0$

8.3.2 Beispiel 2: Ebenes Pendel



Zwangsbedingung: $\frac{x}{z} = -\frac{\sin \Theta}{\cos \Theta}$

Verallgemeinerte Koordinaten: $l(t)$ (vorgegeben), $\Theta(t)$

Transformation: $x = l \sin \Theta$ und $z = -l \cos \Theta$
 $\dot{x} = \dot{l} \sin \Theta + l \cos \Theta \dot{\Theta}$ und $\dot{z} = -\dot{l} \cos \Theta + l \sin \Theta \dot{\Theta}$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \dots = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\Theta}^2)$

Potenzielle Energie: $U = mgz = -mgl \cos \Theta$

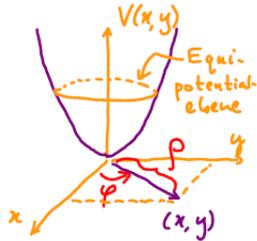
Lagrange-Funktion: $L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\Theta}^2) + mgl \cos \Theta = L(\Theta, \dot{\Theta})$

Lagrangegleichung: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \Theta} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} ml^2\dot{\Theta} = -mgl \sin \Theta$

\Rightarrow Bew.-Gl. für Θ : $2l\dot{\Theta} + l^2\ddot{\Theta} = -gl \sin \Theta$

(keine L2 für l , da $l(t)$ vorgegeben)

8.3.3 Beispiel 3: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator



Zwangsbedingung:	keine
Vorgegebenes Potential:	$U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}k\rho^2$
Verallgemeinerte Koordinaten:	$\varphi(t), \rho(t)$
Transformation:	$x = \rho \cos \varphi$ und $y = \rho \sin \varphi$ $\dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \dot{\varphi}$ und $\dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \dot{\varphi}$
Kinetische Energie:	$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \dots = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$
Lagrange-Funktion:	$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}k\rho^2 = L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi})$
Lagrangegleichungen:	
für ρ :	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \rho} \Leftrightarrow m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 - k\rho$
für φ :	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Leftrightarrow m\rho^2\ddot{\varphi} = 0$

Man sieht außerdem dass $\frac{d}{dt}(m\rho\rho\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}(m\rho v_\varphi) = \dot{\vec{l}} = 0$
 \Rightarrow Drehimpulserhaltung ($\vec{l} = \text{const}$)

Check der Bewegungsgleichung mittels N2

N2, kartesisch:	$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx = -k\rho \cos \varphi$ $m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = -ky = -k\rho \sin \varphi$
Transformation für \ddot{x}, \ddot{y} :	$\ddot{x} = \ddot{\rho} \cos \varphi - 2\dot{\rho} \sin \varphi \dot{\varphi} + \rho \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - \rho \sin \varphi \ddot{\varphi}$ $\ddot{y} = \ddot{\rho} \sin \varphi + 2\dot{\rho} \cos \varphi \dot{\varphi} - \rho \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + \rho \cos \varphi \ddot{\varphi}$
mit einem kleinen Trick : und:	$m(\cos \varphi \ddot{x} + \sin \varphi \ddot{y}) \stackrel{N2}{=} -k\rho$ $m(\cos \varphi \ddot{x} + \sin \varphi \ddot{y}) = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)$
erhält man:	$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -k\rho$ (vgl. mit Lsg. aus L2) \checkmark

8.4 Herleitung der Lagrangegleichungen 2. Art

Ausgangspunkt

Ein System mit $3N$ Koordinaten (z.B. N Teilchen in 3 Dimensionen)

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_{3N}) \in \mathbb{R}^{3N} \quad (8.19)$$

$$\dot{\vec{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{3N}) \in \mathbb{R}^{3N} \quad (8.20)$$

$$\dot{\vec{p}} = (m_1 \dot{x}_1, \dots, m_{3N} \dot{x}_{3N}) \in \mathbb{R}^{3N} \quad (8.21)$$

und R Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(\vec{x}, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, R \quad \Rightarrow \quad f = 3N - R \quad (8.22)$$

und Zwangskräfte

$$\vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \hat{e}_n = (Z_\alpha^1, \dots, Z_\alpha^{3N}) \in \mathbb{R}^{3N} \quad (8.23)$$

Damit ergeben sich die Lagrangegleichungen 1. Art

$$\dot{p}_n = m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \quad (8.24)$$

Beispiel: Perle auf rotierender Stange

Potential: $U = mgx_2 = mg\rho \sin \varphi$

Polarkoordinaten: $x_1 = \rho \cos \varphi$
 $x_2 = \rho \sin \varphi$
 $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$
 $\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$

Zwangsbedingung: $g = \varphi - \omega t = \arctan \frac{x_2}{x_1} - \omega t = 0$

Zwangskraft: $\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} g(x_1, x_2) = \dots = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \hat{e}_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \hat{e}_2 = \lambda \frac{1}{\rho^2} \hat{e}_\varphi$
 (Rechnung siehe [L42a])

Lagrangegl. 1. Art: $m\ddot{x}_1 = 0 - \lambda \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$
 $m\ddot{x}_2 = -mg + \lambda \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$

Ziel

Wir wählen verallgemeinerte Koordinaten q_k ($k = 1, \dots, f$), so dass die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind. Dafür formen wir die Lagrangegleichungen 1. Art mittels der Variablen-Transformation $\vec{x} = \vec{x}(q, t)$ so um, dass sie nur von q, \dot{q} und t abhängen. Daraus wird sich unmittelbar die Lagrangefunktion (??) mit der Eigenschaft der Lagrangegleichungen 2. Art (??) ergeben.

Schritt 1: Einführung von verallgemeinerten Koordinaten

Wähle also f verallgemeinerte/generalisierte Koordinaten

$$\tilde{q} = (q_1, \dots, q_f) \in \mathbb{R}^f \quad \text{also } \vec{x} = \vec{x}(\tilde{q}, t) \quad (8.25)$$

so, dass alle Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind:

$$g_\alpha(x_1(\tilde{q}, t), \dots, x_{3N}(\tilde{q}, t), t) = 0 \quad (8.26)$$

Beispiel

$$q := \rho$$

$$\Rightarrow x_1 = \rho \cos \omega t, \quad x_2 = \rho \sin \omega t$$

$$\Rightarrow g = \arctan x_2/x_1 - \omega t = \arctan \frac{\rho \sin \omega t}{\rho \cos \omega t} - \omega t = 0 \quad \checkmark$$

Schritt 2: Finde „erlaubte“ Hyperfläche

(Schnittmenge aller durch die Zwangsbedingungen festgelegten Hyperflächen)

Wir nutzen aus, dass für alle $\alpha \in \{1, \dots, R\}$ gilt $g_\alpha = 0$:

$$0 = \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial q_k} g_\alpha(\vec{x}(q, t), t) = \sum_{n=1}^{3N} \underbrace{\lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}}_{=Z_\alpha^n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \underbrace{\vec{Z}_\alpha}_{\perp HF_\alpha} \cdot \underbrace{(\delta \vec{x})_k}_{\parallel HF_\alpha} \quad (8.27)$$

Wobei wir definieren: *Virtuelle Verrückung*:

$$\boxed{(\delta \vec{x})_k := \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_k}, \dots, \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \in \mathbb{R}^{3N} \quad (8.28)}$$

$(\delta \vec{x})_k$ ist also ein paralleler Vektor zur Hyperfläche α .

Damit können wir die „erlaubte“ *Hyperfläche* konstruieren

$$\boxed{eHF = span \left\{ \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_f} \right\} \quad (8.29)}$$

Die virtuellen Verrückungen bilden also eine Basis für eHF am Punkt \vec{x} . Dieser Unterraum von \mathbb{R}^{3N} ist also ein „Tangentenraum“.

Beispiel

$$(\delta \vec{x}) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_2}{\partial \rho} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \hat{e}_\rho$$

\Rightarrow erlaubte HF: \hat{e}_ρ -Achse (ändert sich mit t!)

Beispiel in 3D: magnetische Scheibe auf rotierender Platte

Zylinderkoordinaten: $x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$, $x_3 = z$

verallgemeinerte Koordinaten: $q_1 = \rho$, $q_2 = z$

Virtuelle Verrückungen:

$$(\delta \vec{x})_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_2}{\partial \rho}, \frac{\partial x_3}{\partial \rho} \right) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = \hat{e}_\rho \quad (8.30)$$

$$(\delta \vec{x})_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}, \frac{\partial x_2}{\partial z}, \frac{\partial x_3}{\partial z} \right) = (0, 0, 1) = \hat{e}_z \quad (8.31)$$

\Rightarrow erlaubte HF durch \hat{e}_ρ, \hat{e}_z aufgespannt (Platte).

Schritt 3: Projektion der Bewegungsgleichung auf die erlaubte HF

Wir projizieren also die Lagrangegleichungen 1. Art auf die virtuellen Verrückungen (die ja in der erlaubten HF stattfinden):

$$(\dot{\vec{p}} - \vec{K}) \cdot (\delta \vec{x})_k = \sum_{\alpha} \vec{Z}_{\alpha} \cdot (\delta \vec{x})_k \stackrel{(?)}{=} 0 \quad (8.32)$$

Dies ergibt das *d'Alembertsche Prinzip*:

$$\boxed{(\dot{\vec{p}} - \vec{K}) \cdot (\delta \vec{x})_k = 0 \quad (8.33)}$$

Hier sind somit alle Zwangsbedingungen komplett eliminiert.

Wir definieren eine *verallgemeinerte Kraft*:

$$\boxed{Q_k := \vec{K} \cdot (\delta \vec{x})_k \quad (8.34)}$$

Für konservative Kräfte ergibt sich für die verallg. Kraft

$$Q_k = \sum_{n=1}^{3N} - \frac{\partial U(\vec{x}(\tilde{q}, t), t)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = - \frac{\partial U(\tilde{q}, t)}{\partial q_k} \quad (8.35)$$

$$\boxed{\Rightarrow \dot{\vec{p}} \cdot (\delta \vec{x})_k \stackrel{(?)}{=} Q_k = - \frac{\partial U(\tilde{q}, t)}{\partial q_k} \quad (8.36)}$$

Beispiel:

Projektion: $(m\ddot{\vec{x}} + mg\hat{e}_2) \cdot \hat{e}_\rho = 0$

$$\Leftrightarrow m(\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{x}_2 \sin \varphi) = -mg \sin \varphi = - \frac{\partial U(\rho, t)}{\partial \rho}$$

(Bewegung findet nun in erlaubter HF statt)

Schritt 4: Bewegungsgleichung durch verallg. Koordinaten ausdrücken

4a Geschwindigkeit

Wir drücken zunächst die Geschwindigkeit in den verallgemeinerten Koordinaten aus

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} \vec{x}(\tilde{q}, t) = \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \underbrace{\frac{dq_k}{dt}}_{\dot{q}_k} \right) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \dot{\vec{x}}(q, \dot{q}, t) \quad (8.37)$$

Leiten wir die Geschwindigkeit des Ortsvektors nach der zeitlichen Änderung einer verallgemeinerten Koordinate ab, so ergibt sich der Zusammenhang:

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{\frac{\partial}{\partial x}(Ax+B)=A}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \quad (8.38)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos \omega t \\ \dot{\rho} \sin \omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho \omega \sin \omega t \\ \rho \omega \cos \omega t \end{pmatrix} \\ \frac{d\dot{\vec{x}}}{d\dot{\rho}} &= \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} \quad \checkmark \end{aligned}$$

4b Kinetische Energie

Kinetische Energie durch q, \dot{q}, t ausdrücken:

$$T(q, \dot{q}, t) = T(\dot{x}(q, \dot{q}, t)) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2(q, \dot{q}, t) \quad (8.39)$$

Wie verhält sie die Kinetische Energie wenn wir nach einer verallgemeinerten Koordinate und deren Ableitung ableiten?

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} = \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} = \vec{p} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_k} \quad (8.40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_n m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \vec{p} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{(\text{??})}{=} \vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \quad (8.41)$$

Um diese Ergebnisse in Beziehung setzen zu können, leiten wir die letzte Gleichung nach der Zeit ab:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{p} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_k} \right) = \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_k} + \vec{p} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_k} \stackrel{(\text{??})}{=} \underbrace{\vec{p} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_k}}_{=(\delta \vec{x})_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (8.42)$$

Umgeschrieben ergibt das

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \dot{\vec{p}} \cdot (\delta \vec{x})_k} \quad (8.43)$$

Also hab wir nun eine zweite Darstellung der Projektion von $\dot{\vec{p}}$ auf die virtuelle Verrückung $(\delta \vec{x})_k$.

Beispiel:

Kinetische Energie: $T(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \omega^2\rho^2)$

- polar: $\frac{\partial T}{\partial \rho} = m\rho\omega^2$
kartesisch: $\frac{\partial T}{\partial \rho} = m(-\dot{x}_1\omega \sin \omega t + \dot{x}_2\omega \cos \omega t)$
- polar: $\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}$
kartesisch: $\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m(\dot{x}_1 \cos \omega t + \dot{x}_2 \sin \omega t)$
- polar: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) = m\ddot{\rho}$
kartesisch: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) = m(\ddot{x}_1 \cos \omega t - \dot{x}_1\omega \sin \omega t + \ddot{x}_2 \sin \omega t + \dot{x}_2\omega \cos \omega t) = \frac{\partial T}{\partial \rho} + m(\ddot{x}_1 \cos \omega t + \ddot{x}_2 \sin \omega t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \rho} = m(\ddot{x}_1 \cos \omega t + \ddot{x}_2 \sin \omega t) = m\ddot{\vec{x}} \cdot \hat{e}_\rho \stackrel{(\text{??})}{=} -\frac{\partial U}{\partial \rho}$$

$$\Rightarrow m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2) = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (\text{vgl. mit Bsp. 3 zu L2})$$

Schritt 5: Kombiniere Ergebnisse aus den Schritten 3 und 4

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \vec{p} \cdot (\delta \vec{x})_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (8.44)$$

Dies kann umgeschrieben werden zu

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (8.45)$$

Mit der Annahme, dass für U gilt: $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$ (U geschwindigkeitsunabhängig) folgt

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_k} \quad (8.46)$$

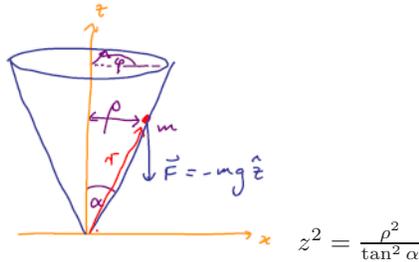
Nun definieren wir die *Lagrangefunktion*:

$$L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) := T(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) - U(\tilde{q}, t) \quad (8.47)$$

Daraus folgen die *Lagrangegleichungen 2. Art*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (8.48)}$$

8.5 Anwendung: Massenpunkt auf Kreiskegel



Koordinatenwahl

Zwangsbedingung:

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0 \tag{8.49}$$

Wahl der verallgemeinerten Koordinaten

$$\tilde{q} = (r, \varphi) \quad (\text{Kugelkoordinaten, } \alpha \text{ fest}) \tag{8.50}$$

(Alternativen: $(z, \varphi), (\rho, \varphi)$)

Transformationsregeln:

$$x(r, \varphi) = r \sin \alpha \cos \varphi, \quad y(r, \varphi) = r \sin \alpha \sin \varphi, \quad z(r) = r \cos \alpha \tag{8.51}$$

Bestimmung der Lagrangefunktion

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{ij} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{mit } g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad q = (r, \vartheta, \varphi) \tag{8.52}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \underbrace{\dot{\vartheta}^2}_{=\dot{\alpha}^2=0} + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \tag{8.53}$$

$$U = mgz = mgr \cos \alpha \tag{8.54}$$

$$\Rightarrow L(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T - U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \alpha \tag{8.55}$$

zyklische Koordinaten

L hängt nicht von φ ab $\Rightarrow \varphi$ zyklisch \Rightarrow verallg. Impuls ist erhalten!

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi} = m\rho^2 \dot{\varphi} = l \quad (\text{Drehimpulserhaltung}) \tag{8.56}$$

L2

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - (mr \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 - mg \cos \alpha) \quad (8.57)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \underbrace{(mr^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi})}_{=l} = 0 \quad (8.58)$$

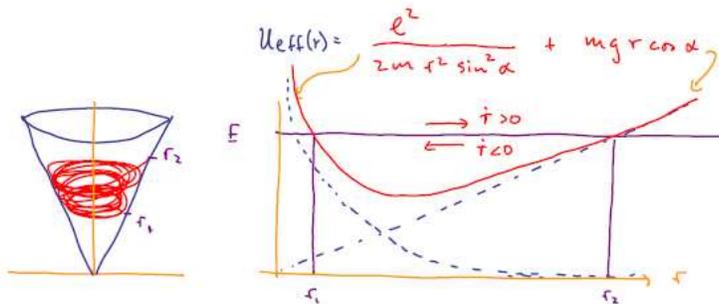
Energieerhaltung

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \frac{\partial x_n}{\partial t} = 0, \frac{\partial U}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial U}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad (8.59)$$

$$E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) + mgr \cos \alpha = \text{const.} \quad (8.60)$$

Lösung der Bewegungsgleichung für r Eliminiere $\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2 \sin^2 \alpha}$ in (??)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha}}_{U_{eff}(r)} + mgr \cos \alpha \quad (8.61)$$

Wir lösen nach \dot{r} auf und erhalten

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))} \quad (8.62)$$

Trennung der Variablen und Integration liefert

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r'))}} \quad (8.63)$$

Nach dem Ausführen des Integrals ist $t(r)$ bekannt. Invertieren liefert $r = r(t)$.

Lösung der Bewegungsgleichung für φ

Aus (??):

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2 \sin^2 \alpha} \quad (8.64)$$

Trennung der Variablen und Integration liefert

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \int_{t_0}^t dt' \frac{l}{m(r(t'))^2 \sin^2 \alpha} \quad (8.65)$$

Das Einsetzen von $r(t)$ und Ausführen der Integration liefert $\varphi(t)$.

Integrationskonstanten

Die Integrationskonstanten für die jeweiligen Integrale werden festgelegt durch die Anfangsbedingungen

$$r_0 = r(t_0), \quad \varphi_0 = \varphi_0(t_0), \quad \dot{r}(t_0), \quad \dot{\varphi}(t_0) = \frac{l}{mr_0^2 \sin^2 \alpha} \quad (8.66)$$

Oder alternativ durch die erhaltenen Größen

$$l, \quad E, \quad r_0, \quad \varphi_0 \quad (8.67)$$

Es gilt der Satz

Jede Erhaltungsgröße legt eine Integrationskonstante fest.

Bahn $r(\varphi)$

Es sind bereits bekannt: $r(t), \varphi(t)$. Eine Möglichkeit wäre $\varphi(t)$ zu invertieren und in $r(t)$ einzusetzen, doch im Allgemeinen kann dies umständlicher sein als folgendes Verfahren:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \stackrel{(\text{??})}{=} \frac{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))}}{\dot{\varphi}} \quad (8.68)$$

$$\stackrel{(\text{??})}{=} \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))} \frac{1}{l} mr^2 \sin^2 \alpha \quad (8.69)$$

Separation der Variablen und Integration liefert

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r'))} \frac{1}{l} mr'^2 \sin^2 \alpha} \quad (8.70)$$

Ausführen des Integrals liefert bekannte Funktion $\varphi(r)$. Invertieren liefert $r(\varphi)$.

Zwei typische Fragestellungen

„Wann ist die Bahn geschlossen?“

Falls $\varphi(\tau + t_0) = \varphi(t_0)$ und $r(\tau + t_0) = r(t_0)$, etc...
 τ hängt von α, l, E, \dots ab.

„Falls die Bewegung periodisch ist, was ist die *Periodendauer*?“

$$\tau = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r'))}} \quad (8.71)$$

8.6 Erhaltungssätze und Symmetrien

In Folgenden wird die Lagrangefunktion bezüglich den schon früher behandelten Symmetrieeigenschaften untersucht: Invarianz unter Raumtranslation, Rotation und Zeitverschiebung.

8.6.1 Raumtranslation

Wir betrachten eine kleine Verschiebung $\varepsilon \vec{\eta}$ für alle N Teilchen des Systems:

$$\vec{r}_\nu \rightarrow \vec{r}'_\nu = \vec{r}_\nu + \varepsilon \vec{\eta} \quad \forall \nu = 1, \dots, N \quad (8.72)$$

$$\dot{\vec{r}}_\nu \rightarrow \dot{\vec{r}}'_\nu = \dot{\vec{r}}_\nu \quad (8.73)$$

Falls L invariant unter Raumtranslation, dann gilt

$$L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = L(\vec{r}'_\nu, \dot{\vec{r}}'_\nu, t) \quad (8.74)$$

Taylorentwicklung der rechten Seite in $\vec{\eta}\varepsilon$ um $\vec{\eta}\varepsilon = 0$:

$$L(\vec{r}'_\nu, \dot{\vec{r}}'_\nu, t) = L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) + \sum_\nu \varepsilon \vec{\eta} \left. \frac{\partial L}{\partial \vec{r}'_\nu} \right|_{\varepsilon \vec{\eta} = 0} \quad (8.75)$$

Daraus folgt

$$0 = \sum_\nu \frac{\partial L}{\partial \vec{r}'_\nu} \cdot \vec{\eta} \stackrel{L2}{=} \vec{\eta} \cdot \sum_\nu \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \right) = \vec{\eta} \cdot \frac{d}{dt} \sum_\nu \vec{p}_\nu \quad (8.76)$$

Das heißt

bei Invarianz unter Raumtranslation ist der verallgemeinerte Gesamtimpuls $\sum_\nu \vec{p}_\nu = \vec{P}$ erhalten.

Die zugehörige zyklische Koordinate ist die Schwerpunktskoordinate.

8.6.2 Rotation

Wir betrachten eine kleine Rotation $(\vec{\eta} \times \vec{r}_\nu)\varepsilon$ für alle N Teilchen des Systems:

$$\vec{r}_\nu \rightarrow \vec{r}'_\nu = \vec{r}_\nu + (\vec{\eta} \times \vec{r}_\nu)\varepsilon \quad \forall \nu = 1, \dots, N \quad (8.77)$$

$$\dot{\vec{r}}_\nu \rightarrow \dot{\vec{r}}'_\nu = \dot{\vec{r}}_\nu + (\vec{\eta} \times \dot{\vec{r}}_\nu)\varepsilon \quad (8.78)$$

Falls L invariant unter Rotation, dann gilt

$$L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = L(\vec{r}'_\nu, \dot{\vec{r}}'_\nu, t) \quad (8.79)$$

Taylorentwicklung der rechten Seite in ε um $\varepsilon = 0$:

$$L(\vec{r}'_\nu, \dot{\vec{r}}'_\nu, t) = L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) + \varepsilon \sum_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot (\vec{\eta} \times \vec{r}_\nu) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot (\vec{\eta} \times \dot{\vec{r}}_\nu) \right) \quad (8.80)$$

Daraus folgt

$$0 = \sum_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot (\vec{\eta} \times \vec{r}_\nu) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot (\vec{\eta} \times \dot{\vec{r}}_\nu) \right) \quad (8.81)$$

$$\stackrel{L2}{=} \sum_\nu \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot (\vec{\eta} \times \vec{r}_\nu) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{\eta} \times \vec{r}_\nu) \right) \quad (8.82)$$

$$\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \sum_\nu \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot (\vec{\eta} \times \vec{r}_\nu) \right) = \sum_\nu \frac{d}{dt} (\vec{p}_\nu \cdot (\vec{\eta} \times \vec{r}_\nu)) \quad (8.83)$$

$$= \vec{\eta} \cdot \frac{d}{dt} \sum_\nu (\vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu) = \vec{\eta} \cdot \frac{d}{dt} \vec{L} \quad (8.84)$$

Das heißt

bei Invarianz unter Rotation ist der Drehimpuls $\sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu = \vec{L}$ erhalten.

8.6.3 Zeitverschiebung - Hamiltonfunktion

Wir betrachten eine Zeitverschiebung:

$$t \rightarrow t' = t + \varepsilon \quad (8.85)$$

Falls L invariant unter Zeitverschiebung, dann gilt

$$L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t') \quad (8.86)$$

Entwickle in ε um den Punkt $\varepsilon = 0$:

$$L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t') = L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) + \left. \frac{\partial L}{\partial t'} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (8.87)$$

Wir betrachten nun die totale Zeitableitung:

$$\frac{d}{dt}L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = \sum_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot \ddot{\vec{r}}_\nu \right) + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0} \quad (8.88)$$

$$\stackrel{L2}{=} \sum_\nu \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot \ddot{\vec{r}}_\nu \right) \quad (8.89)$$

$$\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \frac{d}{dt} \sum_\nu \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu = \frac{d}{dt} \sum_\nu \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu \quad (8.90)$$

Nun definieren wir die *Hamilton-Funktion* H :

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_\nu \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu - L \right)}_{:=H} = 0 \quad (8.91)$$

Sei $p_\nu = m_\nu \dot{r}_\nu$ (bisher üblicher Fall):

$$H = \sum_\nu m_\nu \dot{r}_\nu^2 - \left(\sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \dot{r}_\nu^2 - U \right) = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \dot{r}_\nu^2 + U \quad (8.92)$$

$$\Rightarrow H = T + U = E \quad (8.93)$$

(Interpretation: Hamiltonfunktion = Energie.)

Es gilt also

Energieerhaltung bei Invarianz der Lagrangefunktion unter Zeitverschiebung.

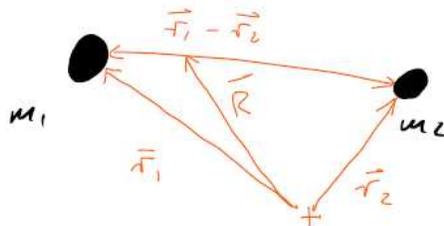
Energieerhaltungssatz

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}H = 0 \quad (8.94)$$

Kapitel 9

Zentralpotential

9.1 Zweikörperproblem



Als weitere Anwendung des Lagrangeformalismus werden wir im Folgenden das Problem zweier Körper diskutieren, die sich unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Zentralkraft bewegen.

9.1.1 Zurückführung auf das Einkörperproblem

Wir betrachten also ein System aus zwei Massenpunkten, in dem nur Kräfte auftreten, die sich aus dem Wechselwirkungspotential U ableiten lassen, wobei U nur vom Abstand zwischen diesen Teilchen abhängt:

$$U = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (9.1)$$

Dieses System besitzt sechs Freiheitsgrade, folglich sechs unabhängige verallgemeinerte Koordinaten. Dafür wählen wir die Koordinaten des Schwerpunktes \vec{R} und die des Differenzvektors \vec{r}

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad r = |\vec{r}| \quad (9.2)$$

Die Lagrangefunktion hat dann die Form

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 + U(r) \quad (9.3)$$

Durch einfache Umformungen kann sie wie folgt geschrieben werden

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \quad (9.4)$$

Mit der Definition der *reduzierten Masse* $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ wird daraus

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \quad (9.5)$$

Man erkennt, dass die drei Koordinaten von \vec{R} zyklisch sind, da L nicht von \vec{R} abhängt. Das heißt, dass der Schwerpunkt entweder in Ruhe ist, oder sich gleichförmig bewegt, denn der verallgemeinerte Impuls für die Schwerpunktskoordinaten $\vec{p}_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\dot{\vec{R}}$ bleibt nach L2 somit erhalten. Es genügt also in allen weiteren Diskussionen die letzten beiden Terme der Lagrangefunktion zu betrachten

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) \quad (9.6)$$

Damit haben wir das Zweiteilchenproblem auf ein Einteilchenproblem mit Masse μ und Relativkoordinate \vec{r} reduziert.

9.1.2 Reduktion auf eine Radialgleichung

Da das System kugelsymmetrisch ist, bleibt der Gesamtdrehimpuls erhalten

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (9.7)$$

Also muss eine Winkelkoordinate, die eine Drehung um eine feste Achse beschreibt zyklisch sein.

Da außerdem \vec{L} raumfest ist, wird die Richtung von \vec{r} eingeschränkt, denn \vec{r} steht immer senkrecht zu \vec{L} . Für $\vec{L} = 0$ allerdings muss $\vec{r} \parallel \vec{p}$ sein, also folgt die Bewegung in diesem Fall einer Geraden durch das Kraftzentrum.

Diese beiden Einschränkungen der Bewegung führen dazu, dass sie in einer Ebene satt findet und wir die Bewegungsgleichung auf eine Radialgleichung reduzieren können.

Wir betrachten die Situation deshalb in Zylinderkoordinaten

$$L(\rho, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \quad (9.8)$$

Wir erhalten so Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial L}{\partial \rho} \quad \Leftrightarrow \quad \mu\ddot{\rho} = \mu\rho\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad (9.9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\mu\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \quad (9.10)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \quad \Leftrightarrow \quad \mu\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \sqrt{\rho^2 + z^2}} \frac{-z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (9.11)$$

Für z können wir die triviale Lösung

$$z(t) = 0 \quad (9.12)$$

wählen. Also findet die Bewegung nur in der x-y-Ebene statt.

Für φ erhalten wir

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu\rho^2} \quad (l: \text{erhaltener Drehimpuls}) \quad (9.13)$$

Für ρ erhalten wir somit

$$\mu\ddot{\rho} = \frac{l^2}{\mu\rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad (9.14)$$

Es muss also nur noch diese Radialgleichung gelöst werden.

9.1.3 Energieerhaltung

Zunächst wenden wir uns der Energie zu. Da unsere Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \quad (9.15)$$

invariant unter Zeitverschiebung ist ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), ist die Gesamtenergie des Systems erhalten, weshalb für die Hamiltonfunktion gilt

$$\frac{d}{dt}H = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0 \quad (9.16)$$

$$H = E = \mu(\dot{\rho}\dot{\rho} + \rho^2\dot{\varphi}\dot{\varphi} + \dot{z}\dot{z}) - \left(\frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho) \right) \quad (9.17)$$

$$= \frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(\rho) \quad (9.18)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2}_{T(\dot{\rho})} + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu\rho^2}}_{U_{eff}(\rho)} + U(\rho) \quad (9.19)$$

Das heißt, wir können die Gesamtenergie des Systems zerlegen in die kinetische Energie der Radialbewegung und ein effektives Potential bezüglich dieser Bewegung:

$$E = T(\dot{\rho}) + U_{eff}(\rho) \quad (9.20)$$

Die *effektive Radialkraft* ergibt sich zu

$$- \frac{\partial U_{eff}}{\partial \rho} = \frac{l^2}{\mu\rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad (9.21)$$

Der Term $\frac{l^2}{\mu\rho^3}$ lässt sich als *Zentrifugalkraft* identifizieren, denn aus (??) folgt

$$\frac{l^2}{\mu\rho^3} = \mu\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu v_\varphi^2}{\rho} \quad (9.22)$$

9.1.4 Lösung der Bewegungsgleichungen

Lösungen für $\rho(t)$ und $\varphi(t)$

Wir haben also mithilfe der Energiebetrachtung die DGL 2. Ordnung für ρ (??) auf eine DGL 1. Ordnung reduziert

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + \frac{l^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho) = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho) \quad (9.23)$$

Separation der Variablen und Integration liefert

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff}(\rho))}} \quad (9.24)$$

Also haben wir eine bekannte Funktion $t(\rho)$ welche durch Invertieren eine Funktion $\rho(t)$ liefert.

Für $\varphi(t)$ integrieren wir nach Einsetzen von $\rho(t)$ die Gleichung (??)

Bahnkurve $\rho(\varphi)$

Falls die Invertierung von $\varphi(t)$ oder $\rho(t)$ umständlich ist, führt folgendes Verfahren zum Ziel (analog zu (??) - (??))

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{d\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} = \frac{l}{\mu\rho^2} \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff}(\rho))}} \quad (9.25)$$

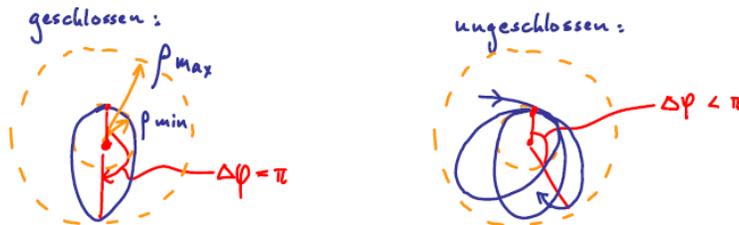
Separation der Variablen und Integration liefert

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{l}{\mu\rho^2} \frac{1}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff}(\rho))}} \quad (9.26)$$

Das heißt wir haben die Relation $\varphi(\rho)$. Invertieren liefert $\rho(\varphi)$

Geschlossene und nichtgeschlossene Bahn

Nun wollen wir untersuchen, ob eine geschlossene Bahnkurve $\rho(\varphi)$ möglich ist und wenn ja, unter welchen Bedingungen.



Wir betrachten den relativen Winkel $\Delta\varphi$ zwischen dem größten Abstand ρ_{max} und dem kleinsten ρ_{min} zwischen den beiden Teilchen. Das heißt, wenn die Bahn nach n Schleifen schließt, muss das n -fache des doppelten Relativwinkels gleich dem gesamten umlaufenen Winkel $m2\pi$ sein

$$n2\Delta\varphi = m2\pi \tag{9.27}$$

$\Delta\varphi$ bekommen wir aus (??)

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \frac{l}{\mu\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff}(\rho))}} \rho \, d\rho \stackrel{!}{=} \frac{\pi m}{n} \tag{9.28}$$

Dieser Ausdruck für $\Delta\varphi$ ist von U abhängig! Für zwei typische Potentiale geben wir $\Delta\varphi$ an:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \pi & \text{für } U = -\frac{\alpha}{\rho} \Rightarrow n = 1 \\ & \Rightarrow \text{Ellipse} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } U = \alpha\rho^2 \Rightarrow n = 2 \\ & \Rightarrow 2 \text{ Schleifen} \end{cases} \tag{9.29}$$

9.1.5 Qualitative Diskussion der Bewegung

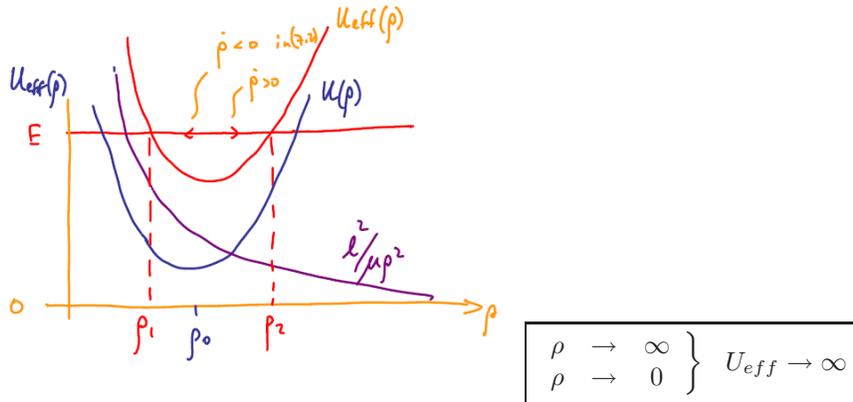
Im Folgenden betrachten wir den Verlauf einer Bewegung für unterschiedliche Arten von Potentialen. Dazu betrachten wir jeweils das effektive Potential der Radialbewegung

$$U_{eff} = \frac{l^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho) \tag{9.30}$$

Typischer Fall 1

Vorgegebenes Radialpotential: $U(\rho) = \alpha(\rho - \rho_0)^2$

(harmonischer Oszillator mit Gleichgewichtsabstand ρ_0 , z.B. Vibration eines zweiatomigen Moleküls)



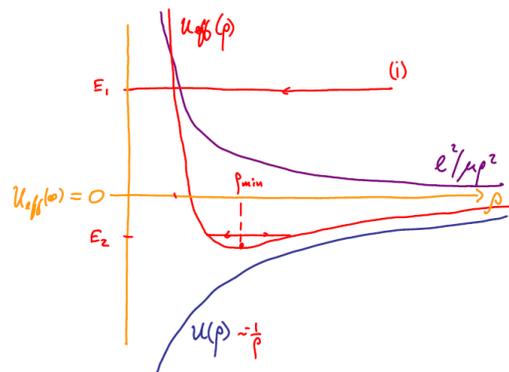
Es ist also nur *eine* Art von Bewegung möglich:

- gebundene Bewegung: $\rho_1 < \rho < \rho_2$

Typischer Fall 2

Vorgegebenes Radialpotential: $U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}$

(Gravitations- oder Coulombpotential)



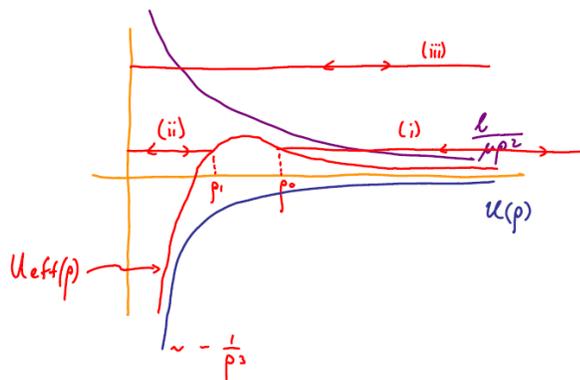
$\rho \rightarrow \infty$: $U_{eff} \rightarrow \text{const.}$
$\rho \rightarrow 0$: $U_{eff} \rightarrow \infty$
$\rho = \rho_{min}$: $U_{eff} = U_{min}$

Es sind *zwei* Arten von Bewegung möglich:

- (ii) gebundene Bewegung: falls $E < U_{eff}(\infty) = \text{const.}$
- (i) „Streuung durch Zentrifugalbarriere“: falls $E > U_{eff}(\infty) = \text{const.}$

Typischer Fall 3

Vorgegebenes Radialpotential: $U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^3}$



$\rho \rightarrow \infty$: $U_{eff} \rightarrow \text{const.}$
$\rho \rightarrow 0$: $U_{eff} \rightarrow -\infty$
$\rho = \rho_{max}$: $U_{eff} = U_{max}$

Es sind *drei* Arten von Bewegung möglich:

- (ii) gebundene Bewegung: falls $E < U_{eff,max} = \text{const.}$ und $0 \leq \rho \leq \rho_1$
- (i) Streuung: falls $E < U_{max} = \text{const.}$ und $\rho > \rho_0$
- (iii) Fall ins Zentrum (läuft durchs Zentrum hindurch)

9.2 Keplerproblem

Kepler untersuchte die Planetenbewegung und entdeckte dabei die drei Keplerschen Gesetze. Wir nähern uns diesen nun auf umgekehrtem Weg, insbesondere zeigen wir zunächst mit Hilfe der vorherigen Betrachtungen, dass sich Planeten auf Ellipsenbahnen bewegen und leiten dann die Gesetze ab.

9.2.1 Ellipsenbahn

Wir wollen also zeigen, dass die Bahn $\rho(\varphi)$ für bestimmte Potentiale zu einer elliptischen Bahn wird. Diese Potentiale haben die Form

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (\text{z.B.: } \alpha = Gm_1m_2, \alpha = -q_1q_2) \quad (9.31)$$

Damit ergibt sich für das effektive Potential

$$U_{eff}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{l^2}{2\mu\rho^2} \quad (9.32)$$

Für die Relation $\varphi(\rho)$ setzen wir U_{eff} in (??) ein

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{l}{\mu\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - (-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{l^2}{2\mu\rho^2})(\rho))}} \quad (9.33)$$

Dieses unschöne Integral können wir mithilfe entsprechender Integraltabellen (z.B. Bronstein) lösen und erhalten - wenn wir φ_0 so wählen, dass die Integrationskonstante verschwindet - glücklicherweise den exakten Ausdruck

$$\varphi(\rho) = \arccos\left(\frac{l/\rho - \mu\alpha/l}{\sqrt{2\mu E + \mu^2\alpha^2/l^2}}\right) \quad (9.34)$$

Um zu zeigen, dass dies tatsächlich einer Ellipsenbahn der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Ellipse in der ersten Hauptlage}) \quad (9.35)$$

entspricht, sind einige algebraische Manipulationen nötig, die wir im Folgenden durchführen werden.

Vereinfachung der Ellipsengleichung

Wir definieren

- einen Parameter $p = \frac{l^2}{\mu\alpha}$
- die Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$

Anwenden von $\frac{\mu\alpha}{l} \cos(\cdot)$ auf Gleichung (??):

$$\frac{\mu\alpha}{l} \cos(\varphi) = \frac{l/\rho - \mu\alpha/l}{\sqrt{2\mu E + \mu^2 \alpha^2 / l^2}} \frac{\mu\alpha}{l} \quad (9.36)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} \cos \varphi = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{p} \right) \frac{1}{\varepsilon} \quad (9.37)$$

Nun haben wir die Bahnkurve, welche wir aus Energie- und Drehimpulserhaltung gewonnen haben, in eine deutlich angenehmere Form gebracht

$$\boxed{\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \quad (9.38)$$

Kegelschnitte

Gleichung (??) beschreibt Kegelschnitte (Schnitt eines unendlichen Kegels mit einer Ebene). Wir betrachten die Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$ für verschiedene Energien:

- $E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1 \Rightarrow \text{Hyperbel}$
- $E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow \text{Parabel}$

In beiden Fällen ist $\varepsilon \cos \varphi \rightarrow -1$ möglich und somit ist $\rho \rightarrow \infty$ möglich.

- $E < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{Ellipse}$

Denn dann ist $\rho(\varphi)$ beschränkt mit $\rho_{max} = \frac{p}{1-\varepsilon}$ und $\rho_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$.

- $E = \frac{-\mu\alpha^2}{2l} \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow \text{Kreis}$

Denn dann ist $\rho(\varphi) = p$, also ρ unabhängig von φ . Diese Energie tritt beim Minimum von U_{eff} auf.

Ellipse in der ersten Hauptlage

Es folgen weitere Umformungen der bereits relativ schönen Gleichung (??). Wir benutzen dabei folgende Relationen:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \rho \cos \varphi, \quad a := \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \quad b := \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{pa}$$

(a: große Halbachse, b: kleine Halbachse)

Damit folgt aus (??)

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \Leftrightarrow p = \rho + \varepsilon \cos \varphi = \rho + \varepsilon x \quad (9.39)$$

$$\Leftrightarrow (p - \varepsilon x)^2 = x^2 + y^2 \quad (9.40)$$

$$\Leftrightarrow p^2 = x^2(1 - \varepsilon^2) + 2\varepsilon xp + y^2$$

$$= (1 - \varepsilon^2) \left(x + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 - \underbrace{\frac{\varepsilon^2 p^2}{1 - \varepsilon^2}}_{\varepsilon^2 b^2} + y^2 \quad \left| \cdot \frac{1 - \varepsilon^2}{p^2} = \frac{1}{b^2} \right.$$

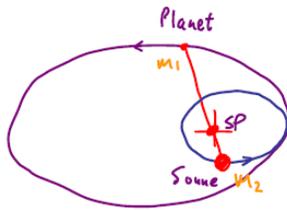
$$\frac{p^2 + \varepsilon^2 b^2}{b^2} = \frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{p^2} (x + \varepsilon a)^2 + \frac{y^2}{b^2} \quad (9.41)$$

$$\frac{(x + \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.42)$$

9.2.2 Die Keplerschen Gesetze

1. Die Planeten folgen Ellipsen mit der Sonne in einem Brennpunkt.

(Stimmt nicht ganz, aber fast!)



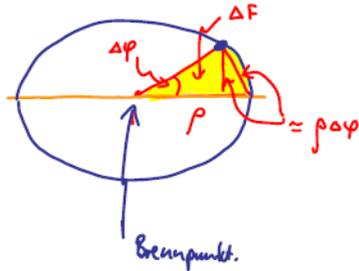
Herleitung:

$$\vec{r}_s := \vec{r}_2 \stackrel{(?)}{=} \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \stackrel{\text{SPS}}{=} - \underbrace{\frac{m_p}{M}}_{\leq 10^{-3}} \vec{r} \approx 0 \quad (9.43)$$

$$\vec{r}_p := \vec{r}_1 \stackrel{(?)}{=} \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \stackrel{\text{SPS}}{=} \underbrace{\frac{m_s}{M}}_{\approx 1} \vec{r} \approx \vec{r} \quad (9.44)$$

Also befindet sich die Sonne ungefähr im Brennpunkt der Ellipsenbahn des Planeten, wobei sie ebenfalls eine geringe elliptische Bewegung (gegenläufig zur Planetenellipse) durchläuft. Der Schwerpunkt liegt allerdings exakt im Brennpunkt.

2. Die vom Fahrstrahl pro Zeit überstrichene Fläche ist konstant.



Herleitung:

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} \approx \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (\rho \Delta \varphi)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{l}{\mu} = \text{const.} \quad \checkmark \quad (9.45)$$

3. Das Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse.

Die Fläche einer Ellipse ist $A = \pi ab$, gleichzeitig folgt aus dem 2. Keplerschen Gesetz:

$$A = \int dF = \int_0^T \frac{dF}{dt} dt = \frac{Tl}{2\mu} = \pi ab \quad (9.46)$$

Quadrieren liefert

$$T^2 = (2\pi a)^2 \cdot \underbrace{(b\mu/l)^2}_{a\mu/\alpha} = 4\pi^2 \underbrace{\frac{\mu}{\alpha}}_{=\text{const}} a^3 \quad \Rightarrow \quad T^2 \propto a^3 \quad (9.47)$$

Kapitel 10

Variationsprinzipien

Wir möchten nun die Lagrangegleichungen zweiter Art aus einem Variationsprinzip, dem sogenannten *Hamiltonschen Variationsprinzip* herleiten. Dazu benötigen wir einige Methoden der Variationsrechnung.

10.1 Variation ohne Nebenbedingungen

10.1.1 Eindimensionales Funktional *einer* Funktion

Allgemeine Problemstellung

Sei $F(y, y', x)$ eine gegebene Funktion, wobei $y = y(x), y' = \frac{dy}{dx}$. Wir suchen die Funktion $y(x)$, welche das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y(x), y'(x), x) \quad (10.1)$$

extremal macht (unter Randbedingungen $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$).

Strategie zur Findung der Extremalfunktion

Wir vereinfachen das Problem indem wir einen Parameter ε einführen, und das Funktional unter einer Vergleichsfunktion $y_v(\varepsilon)$ betrachten, die einer infinitesimalen Variation der gesuchten Funktion $y(x)$ entspricht.

$$y_v(\varepsilon) = y(x) + \underbrace{\varepsilon \eta(x)}_{\delta y(x)} \quad (10.2)$$

mit einer beliebigen Funktion $\eta(x)$ die der Randbedingung

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (10.3)$$

unterliegt, da $y(x_1), y(x_2)$ fest vorgegeben sind.

Das Funktional

$$J[y + \varepsilon\eta] = J[\varepsilon] \tag{10.4}$$

soll nun für die gesuchte Funktion y , also für $\varepsilon = 0$ extremal werden.

Dies führt zur *Extremalbedingung*:

$$\boxed{\left. \frac{dJ(y + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0} \tag{10.5}$$

Wir werden sehen, was diese Bedingung für Konsequenzen hat. Zunächst entwickeln wir das Funktional J in ε um $\varepsilon = 0$

$$\begin{aligned} J[y + \varepsilon\eta] &= \int_{x_1}^{x_2} dx F(y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', x) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(F(y, y', x) + \underbrace{\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}}_{:=F_y} \varepsilon\eta(x) + \underbrace{\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'}}_{:=F_{y'}} \varepsilon\eta'(x) + O(\varepsilon^2) \right) \end{aligned}$$

Aus der Extremalbedingung erhalten wir

$$0 = \left. \frac{dJ(y + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx (F_y\eta(x) + F_{y'}\eta'(x)) \tag{10.6}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F_y\eta(x) dx + F_{y'}\eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF_{y'}}{dx}\eta(x) dx \tag{10.7}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right) \eta(x) dx + \underbrace{F_{y'}\eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2}}_{\stackrel{(\text{??})}{=} 0} \tag{10.8}$$

Diese Relation muss für beliebige $\eta(x)$ gelten, deshalb ist

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0 \tag{10.9}$$

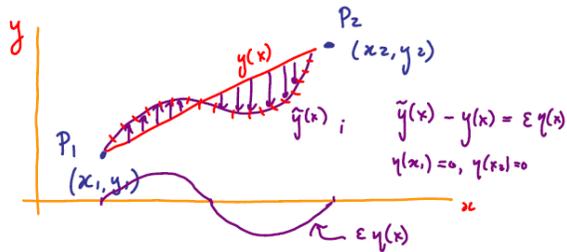
Das ist die *Euler-Lagrange-Gleichung der Variationsrechnung*

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}} \tag{10.10}$$

Beispiele

Beispiel 1: Strecke

Gesucht ist die Funktion $y(x)$ welche die Bogenlänge zwischen P_1 und P_2 minimiert (geraten: $y = ax + b$).



Die Variationsrechnung ist ein systematisches Verfahren derartige Fragen zu beantworten, da die Antwort nicht immer so naheliegend ist, wie in diesem Fall.

Der Abstand lässt sich durch ein Funktional angeben:

$$J = J[y] = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{P_1}^{P_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (10.11)$$

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + (y')^2} \quad (10.12)$$

Es ist also $F(y, y', x) = \sqrt{1 + (y')^2}$.

Die Euler-Lagrange-Gleichung liefert

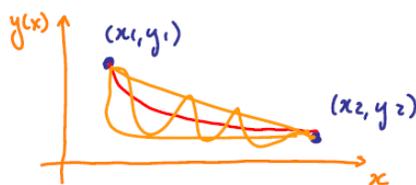
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad (10.13)$$

Das heißt, y' ist x -unabhängig, also muss y die Form haben

$$y(x) = ax + b \quad \checkmark \quad (10.14)$$

Beispiel 2: Brachistochrone

(„brachistos“ = kürzeste, „chrone“ = Zeit)



Gesucht ist die Funktion $y(x)$, die die benötigte Zeit für die „Rutschbahn“ von P_1 nach P_2 minimiert (nur unter Einfluss der Gravitation).

Diese Aufgabe wurde von Johann Bernoulli im Jahr 1696 gestellt (genaueres siehe [L61])

Zuerst müssen wir das „Rutschdauer“-Funktional bestimmen:

$$t_{12} = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} \stackrel{(\text{??})}{=} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v} \sqrt{1+y'^2} \quad (10.15)$$

Wobei v die Momentane Geschwindigkeit ist, also auch von x abhängt. Diese können wir mithilfe von Energieerhaltung bestimmen:

$$mgy_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{2g(y_1 - y)} \quad (10.16)$$

Also erhalten wir

$$J[y] = t_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_1 - y)}} dx \quad (10.17)$$

$$\Rightarrow \quad F(y, y', x) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_1 - y)}} \quad (10.18)$$

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung erhalten wir die Differentialgleichung für die gesuchte Kurve $y(x)$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2g(y_1 - y)}} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = \sqrt{1+y'^2} \frac{g}{(2g(y_1 - y))^{3/2}} \quad (10.19)$$

Dies genügt für unsere Zwecke, doch sei die Lösung vollständigkeithalber (ohne Herleitung) erwähnt:

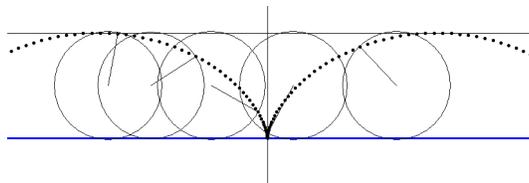
Integration liefert zunächst

$$(1 + y'^2) y = k^2 \quad (10.20)$$

wobei $k = k(g, x_1, y_1, x_2, y_2)$ eine Konstante ist.

Diese DGL beschreibt eine Zykloide (=zyklische Kurve, Radkurve), das ist die Bahn, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Leitlinie (z.B. auf einer Geraden) beschreibt. Diese hat die Parameterdarstellung (θ als Parameter = Winkel zwischen der Senkrechten zur Leitlinie und der Verbindungslinie des Kreispunktes zum Mittelpunkt):

$$x = \frac{1}{2}k^2(\theta - \sin \theta), \quad y = -\frac{1}{2}k^2(1 - \cos \theta) \quad (10.21)$$



Verallgemeinerungen

10.1.2 Funktional mehrerer Funktionen (eindimensional)

Wir betrachten ein Funktional, das von mehreren Funktionen abhängt

$$J[y_1, \dots, y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y_1, \dots, y_N, y'_1, \dots, y'_N, x) \quad (10.22)$$

mit den Randbedingungen

$$y_i(x_1) = y_{i1}, \quad y_i(x_2) = y_{i2} \quad (10.23)$$

Gesucht sind die Funktionen $y_i(x)$, die dieses Funktional extremal machen. Dazu führen wir diesmal mehrere Vergleichsfunktionen ein

$$y_i(x) + \varepsilon_i \eta_i(x) \quad (10.24)$$

mit N unabhängigen Variationsparametern (ε_i), für welche die Extremalbedingungen

$$\left. \frac{dJ[y_i + \varepsilon_i \eta_i]}{d\varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0} = 0 \quad (10.25)$$

zu erfüllen sind.

Wenn wir nun die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung für das Problem mit einer Funktion N -mal wiederholen, erhalten wir

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y_1, \dots, y_N, y'_1, \dots, y'_N, x)}{\partial y'_i} = \frac{\partial F(\dots)}{\partial y_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}} \quad (10.26)$$

10.1.3 Funktional mehrerer Funktionen (mehrdimensional)

Wir betrachten nun N Funktionen, die jeweils von R Variablen abhängen

$$y_i(x_\nu) := y_i(x_1, \dots, x_R) \quad (10.27)$$

Dann erhalten wir ein Funktional

$$J[y_i] := J[y_1, \dots, y_N] = \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_R F\left(\dots, y_i, \dots, \frac{\partial y_i}{\partial x_\nu}, \dots, x_\nu, \dots\right)$$

wobei die $y_i(x_\nu)$ am Rand von $B \subset \mathbb{R}^R$ vorgegebenen Randbedingungen unterliegen.

Wieder suchen wir die Funktionen $y_i(x_\nu)$, für die $J[y_i]$ extremal wird, wozu wir die Vergleichsfunktionen einführen

$$y_i(x_1, \dots, x_R) + \varepsilon_i \eta_i(x_1, \dots, x_R) \quad (10.28)$$

mit den Ableitungen

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_\nu} + \varepsilon_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\nu} \quad (10.29)$$

und den Extremalbedingungen

$$\left. \frac{dJ[y_i + \varepsilon_i \eta_i]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon_i=0} = 0 \quad (10.30)$$

Daraus folgt wieder aus Taylorentwicklungen in den ε_i

$$0 = \int_B dx_1 \dots dx_N \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i + \sum_{\nu=1}^R \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_\nu} \right)} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\nu} \right) \quad (10.31)$$

Und mit partieller Integration

$$0 = \int_B dx_1 \dots dx_N \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{\nu=1}^R \frac{d}{dx_\nu} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_\nu} \right)} \right) \eta_i + 0 \quad (10.32)$$

Dies muss wieder für beliebige η_i gelten, wodurch wir N Euler-Lagrange-Gleichungen erhalten:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_i} = \sum_{\nu=1}^R \frac{d}{dx_\nu} \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_\nu} \right)} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (10.33)}$$

10.2 Hamiltonsches Prinzip

Die bisherigen Überlegungen waren (bis auf die Beispiele) rein mathematischer Natur. Diese werden wir nun dazu benutzen, um aus dem *Hamilton-Prinzip* die Lagrange Gleichungen zweiter Art herzuleiten.

10.2.1 Das Prinzip der stationären Wirkung

Def.: Wirkung

Wir definieren die sogenannte *Wirkung* der Bahnkurve $q(t)$ (Bahn des gesamten Systems)

$$\boxed{S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (10.34)}$$

Die *Wirkung* ist also ein Funktional, das charakterisiert wird durch die gesamte Entwicklung des Systems zwischen zwei Zeitpunkten.

Hamiltonsches Prinzip

Von allen denkbaren Wegen, auf denen das System von $q(t_1) = q_1$ nach $q(t_2) = q_2$ gelangen könnte, wird es denjenigen wählen, für den die Wirkung extremal wird.

Das heißt, das System wählt diejenige Bahnkurve $q(t)$ mit den Randbedingungen $\delta q(t_1) = 0$ und $\delta q(t_2) = 0$ für die gilt

$$\delta S[q] = 0 \quad (10.35)$$

Beispielsweise folgt eine rollende Kugel immer der steilsten Neigung oder nimmt ein Lichtstrahl durch unterschiedliche Medien immer den Weg, der die geringste Laufzeit bedeutet (Fermatsches Prinzip).

10.2.2 Gewinnung der Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Wenn wir in Gleichung (??) identifizieren

$$F \leftrightarrow L, \quad y_i \leftrightarrow q_i, \quad y'_i \leftrightarrow \dot{q}_i, \quad x \leftrightarrow t \quad (10.36)$$

ergibt sich aus dem Hamilton-Prinzip

$$\delta S[q] = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (10.37)$$

10.2.3 Vorschau: Quantenmechanik à la Feynman

In der Feynmanschen Quantenmechanik, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein System von q_1 nach q_2 in der Zeit $t = t_2 - t_1$ gelangt nach

$$P_{12} = \left| \sum_{q_k} e^{iS[q]/\hbar} \right|^2 \quad (10.38)$$

wobei die q_k alle möglichen Wege zwischen q_1 und q_2 sind. Dies sind meist unendlich viele, doch diejenigen die wirklich in das Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit eingehen, sind deutlich weniger, denn die meisten Phasen heben sich gegenseitig auf.

Anschaulich wird das klar, wenn wir die Gaußsche Zahlenebene betrachten, in der alle komplexen Zahlen, die in (??) vorkommen, auf einem Kreis mit Radius 1 liegen, lediglich um den Winkel $S[q]/\hbar$ phasenverschoben. D.h. die Großzahl der Amplituden hebt sich auf, bis auf die der Wege, die im Bündel um den klassischen Weg liegen mit $\delta S = 0$ (=Hamilton-Prinzip).

10.3 Variation mit Nebenbedingungen

10.3.1 Funktion mit zwei Variablen

Fragestellung

Welcher Punkt $P = (x_P, y_P)$ minimiert die Funktion $f(x, y)$, unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$?

Ohne Nebenbedingung erhielten wir die Lösung, wenn wir die Funktion f unter Variation von x und y betrachten würden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (10.39)$$

Doch die Nebenbedingung verknüpft beide Variablen, weswegen eine unabhängige Variation von x und y nicht möglich ist.

Lösungsweg 1

Wir eliminieren y in $f(x)$ mithilfe der Nebenbedingung

$$y = y_g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x, y_g) = \tilde{f}(x) \quad (10.40)$$

Und minimieren $\tilde{f}(x)$

$$0 = \frac{d\tilde{f}}{dx} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{y=y_g} + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y_g} \frac{\partial y_g(x)}{\partial x} \quad (10.41)$$

Dies liefert x_P und mit der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ auch y_P .

Beispiel:

Finde Minimum von $f(x, y) = x^2 + y^2$

mit der Nebenbedingung $g(x, y) = 2x - y - 1 = 0$.

$$y_g(x) = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(x) = x^2 + (2x - 1)^2 = 5x^2 - 4x + 1$$

$$0 = \frac{d\tilde{f}}{dx} = 2x + 2(2x - 1) \cdot 2 = 10x - 4 \quad \Rightarrow \quad x_P = \frac{2}{5}$$

Lösungsweg 2

Nun ignorieren wir zunächst die Nebenbedingung und deren Verknüpfung von x, y und minimieren die erweiterte Funktion

$$f^*(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (\lambda \text{ heißt } \textit{Lagrange-Multiplikator})$$

nach x, y, λ .

Nun haben wir also drei unabhängige Variationsparameter, nach denen nun variiert werden muss. Die Variation nach λ generiert dann die Nebenbedingung per Konstruktion erst hinterher:

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad (10.42)$$

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad (10.43)$$

$$0 = \frac{\partial f^*}{\partial \lambda} = -g(x, y) \quad (10.44)$$

Nach Eliminierung von λ haben wir zwei Gleichungen für zwei Unbekannte:

$$\boxed{g(x, y) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = 0} \quad (10.45)$$

Konsistenzcheck:

Wir können die Nebenbedingung schreiben als

$$g(x, y) = y - y_g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial y_g}{\partial x}$$

$$\text{Dies in (??) eingesetzt: } \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{-\frac{\partial y_g}{\partial x}}{1} = 0$$

Damit haben wir (??) reproduziert:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{y=y_g} + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y_g} \frac{\partial y_g(x)}{\partial x} = 0$$

Beispiel:

Finde Minimum von $f(x, y) = x^2 + y^2$

mit der Nebenbedingung $g(x, y) = 2x - y - 1 = 0$.

$$f^*(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(2x - y - 1)$$

Extremalbedingungen:

$$2x - 2\lambda = 0 \quad 2y + \lambda = 0 \quad -g = 0$$

$$\text{Eliminierung von } \lambda: 2x - 2(-2y) = 2x + 4y = 0 \quad (a)$$

aus $g(x, y): y = 2x - 1$

$$\text{in (a): } 2x + 4(2x - 1) = 10x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_P = \frac{2}{5} \quad \checkmark$$

10.3.2 Funktion mehrerer Variablen mit mehreren NB

Fragestellung

Die Funktion $f(x_1, \dots, x_N)$ sei minimal, mit NB $g_\alpha(x_1, \dots, x_N) = 0$ ($\alpha = 1, \dots, R$)

Lösungsweg

Minimiere die erweiterte Funktion

$$f^*(x) = f(x) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} g_{\alpha}(x) \quad (10.46)$$

nach $x := x_1, \dots, x_N$ und nach den *Lagrange-Multiplikatoren* (LM) $\lambda_1, \dots, \lambda_R$.
Damit erhalten wir N+R Gleichungen (Extremalbedingungen) für N+R Variablen. Die NB werden wieder erst nach der Minimierung generiert ($\frac{\partial f^*}{\partial \lambda_{\alpha}} = 0$).

10.3.3 Funktional mit *isoperimetrischer* NB

Fragestellung

Ein Funktional $J[y_i]$, das von mehreren Funktionen $y_i(x) := (y_1(x), \dots, y_N(x))$ abhängt

$$J[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y_i, y'_i, x) \quad (10.47)$$

sei extremal unter den Nebenbedingungen

$$K_{\alpha}[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx G_{\alpha}(y_i, y'_i, x) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, R \quad (10.48)$$

Lösungsweg

Finde Extrema des erweiterten Funktionals

$$J^*[y_i, \lambda_{\alpha}] = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\left(F(y_i, y'_i, x) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} G_{\alpha}(y_i, y'_i, x) \right)}_{F^*(y_i, y'_i, x, \lambda_{\alpha})} \quad (10.49)$$

Wir erhalten also als Extremalbedingungen für die y_i und λ_{α} :

$$-\frac{\partial J^*}{\partial \lambda_{\alpha}} = \int_{x_1}^{x_2} G_{\alpha}(y_i, y'_i, x) = K_{\alpha}(y_i) = 0 \quad (10.50)$$

$$\text{(ELG:)} \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial (F - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} G_{\alpha})}{\partial y'_i} = \frac{\partial (F - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} G_{\alpha})}{\partial y_i} \quad (10.51)$$

Wir haben also R+N Gleichungen (NB+ELG) für R+N Variablen $(\lambda_1, \dots, \lambda_R, y_1, \dots, y_R)$

10.3.4 Funktional mit *holonomer* NB

(holonom: geschwindigkeitsunabhängig)

Fragestellung

Das Funktional

$$J[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y_i, y'_i, x) \tag{10.52}$$

sei extremal mit der holonomen Nebenbedingung

$$g(y_i, x) = 0 \tag{10.53}$$

(Legt eine ganze Funktion fest, d.h. dies ist eine stärkere NB als eine *isoperimetrische*, die nur ein Zahl festlegt.)

Lösungsweg

Wir führen die holonome NB auf unendlich viele isoperimetrische NB zurück, denn damit können wir nach dem vorigen Abschnitt umgehen. Wir benötigen dazu Kastenfunktionen (eine best. Klasse von Testfunktionen),

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [x_\alpha, x_\alpha + d] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{10.54}$$

die auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ leben. Dieses teilen wir dafür auf in I kleine Stücke der Länge $d = \frac{x_2 - x_1}{I}$.



Wir können nun die NB schreiben als

$$K_\alpha[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx g(y_i, x) f_\alpha(x) = 0 \tag{10.55}$$

Denn $\int_{x_1}^{x_2} dx g(y_i, x) f_\alpha(x) = \int_{x_\alpha}^{x_\alpha + d} dx g(y_i, x) = 0$, wobei für den Limes von unendlich vielen Intervallen I , $d = 0$ wird, also

$$\int_{x_\alpha}^{x_\alpha + d} dx g(y_i, x) \xrightarrow{d=0, \forall \alpha} g(y_i, x) \tag{10.56}$$

Wir erhalten nach (??) das erweiterte Funktional

$$J^* = J - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} K_{\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(F(y_i, y'_i, x) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} g(y_i, x) f_{\alpha}(x) \right) \tag{10.57}$$

Wir können die Summe über die Kastenfunktionen f_α , die mit den λ_α multipliziert werden, als Funktion $\lambda(x)$ für $I \rightarrow \infty$ approximieren (Übergang vom diskreten Index α zum kontinuierlichen Wert x) und erhalten das erweiterte Funktional

$$J^*[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{(F(y_i, y'_i, x) - \lambda(x) g(y_i, x))}_{F^*(y_i, y'_i, x)} \quad (10.58)$$

Analog zu (??) erhalten wir die Extremalbedingungen

$-\frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} = K_\alpha(y_i) = 0 \quad (10.59)$					
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="padding: 0 10px;">(ELG:)</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i}$</td> <td style="padding: 0 10px;">=</td> <td style="padding: 0 10px;">$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_i}$</td> <td style="padding: 0 10px;">(10.60)</td> </tr> </table>	(ELG:)	$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i}$	=	$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_i}$	(10.60)
(ELG:)	$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i}$	=	$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda(x) \frac{\partial g}{\partial y_i}$	(10.60)	

10.4 Hamilton-Prinzip für Systeme mit holonomen NB

10.4.1 Das Hamilton-Prinzip und LG1

Wir betrachten ein System, das durch die Lagrangefunktion

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{q}_n^2 - U(q_1, \dots, q_N, t) \quad (10.61)$$

und die holonomen Zwangsbedingungen

$$g_\beta(x, t) = 0 \quad \beta = 1, \dots, f \quad (10.62)$$

beschrieben wird. Das heißt die Koordinaten q_i sind *nicht* unabhängig, also keine „guten“ verallgemeinerten Koordinaten.

Das Hamilton-Prinzip für Probleme mit holonomen NB lautet also:

Die Dynamische Entwicklung des Systems erfolgt so, dass $\delta S = 0$ und $g_\beta = 0$

Wir haben also ein Variationsproblem mit holonomer NB, denn wir suchen die Funktion $q(t)$ für die die Wirkung

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (10.63)$$

extremal wird, wobei die NB $g_\beta = 0$ berücksichtigt werden muss.

Wir bilden die erweiterte Lagrangefunktion

$$L^*(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) - \sum_\beta \lambda_\beta(t) g_\beta(q, t) \quad (10.64)$$

und identifizieren in (??): $F \leftrightarrow L$, $y \leftrightarrow q$, $x \leftrightarrow t$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \sum_\beta \lambda_\beta(t) \frac{\partial g_\beta}{\partial q_n} \quad (10.65)$$

$$\Leftrightarrow m_n \ddot{q}_n = -\frac{\partial U}{\partial q_n} - \sum_\beta \lambda_\beta(t) \frac{\partial g_\beta}{\partial q_n} \quad (10.66)$$

(??) sind die *Lagrangegleichungen erster Art*.

10.4.2 Allgemeines zum Hamilton-Prinzip

- Das Hamilton-Prinzip wird auch als „Prinzip der kleinsten Wirkung“ bezeichnet. Tatsächlich ist die Wirkung jedoch nur *stationär* (d.h. in kleiner Umgebung der Bahn q ändert sich die Wirkung nicht: $\delta S[q] = 0$).
- Das Hamilton-Prinzip liefert eine elegante und kompakte Formulierung der dynamischen Entwicklung eines Systems in einer einzigen Gleichung. Nach einem Extremalprinzip lassen sich anscheinend alle fundamentalen Theorien formulieren!
- Das Hamilton-Prinzip ist jedoch für praktische Lösungen weniger hilfreich. Die Euler-Lagrange-Gleichung muss sowieso gelöst werden. Doch für allgemeine, formale Aussagen ist es sehr elegant, wie z.B.:

– *Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind kovariant unter Koordinatentransformationen.*

Dies folgt direkt aus dem HP, da $S[q]$ unabhängig von der Parametrisierung der Bahnkurve ist und somit die ELG die gleiche Form für jede Parametrisierung haben müssen.

– *Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind invariant unter „Eichtransformationen“.*

Eichtransformation der Lagrangefunktion: $L' = L + \frac{d}{dt}M(q, t)$

Die zugehörige Wirkung ergibt sich zu:

$$S'[q] = S[q] + \int_{t_a}^{t_e} dt \frac{d}{dt}M(q, t) = S[q] + M(q(t_e), t_e) - M(q(t_a), t_a)$$

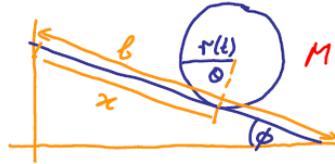
Variation der Wirkung mit $q \rightarrow q + \eta$ und festen Randbedingungen:

$$\delta S'[q] = \delta S[q] + (M - M) = \delta S[q]$$

⇒ Die Bewegungsgleichungen sind invariant unter Eichtransformationen, aber auch nicht eindeutig festgelegt, denn $L + \frac{d}{dt}M$ beschreibt dieselbe Bewegung.

10.4.3 Beispiele

Beispiel 1: Rollender Reifen



Verallgemeinerte Koordinaten: x, θ

Zwangsbedingung: $r\theta = x$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ mit $I = \frac{1}{2}Mr^2$

Potentielle Energie: $U = Mg(l-x)\sin\phi$

Erweiterte Lagrangefunktion: $L^* = T - U - \lambda(x - r\theta)$

Lagrangegleichungen für die erweiterte Funktion:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L^*}{\partial x} = M\ddot{x} - Mg\sin\phi + \lambda = 0 \quad (10.67)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L^*}{\partial \theta} = \frac{M}{2}r^2\ddot{\theta} - \lambda r = 0 \quad (10.68)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L^*}{\partial \lambda} = x - r\theta = 0 \quad (10.69)$$

Eliminierung von $\ddot{\theta}$: Gleichung (??) zweimal abgeleitet liefert: $\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{r}$.
eingesetzt: $\frac{M}{2}\ddot{x} = \lambda$

Eliminierung von λ : $\frac{M}{2}\ddot{x} = \lambda$ in (??): $\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\phi$

(d.h. der Reifen rollt nur halb so schnell wie er ohne Reibung $\lambda = \frac{1}{3}Mg\sin\phi$ rollen würde)

Lösung für x : $x(t) = \frac{1}{4}g\sin\phi t^2 + v_0 t + x_0$

Lösung für θ : $\theta(t) = \frac{g\sin\phi}{2r} \frac{1}{2}t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

Beispiel 2: Geladenes Teilchen in elektromagnetischem Feld**Kenntnisstand**

\vec{E} und \vec{B} können geschrieben werden als (lernen wir in E2 oder T3):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (10.70)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (10.71)$$

(ϕ skalares Feld, \vec{A} Vektorfeld, dies sind keine Messbaren Größen, aber sie sind sehr nützlich für kompakte Darstellungen)

Außerdem wissen wir, dass die Maxwell-Gleichungen invariant unter Eichtransformationen der Form

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad (10.72)$$

$$\phi \rightarrow \phi^* = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \text{sind.} \quad (10.73)$$

(χ : beliebige Funktion)

Diese beiden Informationen zusammen mit den folgenden Forderungen genügen, um L für das geladene Teilchen zu bestimmen.

Forderungen

1. Kopplung des Teilchens an \vec{A}, ϕ soll *lokal* sein, d.h. Ableitungen von \vec{A}, ϕ sollen nicht vorkommen:

$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \vec{A}(\vec{r}, t), \phi(\vec{r}, t)) \quad (10.74)$$

2. Homogenität und Isotropie der Raumzeit (keine explizite Abhängigkeit von \vec{r}, t und Winkeln):

$$L = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}, \phi) \quad (10.75)$$

3. Bewegungsgleichung des Teilchens soll eichinvariant sein:

$$L\left(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi), \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}, \phi) + \frac{d}{dt}\Lambda \quad (10.76)$$

(Zusatzterm mit Λ erlaubt, wegen Eichinvarianz der Lagrangefunktion)

Die denkbar allgemeinste Form von Λ wäre $\Lambda = \Lambda(\chi, \vec{\nabla}\chi, \frac{\partial \chi}{\partial t}, \vec{A}, \phi)$, denn diese Terme kommen alle links vor. Doch kommen deren Ableitungen (außer die von χ) nicht vor, aber rechts $\frac{d}{dt}\Lambda$. Also: $\Lambda = \Lambda(\chi)$

Lagrangefunktion

Ansatz:

$$L\left(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi), \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}, \phi) + \frac{d}{dt} \Lambda(\chi) \quad (10.77)$$

Wir entwickeln die linke Seite um infinitesimales χ :

$$L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}, \phi) + \frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}\chi) + \frac{\partial L}{\partial\phi} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) \quad (10.78)$$

Für infinitesimales $\chi = \chi(\vec{r}, t)$ können wir die rechte Seite schreiben als

$$L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}, \phi) + \underbrace{\frac{\partial\Lambda}{\partial\chi}}_{:=\lambda} \bigg|_{\chi=0} \frac{d\chi}{dt} = L + \lambda \left(\vec{\nabla}\chi \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial\chi}{\partial t} \right) \quad (10.79)$$

Wenn wir die linke und rechte Seite vergleichen erhalten wir

$$\frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})} = \lambda \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial\phi} = -c\lambda \quad (10.80)$$

Das heißt, die Lagrangefunktion muss von folgender Form sein:

$$L = \lambda(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - c\lambda\phi + f(\dot{\vec{r}}^2) \quad (10.81)$$

Und da für ein freies Teilchen gilt: $L(\vec{A} = 0, \phi = 0) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$, haben wir die Lagrangefunktion komplett bestimmt:

$$L = \lambda(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - c\lambda\phi + \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \quad (10.82)$$

Wenn wir nun identifizieren: $c\lambda = q$ (Ladung des Teilchens), dann erhalten wir das endgültige Ergebnis

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q \left(\frac{1}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - \phi \right) \quad (10.83)$$

Wir werden noch zeigen, dass man mit den ELG aus dieser Lagrangefunktion die *Lorentzkraft* gewinnen kann.

Kapitel 11

Noether-Theorem

11.1 Wiederholung: zyklische Koordinate

Wir haben bereits festgestellt, dass es einen Zusammenhang zwischen der direkten Abhängigkeit der Lagrangefunktion von bestimmten Koordinaten und Erhaltungsgrößen gibt (unmittelbare Folge der Lagrange-Gleichungen). Der sogenannte *generalisierte Impuls* $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ist nämlich erhalten, falls L nicht explizit von der *zyklischen Koordinate* q_k abhängt.

Man kann dies auch so formulieren:

Wir betrachten die Koordinatentransformation:

$$q_k \rightarrow q'_k(q_k, \varepsilon) = q_k + \varepsilon \quad \forall k \quad (11.1)$$

$$\dot{q}_k \rightarrow \dot{q}'_k = \dot{q}_k \quad (11.2)$$

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) := L(q(q', \varepsilon), \dot{q}(\dot{q}'), t) \quad (11.3)$$

(L' heißt *transformierte Lagrangefunktion*)

Falls q eine zyklische Koordinate ist, dann gilt

$$L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) = L(q', \dot{q}', t) \quad (11.4)$$

Also ist L für zyklische Koordinaten invariant unter obiger Koordinatentransformation. Daraus folgt aus den Euler-Lagrange-Gleichungen die Erhaltung einer Größe, dem generalisierten Impuls.

Obige Ausführung lässt die Frage aufkommen, ob es einen allgemeinen Zusammenhang gibt zwischen Transformationen, die die Lagrangefunktion, also auch die Entwicklung des gesamten Systems nicht beeinträchtigen, und Erhaltungsgrößen. Diese Frage wird das *Noether-Theorem* beantworten.

11.2 Das Noether-Theorem

Das Noether-Theorem, das 1918 von Emmy Noether formuliert wurde, besagt, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems eine Erhaltungsgröße gehört und umgekehrt. Wobei unter einer Symmetrie eine Transformation verstanden wird, unter der sich das Verhalten des Systems (also die Wirkung) nicht ändert. Mit anderen Worten:

Jede einparametrische Schar von Transformationen, unter denen die Wirkung invariant ist, führt zu einer Erhaltungsgröße.

Wir betrachten eine bijektive Koordinatentransformation

$$q_k = q_k(q', t, \varepsilon) \quad k = 1, \dots, f, \quad q' = q'_1, \dots, q'_k \quad (11.5)$$

$$q'_k = q'_k(q, t, \varepsilon) \quad k = 1, \dots, f, \quad q = q_1, \dots, q_k \quad (11.6)$$

in einem kontinuierlich veränderlichen, differenzierbaren Parameter ε . Für $\varepsilon = 0$ sei diese Transformation die Identität.

Wenn die Lagrangefunktion (also auch die Wirkung) unter dieser Transformation invariant ist, so gibt es eine Erhaltungsgröße (Integral der Bewegung), die durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$I(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad (11.7)$$

Beweis von (??)

Die *transformierte Lagrangefunktion* für obige Koordinatentransf. lautet

$$L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) := L(q(q', t, \varepsilon), \dot{q}(q', \dot{q}', t, \varepsilon), t) \quad (11.8)$$

Invarianz der Lagrangefunktion unter der Koordinatentransformation bedeutet

$$L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) = L(q', \dot{q}', t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (11.9)$$

Wir betrachten dazu

$$\frac{dL}{d\varepsilon} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k(q', \dot{q}', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \quad (11.10)$$

$$= \sum_{k=1}^f \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \quad (11.11)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (11.12)$$

Mit $\frac{dL}{d\varepsilon} = \frac{\partial L'}{\partial \varepsilon}$ und (??) folgt daraus: $\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \text{const} := I(q, \dot{q})$. \square
(Das Ergebnis gilt für alle ε , also auch für $\varepsilon = 0$, was oft praktischer ist.)

11.2.1 Beispiel

Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens in einem Potential, das für Rotationen um die z-Achse symmetrisch ist:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x^2 + y^2, z) \quad (11.13)$$

Zugang über kartesische Koordinaten

Wir betrachten eine Transformation, welche \vec{r} um einen kleinen Winkel ε dreht:

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (11.14)$$

Also

$$x \rightarrow x' = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon \quad y \rightarrow y' = x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon \quad (11.15)$$

$$x' \rightarrow x = x' \cos \varepsilon + y' \sin \varepsilon \quad y' \rightarrow y = -x' \sin \varepsilon + y' \cos \varepsilon \quad (11.16)$$

Wir erhalten die transformierte Lagrangefunktion

$$L' = T' - U' \quad (11.17)$$

mit

$$\begin{aligned} T'(\dot{\vec{r}}', t, \varepsilon) &= \frac{m}{2} ((\dot{x}' \cos \varepsilon + \dot{y}' \sin \varepsilon)^2 + (-\dot{x}' \sin \varepsilon + \dot{y}' \cos \varepsilon)^2 + \dot{z}'^2) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) \\ U'(x^2 + y^2, z) &= U((x' \cos \varepsilon + y' \sin \varepsilon)^2 + (-x' \sin \varepsilon + y' \cos \varepsilon)^2, z') \\ &= U(x'^2 + y'^2, z') \end{aligned} \quad (11.18)$$

Also ist L invariant unter Rotation um die z-Achse, und wir können nach dem Noether-Theorem die zugehörige Erhaltungsgröße berechnen:

$$I(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \dots = m\dot{x}y - m\dot{y}x = -m(x\dot{y} - y\dot{x}) = -L_z \quad (11.19)$$

(L_z : Drehimpuls um z-Achse, für genaue Rechnung siehe [L83])

Dasselbe Ergebnis erhält man mit einem Zugang über Zylinderkoordinaten, wobei man die Transformation für φ betrachtet: $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \varepsilon$. Wer dies überprüfen will, tue es selbst und/oder schaue in [L83] nach.

11.3 Erweitertes Noether-Theorem

Bisher haben wir Transformationen behandelt, für die die Lagrangefunktion *invariant* blieb. Jetzt betrachten wir den Fall, dass sich die Lagrangefunktion unter einer Koordinatentransformation um eine *Eichtransformation* ändert.

$$L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) = L(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt}M(q', t, \varepsilon) \quad (11.20)$$

Für diesen Fall lautet die Erhaltungsgröße

$$\boxed{\tilde{I}(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial M(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}} \quad (11.21)$$

Beweis

Wir betrachten

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(L'(q', \dot{q}', t, \varepsilon) - \frac{d}{dt}M(q', t, \varepsilon) \right) = \frac{\partial L(q', \dot{q}', t)}{\partial \varepsilon} \quad (11.22)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{d}{d\varepsilon} L(q(q', \varepsilon), \dot{q}(\dot{q}', \varepsilon), t)}_{\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial L(q', \dot{q}', t)}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (11.23)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k(q', t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad (11.24)$$

□

11.3.1 Beispiel: Freier Fall im Schwerfeld

Die Lagrangefunktion dafür lautet

$$L(z, \dot{z}) = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - mgz \quad (11.25)$$

Wir betrachten die Galilei-Transformation

$$z \rightarrow z' = z + \varepsilon t \quad (11.26)$$

und die transformierte Lagrangefunktion

$$L'(z', \dot{z}', t, \varepsilon) = \frac{m}{2} (\dot{z}' - \varepsilon)^2 - mg(z' - \varepsilon t) \quad (11.27)$$

$$= \frac{m}{2} \dot{z}'^2 - mgz' - \varepsilon m \dot{z}' + \frac{m}{2} \varepsilon^2 + mg\varepsilon t \quad (11.28)$$

$$= L(z', \dot{z}') + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \varepsilon^2 t + \frac{m}{2} g \varepsilon t^2 - m \varepsilon z' \right)}_{M(z', t, \varepsilon)} \quad (11.29)$$

L ist also bis auf eine Eichtransformation invariant. Die Erhaltungsgröße für obige Transformation ergibt sich aus

$$\tilde{I}(z, \dot{z}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial M}{\partial \varepsilon} = -m\dot{z}t - (m\varepsilon t + \frac{m}{2}gt^2 - m \underbrace{z'}_{z+\varepsilon t}) \quad (11.30)$$

$$= m(z - t\dot{z} - \frac{1}{2}gt^2) = mz_0 \quad (11.31)$$

Beim letzten Schritt haben wir die Form von z für den freien Fall verwendet: $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + vt + z_0$.

Die erhaltene Größe ist in diesem Fall eine Anfangsbedingung.

11.4 Bemerkungen zum Noether-Theorem

1. In der Lagrangemechanik kann man also die Aussage machen: *Eine kontinuierliche Symmetrie liefert eine Erhaltungsgröße*. Die Umkehrung ist allerdings erst in der Hamiltonschen Mechanik gültig.
2. Die Erhaltungsgröße I ist im Prinzip eine Funktion von ε , aber die ε -Abhängigkeit bringt keine neue Information. Deswegen betrachten wir immer nur den Fall $\varepsilon = 0$. Deshalb genügen Transformationen unter infinitesimalen Änderungen, wobei Terme mit $O(\varepsilon^2)$ vernachlässigt werden.

Beispiel: z-Achsen-Rotationssymmetrisches Potential (??):
Es genügt die Entwicklung bis zur ersten Ordnung:

$$x \rightarrow x' = x - y\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad y \rightarrow y' = y + x\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow L' = \frac{m}{2} ((x' + y'\varepsilon)^2 + (y' - x'\varepsilon)^2 + \dot{z}'^2) - \dots$$

$$L' = \frac{m}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - \dots + O(\varepsilon^2) = L$$

3. Das Noether-Theorem gilt nicht für Transformationen, die nicht von einem kontinuierlichen Parameter abhängen (z.B. Spiegelung: $x \rightarrow x' = -x$).

11.5 Zeitinvarianz

Bisher haben wir nur Raumkoordinatentransformationen betrachtet. Falls die Lagrangefunktion unter Zeittranslation invariant ist

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t + \varepsilon) \quad (11.32)$$

so ist die Größe

$$I^* = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \quad (11.33)$$

erhalten.

Beweis

$$\frac{d}{dt}L = \sum_{k=1}^f \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{=0} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \quad (11.34)$$

$$\Rightarrow L - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \text{const.} = I^* \quad \square \quad (11.35)$$

Bemerkung

Für Systeme mit zeitunabhängigen Potentialen aber mit rheonomen (zeitabhängigen) Zwangsbedingungen liefert obiger Satz eine Erhaltungsgröße, die aber nicht als Energie zu interpretieren ist.

Beispiel: Perle auf rotierendem Stab

$$x = \rho \cos \omega t \quad , \quad y = \rho \sin \omega t \quad (11.36)$$

(ZB: $\varphi = \omega t$)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2) \quad (11.37)$$

$$\Rightarrow I = \dots = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 - \rho^2 \omega^2) \quad (11.38)$$

Wenn wir die bereits bekannte Lösung der Bewegungsgleichung:
 $\rho(t) = \rho_1 e^{-\omega t} + \rho_2 e^{\omega t}$ einsetzen, erhalten wir:

$$I = -m\omega^2 \rho_1 \rho_2 = \text{const.} \quad (\text{keine Energie}) \quad (11.39)$$

Die Energie kann hier auch nicht erhalten sein, da die Zwangskraft, die die Kugel auf der Stange hält, Arbeit verrichtet.

Teil IV

Starrer Körper

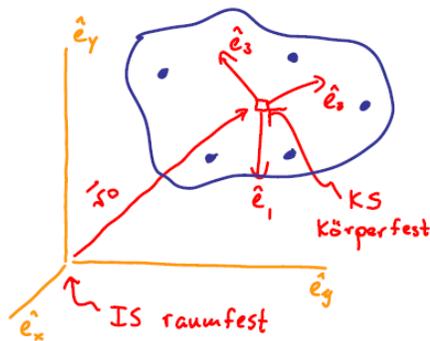
Kapitel 12

Modell des Starren Körpers

Def.: Starrer Körper

Ein System von Massenpunkten m_ν , deren Abstände $|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|$ konstant sind, heißt *Starrer Körper (SK)*.

12.1 Beschreibung



Wir wählen zur Beschreibung ein raumfestes Inertialsystem IS und ein körperfestes Koordinatensystem KS:

$$\text{IS: } x, y, z; \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z \quad (12.1)$$

$$\text{KS: } x_1, x_2, x_3; \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \quad (12.2)$$

12.1.1 Freiheitsgrade

Ein Starrer Körper hat also *drei Koordinaten* für den Ursprung des KS relativ zum IS und *drei Winkel* für die Orientierung der Achsen des KS relativ zu den Achsen des IS.

⇒ Ein Starrer Körper hat sechs Freiheitsgrade.

12.1.2 Koordinaten und Koordinatenänderungen

Es seien

- $\vec{r}_0(t)$ Ortsvektor des Ursprungs des KS im IS,
- \vec{r}_ν Ortsvektor eines Punktes P_ν im KS,
- $\vec{r}_{\nu,IS}$ Ortsvektor des Punktes P_ν im IS.

KS rotiere nun mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ relativ zum IS. Das heißt die Ortsvektoren des KS ändern sich mit

$$\dot{\hat{e}}_i = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \quad (12.3)$$

Geschwindigkeiten der Punkte des SK

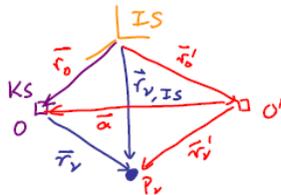
Dann ergibt sich die Geschwindigkeit $\vec{v}_{\nu,IS}$ eines Punktes P_ν relativ zum IS

$$\dot{\vec{r}}_{\nu,IS} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_0 + \vec{r}_\nu) = \dot{\vec{v}}_0 + (\dot{\vec{r}}_\nu + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) \stackrel{\dot{\vec{r}}_\nu=0 \text{ in SK}}{=} \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu \quad (12.4)$$

$$\boxed{\vec{v}_{\nu,IS} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu} \quad (12.5)$$

Falls wir den Ursprung des KS bei O' (\vec{r}_0') wählen,

$$\vec{r}_0' = \vec{r}_0 - \vec{a}, \quad \vec{r}_\nu' = \vec{a} + \vec{r}_\nu \quad (12.6)$$



dann erhalten wir für die Geschwindigkeit eines Punktes P_ν relativ zum IS

$$\vec{v}_{\nu,IS} = \vec{v}_0' + \vec{\omega}' \times \vec{r}_\nu' = \vec{v}_0' + \vec{\omega}' \times (\vec{a} + \vec{r}_\nu) \quad (12.7)$$

Gleichsetzen von (12.4) und (12.7) (gilt für alle \vec{r}_ν) liefert

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' \quad (12.8)$$

$$\vec{v}_0' = \vec{v}_0 - \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (12.9)$$

Das bedeutet

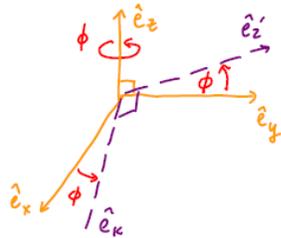
- Die Geschwindigkeit \vec{v}_0' ist abhängig von der Wahl des KS.
- Die Winkelgeschwindigkeit ist unabhängig von der Wahl des KS! (charakterisiert Drehbewegung an sich)

⇒ O darf nach Belieben/Zweckmäßigkeit gewählt werden.

12.2 Eulersche Winkel

Will man ein KS $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ auf eine beliebige Position drehen, benötigt man drei Drehungen. Um die Verwirrung gering zu halten existieren verschiedene Definitionen der drei *Eulerwinkel* um die gedreht werden soll. Wir beschränken uns auf eine derselben: Die sog. *x-Konvention* (weil die zweite Drehung um die neue x-Achse erfolgt).

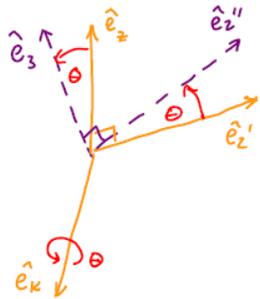
1. Φ -Drehung um z-Achse (\hat{e}_z):



$$\hat{e}_x \rightarrow \hat{e}_k, \quad \hat{e}_y \rightarrow \hat{e}'_2, \quad \hat{e}_z \rightarrow \hat{e}_z$$

(Φ : Winkel zwischen e_x und e_k)

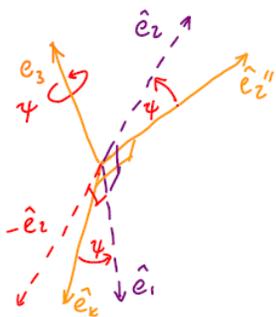
2. Θ -Drehung um x' -Achse (\hat{e}_k):



$$\hat{e}_k \rightarrow \hat{e}_k, \quad \hat{e}'_2 \rightarrow \hat{e}''_2, \quad \hat{e}_z \rightarrow \hat{e}_3$$

(Θ : Winkel zwischen e_z und e_3)

3. Ψ -Drehung um z'' -Achse (\hat{e}_3):



$$\hat{e}_k \rightarrow \hat{e}_1, \quad \hat{e}''_2 \rightarrow \hat{e}_2, \quad \hat{e}_3 \rightarrow \hat{e}_3$$

(Θ : Winkel zwischen e_k und e_1)

Die zu jeder Drehung gehörigen Winkelgeschwindigkeiten sind

$$\vec{\omega}_\Phi = \dot{\Phi}\hat{e}_z, \quad \vec{\omega}_\Theta = \dot{\Theta}\hat{e}_k, \quad \vec{\omega}_\Psi = \dot{\Psi}\hat{e}_3 \quad (12.10)$$

sodass wir eine beliebige Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ charakterisieren können

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\Phi + \vec{\omega}_\Theta + \vec{\omega}_\Psi = \dot{\Phi}\hat{e}_z + \dot{\Theta}\hat{e}_k + \dot{\Psi}\hat{e}_3 \quad (12.11)$$

Winkelgeschwindigkeit im Körpersystem

Wir kennen die Winkelgeschwindigkeit für eine Drehung in eine beliebige Richtung $\vec{\omega}$ nun also im System $(\hat{e}_z, \hat{e}_k, \hat{e}_3)$. Wir wollen allerdings eine Darstellung bezüglich der Basis im KS $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. Die Komponenten erhalten wir aus der Projektion $\hat{e}_i \cdot \vec{\omega} = \hat{e}_i \cdot (\dot{\Phi}\hat{e}_z + \dot{\Theta}\hat{e}_k + \dot{\Psi}\hat{e}_3)$.

Dazu müssen wir erst die Basisvektoren $\hat{e}_z, \hat{e}_k, \hat{e}_3$ in der Basis $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ darstellen:

$$\hat{e}_z = \cos \Theta \hat{e}_3 + \sin \Theta \hat{e}_2'' \quad \text{mit} \quad \hat{e}_2'' = \cos \Psi \hat{e}_2 + \sin \Psi \hat{e}_1 \quad (12.12)$$

$$\hat{e}_k = \cos \Psi \hat{e}_1 - \sin \Psi \hat{e}_2 \quad (12.13)$$

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_3 \quad (12.14)$$

Für die Komponenten von $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$ ergibt sich

$$\omega_1 = \hat{e}_1 \cdot \vec{\omega} = \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi + \dot{\Theta} \cos \Psi \quad (12.15)$$

$$\omega_2 = \hat{e}_2 \cdot \vec{\omega} = \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Psi - \dot{\Theta} \sin \Psi \quad (12.16)$$

$$\omega_3 = \hat{e}_3 \cdot \vec{\omega} = \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \quad (12.17)$$

Wir haben jetzt also $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\Phi, \Theta, \Psi, \dot{\Phi}, \dot{\Theta}, \dot{\Psi})$ im Körpersystem.

Kapitel 13

Trägheitstensor

Wir können laut des letzten Kapitels Ort und Geschwindigkeit eines Punktes des Starren Körpers bezüglich eines raumfesten Inertialsystems IS angeben durch

$$\vec{r}_{IS,\nu} = \vec{r}_0 + \vec{r}_\nu, \quad \vec{v}_{IS,\nu} = \vec{v}_0 + \omega \times \vec{r}_\nu \quad (13.1)$$

oder im Fall einer kontinuierlichen Massenverteilung

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (13.2)$$

13.1 Einführung des Trägheitstensors

13.1.1 Kinetische Energie des starren Körpers

Diskrete Massenverteilung

Für die kinetische Energie eines starren Körpers ergibt sich damit

$$2T = \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{v}_{IS,\nu}^2 \quad (13.3)$$

$$= \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{v}_0^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu})^2 + 2(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}) \vec{v}_0) \quad (13.4)$$

$$= M \vec{v}_0^2 + \sum_{\nu} m_{\nu} (\omega \times \vec{r}_{\nu})^2 + 0 \quad (13.5)$$

Grund für die Vernachlässigung des letzten Terms:

- Entweder legt man den Schwerpunkt des SK in den Ursprung des KS (Schwerpunktsystem), denn der dritte Term kann umgeschrieben werden zu $2 \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu} \cdot (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) = 2M \vec{R}_s (\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$, was verschwindet, wenn $\vec{R}_s = 0$ ist,
- oder man nimmt an, dass der Ursprung des KS ruht ($\vec{v}_0 = 0$).

Somit kann die kinetische Energie zerlegt werden in die beiden Teile

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu})^2 = T_{\text{transl.}} + T_{\text{rot.}} \quad (13.6)$$

also in die Translationsenergie und Rotationsenergie des starren Körpers.

Kontinuierliche Massenverteilung

Im Falle einer kontinuierlichen Massenverteilung erhalten wir für die kinetische Energie des starren Körpers

$$T = \frac{1}{2} \int d^3 r \rho_D(\vec{r}) \vec{v}^2(\vec{r}) \quad (13.7)$$

wobei $\vec{v}(\vec{r})$ die Geschwindigkeit eines Massenelements dm bei \vec{r} bezüglich dem Ursprung des raumfesten Inertialsystems IS ist.

Die kinetische Energie lässt sich nach (??) schreiben als

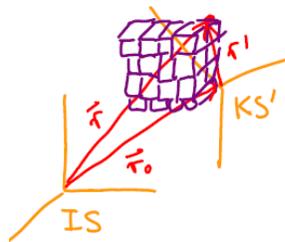
$$T = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho_D(\vec{r}_0 + \vec{r}') (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}')^2 \quad (13.8)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho_D(\vec{r}') (\dot{\vec{r}}_0^2 + (\omega \times \vec{r}')^2 + 2\dot{\vec{r}}_0(\omega \times \vec{r}')) \quad (13.9)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho_D(\vec{r}') (\omega \times \vec{r}')^2 + 0 \quad (13.10)$$

$$= T_{\text{transl.}} + T_{\text{rot.}} \quad (13.11)$$

Also können wir - wie im diskreten Fall - die kinetische Energie in Translations- und Rotationsenergie aufteilen.



13.1.2 Rotationsenergie und Trägheitstensor

Die Rotationsenergie

$$T_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu})^2 \quad (13.12)$$

lässt sich viel eleganter schreiben mithilfe des sog. *Trägheitstensors*.

Wenn wir $\vec{\omega}$ und \vec{r}_{ν} bezüglich der Basis $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ im KS darstellen mit den Komponenten

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \vec{r}_{\nu} = (r_{\nu}^1, r_{\nu}^2, r_{\nu}^3) \quad (13.13)$$

und die Identität beachten

$$(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \sum_i (\vec{\omega} \times \vec{r})_i (\vec{\omega} \times \vec{r})_i \quad (13.14)$$

$$= \sum_{ijkmn} \omega_j r_k \omega_m r_n \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} \quad (13.15)$$

$$= \sum_{jmn} \omega_j \omega_m \delta_{jm} r_n^2 - \omega_j \omega_m r_j r_m \quad (13.16)$$

$$= \sum_{jm} \omega_j \omega_m (\vec{r}^2 \delta_{jm} - r_j r_m) \quad (13.17)$$

so können wir $T_{\text{rot.}}$ schreiben als

$$T_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j \underbrace{\sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{r}_{\nu}^2 \delta_{jm} - r_j^{\nu} r_m^{\nu})}_{:=I_{jm}:=\Theta_{jm}:=\theta_{jm}} \omega_m \quad (13.18)$$

$$T_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j \Theta_{jm} \omega_m \quad (13.19)$$

$\vec{\omega}$: charakterisiert Drehbewegung, Θ : enthält Information über die Massenverteilung

In Matrix-Notation:

$$T_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (13.20)$$

mit dem *Trägheitstensor*

$$\Theta_{jm} = \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{r}_{\nu}^2 \delta_{jm} - r_j^{\nu} r_m^{\nu}) \quad (13.21)$$

oder für eine kontinuierliche Massenverteilung ($m = \int dm = \int \rho_D(\vec{r}) dV$):

$$\Theta_{jm} = \int d^3r \rho_D(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{jm} - r_j r_m) \quad (13.22)$$

13.1.3 Beispiel: Trägheitstensor einer Kugel

Eine Kugel mit homogener Massenverteilung habe den Radius a , dann berechnet sich der Trägheitstensor nach

$$\Theta_{im} = \iiint dx dy dz \rho_D(\vec{r}) (r^2 \delta_{im} - r_i r_m) \quad (13.23)$$

Die Nichtdiagonalelemente verschwinden alle, da wir dafür eine ungerade Funktion über ein symmetrisches Intervall integrieren (z.B. $\iint dx dy xy = 0$). Außerdem sind die Diagonalelemente aufgrund der Kugelsymmetrie alle gleich. Deshalb genügt es, z.B. zu berechnen

$$\Theta_{33} = \int_{-a}^a dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} d\rho \rho \rho_D (\rho^2 + z^2 - z^2) \quad (13.24)$$

$$= 2\pi \rho_D \int_{-a}^a dz \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \quad (13.25)$$

$$= \pi \rho_D \int_0^a dz \sqrt{a^2 - z^2}^4 = \frac{8}{15} \pi \rho_D a^5 = \frac{2}{5} M a^2 \quad (13.26)$$

$$\left(\text{da } \rho_D = \frac{M}{4\pi a^3/3} \right) \quad (13.27)$$

Da also $\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33}$, ist der gesamte Trägheitstensor bestimmt.

13.2 Hauptachsentransformation

Da diese Berechnung von Trägheitstensoren für komplexere Körper beliebig kompliziert sein kann, lohnt es sich nach eleganten Vereinfachungen zur Bestimmung des Trägheitstensors zu suchen. Wie sich herausstellt gibt es eine sehr mächtige Vereinfachung, die als *Hauptachsentransformation* bezeichnet wird.

13.2.1 Drehungen von Tensoren

Wir wollen zunächst angeben, wie sich Tensoren unter Drehungen $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \hat{R}\vec{r}$ mit einer Drehmatrix \hat{R} transformieren:

1. Tensoren „0. Stufe“ (Skalare): $S \rightarrow S' = S$ (invariant)

2. Tensoren „1. Stufe“ (Vektoren): $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \hat{R}\vec{A}$ (wie Ortsvektoren)

$$\text{explizit: } A_i \rightarrow A'_i = \hat{R}_{ij} A_j \quad (13.28)$$

3. Tensoren „2. Stufe“ (z.B. Θ): $I \rightarrow I' = \hat{R}I\hat{R}^T$ („wie äußeres Produkt“)

$$\text{explizit: } I_{ij} \rightarrow I'_{ij} = R_{im} I_{mn} R_{nj}^T \quad (13.29)$$

Drehung des Trägheitstensors

Satz:

Ein Trägheitstensor verhält sich unter Drehungen wie ein Tensor zweiter Stufe.

Beweis:

$$\Theta'_{ij} = \iiint d^3 r' \rho'_D(\vec{r}') (\delta_{ij} r'^2 - r'_i r'_j) \quad (13.30)$$

$$= \iiint d^3 r \rho_D(\vec{r}) (\delta_{ij} r^2 - R_{im} r_m R_{jn} r_n) \quad (\text{ESK}) \quad (13.31)$$

$$= R_{im} \iiint d^3 r \rho_D(\vec{r}) (\delta_{mn} r^2 - r_m r_n) R_{nj}^T \quad (13.32)$$

$$= R_{im} \Theta_{mn} R_{nj}^T \quad (13.33)$$

Die Form von Θ hängt also vom Koordinatensystem ab (ändert sich unter Drehung).

13.2.2 Hauptachsentransformation

Es gibt zwei sehr mächtige Vereinfachungen:

1. Wähle den Ursprung des Körpersystems im Schwerpunkt.
2. Es gibt für jeden Körper ein Koordinatensystem, in dem der Trägheitstensor Diagonalform hat:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \quad (13.34)$$

Die Zweite Vereinfachung nennt man *Hauptachsentransformation*, das entsprechende Koordinatensystem *Hauptträgheitsachsensystem* und die Diagonalelemente *Hauptträgheitsmomente*.

Beweis (von (2))

- Jede diagonalisierbare (eine diagonalisierbare $n \times n$ -Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren, also gibt es eine Basis aus Eigenvektoren) Matrix A kann man in eine Eigenwertmatrix Λ transformieren, eine Diagonalmatrix mit Eigenwerte als Diagonalelemente. Man schreibt dazu die Eigenvektoren in die Spalten einer Eigenvektormatrix S und erhält Λ mit

$$S^{-1}AS = \Lambda \quad (13.35)$$

- Θ ist eine symmetrische ($\Theta = \Theta^T$) reelle 3×3 -Matrix, also diagonalisierbar. Das heißt es existiert ein S mit

$$S^{-1}\Theta S = \Lambda \quad \Leftrightarrow \quad \Theta = S\Lambda S^{-1} \quad (13.36)$$

Daraus ergibt sich für S

$$\Theta^T = (S\Lambda S^{-1})^T = (S^{-1})^T \Lambda S^T \quad \Rightarrow \quad S^{-1} = S^T \quad (13.37)$$

Also ist S orthogonal und kann mit einer Drehmatrix identifiziert werden.

□

Bemerkungen

- Die Hauptträgheitsmomente sind also die Eigenwerte der Matrix Θ .
- Das Hauptträgheitsachsensystem müsste man also erhalten, indem man die kanonischen Einheitsvektoren mit einer Drehmatrix \hat{R} transformiert, in deren Spalten die orthonormalen Eigenvektoren des Trägheitstensors stehen.
- Bezeichnungen:
 - *unsymmetrischer Kreisel* : $\Theta_1 \neq \Theta_2 \neq \Theta_3 \neq \Theta_1$
 - *symmetrischer Kreisel* : $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$
 - *Kugelkreisel* : $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$
- Die Berechnung der Hauptträgheitsmomente im Hauptträgheitsachsensystem vereinfacht sich zu

$$\Theta_x = \iiint dx dy dz \rho_D(\vec{r})(y^2 + z^2) \quad (13.38)$$

$$\Theta_y = \iiint dx dy dz \rho_D(\vec{r})(z^2 + x^2) \quad (13.39)$$

$$\Theta_z = \iiint dx dy dz \rho_D(\vec{r})(x^2 + y^2) \quad (13.40)$$

13.3 Nützliche Sätze**13.3.1 Rotationssymmetrie und Trägheitsmomente****Satz**

Ist ein starrer Körper rotationssymmetrisch bezüglich einer Achse, so liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse. Der Körper ist dann ein symmetrischer Kreisel und die Hauptträgheitsachsen fallen mit den Symmetrieachsen zusammen.

Beweis:

Wir wählen die z-Achse entlang der Symmetrieachse. Rotationssymmetrie bedeutet dann für die Dichte:

$$\rho_D = \rho_D(x^2 + y^2, z^2) \quad (13.41)$$

Für die Komponenten des Schwerpunkts erhalten wir

$$MR_x = \int dx dy dz \rho_D(x^2 + y^2, z) x = 0 \quad (13.42)$$

$$MR_y = \int dx dy dz \rho_D(x^2 + y^2, z) y = 0 \quad (13.43)$$

$$MR_z = \int dx dy dz \rho_D(x^2 + y^2, z) z = Mz_0, \quad (13.44)$$

denn für die x- und y-Komponente integriert man eine ungerade Funktion über ein symmetrisches Intervall.

Also haben wir gezeigt, dass der Schwerpunkt $\vec{R} = (0, 0, z_0)$ auf der Rotationsachse liegt. Es bleibt die Kreiselsymmetrie zu zeigen.

Das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse lautet

$$\Theta_{xx} = \iiint d^3r \rho_D(x^2 + y^2, z)(y^2 + z^2) \quad (13.45)$$

woraus durch eine Variablenumbenennung von x nach y und y nach x wird

$$\iiint d^3r \rho_D(y^2 + x^2, z)(x^2 + z^2) = \Theta_{yy} \quad (13.46)$$

Es ist also $\Theta_{xx} = \Theta_{yy} := \Theta_1 \Rightarrow$ Symmetrischer Kreisel.

Für die Nichtdiagonalelemente ergibt sich

$$\Theta_{xy} = \iiint d^3r \rho_D(x^2 + y^2, z)(0 - xy) = 0 \quad (13.47)$$

(ungerade Funktion)

Also lautet der Trägheitstensor

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{zz} \end{pmatrix} \quad \square \quad (13.48)$$

13.3.2 Satz von Steiner

Sei Θ der Trägheitstensor eines starren Körpers, berechnet bezüglich des Schwerpunkts im körperfesten System KS. Sei KS' ein zu KS achsenparalleles Koordinatensystem, das um einen Vektor \vec{a} verschoben ist. Dann gilt für den Trägheitstensor bezüglich KS':

$$\Theta'_{ij} = \Theta_{ij} + M(\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \quad (13.49)$$

(M: Gesamtmasse)

Beweis:

$$\Theta'_{ij} = \iiint d^3r' \rho'_D(\vec{r}') (\vec{r}'^2 \delta_{ij} - r'_i r'_j) \quad (13.50)$$

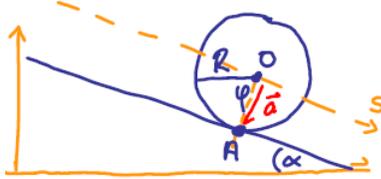
$$= \iiint d^3r \rho_D(\vec{r}) ((\vec{r} + \vec{a})^2 \delta_{ij} - (r_i + a_i)(r_j + a_j)) \quad (13.51)$$

$$= \iiint d^3r \rho_D(\vec{r}) ((\vec{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j) + \underbrace{(2\vec{a} \cdot \vec{r} \delta_{ij} - a_i r_j - r_i a_j)}_{=0, \text{ da } R_i \cdot \text{const}_i = 0} + (\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j))$$

$$\text{(die } R_i \text{ verschwinden, da KS Schwerpunktssystem)} \quad (13.52)$$

$$= \Theta_{ij} + M(\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \quad (13.53)$$

13.3.3 Beispiel 1: rollender Reifen



In ?? Beispiel 1, wurde ein rollender Reifen auf einer schiefen Ebene betrachtet. Für die Aufstellung von T wurde der Punkt O als Ursprung des körperfesten Koordinatensystems gewählt. Die Angabe $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega_i\Theta_{ij}\omega_j = \frac{1}{2}I\omega^2$ bezieht sich dabei auf die Rotation um die Rotationsachse durch O . Da dieser Punkt O sich selbst bewegt, ist zusätzlich ein Term $T_{\text{transl.}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$ erforderlich.

Nun wollen wir den Punkt A als Ursprung des körperfesten Systems wählen. A hat keine momentane Geschwindigkeit (kein Rutschen), deshalb ist $T_{\text{transl.}} = 0$. Die Rotationsenergie muss dann allerdings bezüglich A berechnet werden (Satz von Steiner).

Lagrange-Funktion: $L = T - U = T - Mg(-s)\sin\alpha$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}\omega_i\Theta'_{ij}\omega_j$ (ESK)

Gesamtmasse: $M = \rho_0\pi R^2l$

Winkelgeschwindigkeit: $|\vec{\omega}| = \omega_z = \dot{\varphi} = \frac{\dot{s}}{R}$

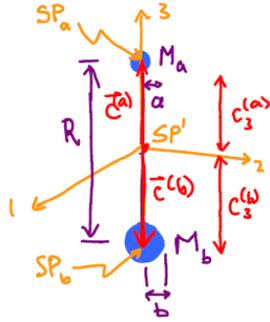
Trägheitsmoment bez. Symmetrieachse: $\Theta_{zz} = \dots = \frac{1}{2}MR^2$

Θ bezüglich A : $\Theta'_{zz} = \Theta_{zz} + M(\bar{a}^2 - a_z^2) = \Theta_{zz} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\Theta'_{zz}\omega_z^2 - U = \frac{3}{4}M\dot{s}^2 + Mgs\sin\alpha$$

ELG: $\frac{3}{2}M\ddot{s}^2 = Mg\sin\alpha \Rightarrow g_{\text{eff}} = \frac{2}{3}g\sin\alpha \quad \checkmark$ (konsistent mit ??)

13.3.4 Beispiel 2: Trägheitstensor einer Hantel mit zwei Massen



Die Hauptträgheitsmomente der beiden Kugeln M_a, M_b bezüglich ihrer Schwerpunkte SP_a, SP_b lauten

$$\Theta_{11}^a = \Theta_{22}^a = \Theta_{33}^a = \frac{2}{5}M_a a^2 \quad (13.54)$$

$$\Theta_{11}^b = \Theta_{22}^b = \Theta_{33}^b = \frac{2}{5}M_b b^2 \quad (13.55)$$

Daraus folgt nach dem Steinerschen Satz für das Gesamtträgheitsmoment bezüglich dem gemeinsamen Schwerpunkt

$$\Theta'_{jm} = \Theta_{jm}^a + M_a(\bar{c}^{(a)2}\delta_{jm} - c_j^a c_m^a) + \Theta_{jm}^b + M_b(\bar{c}^{(b)2}\delta_{jm} - c_j^b c_m^b)$$

wobei für die Abstände zum Schwerpunkt gilt

$$\bar{c}^{(a)} = (0, 0, c_3^{(a)}) \quad , \quad \bar{c}^{(b)} = (0, 0, c_3^{(b)}) \quad (13.56)$$

mit

$$\frac{c_3^{(a)}}{R} = \frac{M_b}{M_a + M_b} \quad , \quad \frac{c_3^{(b)}}{R} = \frac{M_a}{M_a + M_b} \quad (13.57)$$

Also erhalten wir

$$\Theta'_{11} = \Theta'_{22} = \frac{2}{5}M_a a^2 + M_a \left(\frac{M_b R}{M_a + M_b} \right)^2 + \frac{2}{5}M_b b^2 + M_b \left(\frac{M_a R}{M_a + M_b} \right)^2 \quad (13.58)$$

$$\Theta'_{22} = \frac{2}{5}M_a a^2 + \frac{2}{5}M_b b^2 \quad (13.59)$$

Kapitel 14

Die Eulerschen Gleichungen

Die *Eulerschen Gleichungen* (auch *Eulersche Kreiselgleichungen*) sind Bewegungsgleichungen für die Rotation eines starren Körpers. Sie sind Differentialgleichungen *im Hauptachsensystem* mit der Winkelgeschwindigkeit als Variable und den Hauptträgheitsmomenten $\Theta_{11}, \Theta_{22}, \Theta_{33}$ als Koeffizienten.

Sie haben eine vergleichsweise einfache Form, die ermöglicht wird durch eine Transformation aller wichtigen Größen in das körperfeste Hauptachsensystem, wodurch diese selbst in besonders einfacher Form geschrieben werden können.

14.1 Drehimpuls

14.1.1 Zerlegung in Schwerpunktsdrehimpuls und Relativedrehimpuls

Satz

Der Drehimpuls des starren Körpers bezüglich eines beliebigen Punktes kann zerlegt werden in den Drehimpuls des Schwerpunkts bezüglich dieses Punktes und den Relativedrehimpuls des Körpers bezüglich des Schwerpunkts.

$$\vec{L}_{tot} = M\vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s + \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu}^{KS} \times \left(\frac{d\vec{r}_{\nu}^{KS}}{dt} \right)_{IS} \quad (14.1)$$

Beweis:

Für jeden Massenpunkt des starren Körpers können wir schreiben

$$\vec{r}_{\nu} = \vec{r}_s + \vec{r}_{\nu}^{KS} \quad (14.2)$$



Für den Gesamtdrehimpuls erhalten wir

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times \dot{\vec{r}}_{\nu} \quad (14.3)$$

$$= \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{r}_s + \vec{r}_{\nu}^{KS}) \times \left(\dot{\vec{r}}_s + \left(\frac{d\vec{r}_{\nu}^{KS}}{dt} \right)_{IS} \right) \quad (14.4)$$

$$= \sum_{\nu} m_{\nu} \left(\vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s + \vec{r}_s \times \left(\frac{d\vec{r}_{\nu}^{KS}}{dt} \right)_{IS} + \vec{r}_{\nu}^{KS} \times \dot{\vec{r}}_s + \vec{r}_{\nu}^{KS} \times \left(\frac{d\vec{r}_{\nu}^{KS}}{dt} \right)_{IS} \right) \quad (14.5)$$

$$\downarrow \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\vec{r}}_{\nu}^{KS} = M \dot{\vec{r}}_s^{KS} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu}^{KS} = M \vec{r}_s^{KS} = 0$$

$$= M \vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s + 0 + 0 + \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu}^{KS} \times \left(\frac{d\vec{r}_{\nu}^{KS}}{dt} \right)_{IS} \quad (14.6)$$

$$= \vec{L}_s + \vec{L}_{rel} \quad \square \quad (14.7)$$

14.1.2 Drehimpuls im Schwerpunktsystem

Satz

Im Schwerpunktsystem kann man den Drehimpuls schreiben als

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} \quad (14.8)$$

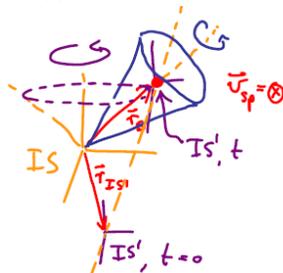
wobei \hat{I} eine Dyade (siehe Anhang ??) darstellt:

$$\hat{I} := \sum_{jm} I_{jm} \hat{e}_j \otimes \hat{e}_m \quad (14.9)$$

(\hat{e}_i : Basis im Schwerpunktsystem, I_{jm} : Trägheitstensor bez. SP)

Beweis:

Wir wählen ein *Inertialsystem* IS', in dem der Schwerpunkt momentan ruht, also ein momentanes Schwerpunktsystem. Da es ein Inertialsystem sein soll, kann es sich nicht mit dem Schwerpunkt auf einer beliebigen (z.B. Kreis-) Bahn bewegen, sondern bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit bezüglich dem raumfesten Inertialsystem IS. Der Ursprung von IS' fällt nur zu einem bestimmten Zeitpunkt mit dem Schwerpunkt zusammen.



Sei $\vec{r}_{IS'}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ der Ortsvektor des Ursprungs von IS' bezüglich IS, sodass zu einem bestimmten Zeitpunkt t gilt: $\vec{r}_{IS'}(t) = \vec{r}_s(t)$, $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_s(t)$.

Zu diesem momentanen Zeitpunkt t gilt für den Drehimpuls aus Sicht von IS'

$$\left(\vec{L}_{tot}\right)_{IS'} \stackrel{(\text{??})}{=} M(\vec{r}_s)_{IS'} \times (\dot{\vec{r}}_s)_{IS'} + \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu}^{KS} \times \left(\frac{d\vec{r}_{\nu}^{KS}}{dt}\right)_{IS'} \quad (14.10)$$

$$= 0 + \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu}^{KS} \times \left(\dot{\vec{r}}_{\nu}^{KS} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}^{KS}\right) \quad (14.11)$$

$$\downarrow \text{ im starren Körper gilt } \dot{\vec{r}}_{\nu}^{KS} = 0 \text{ und mit der Graßmann-Identität folgt} \\ = \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{\omega}(\vec{r}_{\nu}^{KS})^2 - \vec{r}_{\nu}^{KS}(\vec{r}_{\nu}^{KS} \cdot \vec{\omega})) \quad (14.12)$$

$$\downarrow \text{ mit } \vec{\omega} = \sum_j \omega_j \hat{e}_j^{KS} \text{ und } \vec{r}_{\nu}^{KS} = \sum_j r_{\nu,j}^{KS} \hat{e}_j^{KS} \quad (14.13)$$

$$= \sum_{j,m} \hat{e}_j^{KS} \sum_{\nu} m_{\nu} ((\vec{r}_{\nu}^{KS})^2 \omega_j - r_{\nu,j}^{KS} (r_{\nu,m}^{KS} \omega_m)) \quad (14.14)$$

$$= \sum_{j,m} \hat{e}_j^{KS} \underbrace{\sum_{\nu} m_{\nu} ((\vec{r}_{\nu}^{KS})^2 \delta_{jm} - r_{\nu,j}^{KS} r_{\nu,m}^{KS})}_{\Theta_{jm}^{KS}} \omega_m \quad (14.15)$$

$$= \left(\sum_{jm} \Theta_{jm}^{KS} \hat{e}_j^{KS} \otimes \hat{e}_m^{KS}\right) \cdot \vec{\omega} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} \quad \square \quad (14.16)$$

(analog für kontinuierliche Massenverteilung)

Bemerkung

Wenn wir anstatt IS' ein anderes Inertialsystem wählen IS'' , in dem nicht der Schwerpunkt des starren Körpers, sondern ein anderer Punkt, verschoben um \vec{a} zum Schwerpunkt, im System KS' momentan ruht, so sollte der Drehimpuls bezüglich IS'' zerlegt werden können in den Drehimpuls des Schwerpunkts bezüglich IS'' und den Drehimpuls im Schwerpunktsystem:

$$\left(\vec{L}_{tot}\right)_{IS''} = \left(\vec{L}_{tot}\right)_{IS'} + M\vec{a} \times (\vec{\omega} \times \vec{a}) \quad (14.17)$$

Check:

$$\left(\vec{L}_{tot}\right)_{IS''} = \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu}^{KS'} \times \left(\frac{d\vec{r}_{\nu}^{KS'}}{dt}\right)_{IS''} \quad (14.18)$$

$$= \dots = \sum_{jm} \hat{e}_j \underbrace{\sum_{\nu} m_{\nu} ((\vec{r}_{\nu}^{KS'})^2 \delta_{jm} - r_{\nu,j}^{KS'} r_{\nu,m}^{KS'})}_{\Theta_{jm}^{KS'}} \omega_m \quad (14.19)$$

$$\downarrow \text{ Steinerscher Satz:} \quad (14.20)$$

$$= \sum_{jm} \hat{e}_j (\Theta_{jm}^{KS} + M(\vec{a}^2 \delta_{jm} - a_j a_m)) \omega_m \quad \square \quad (14.21)$$

14.2 Drehmoment

Nun müssen wir noch das Drehmoment - verursacht von äußeren Kräften - im körperfesten System ausdrücken.

$$\vec{M} = \left(\frac{d\vec{L}(t)}{dt} \right)_{\text{IS}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_j L_j^{\text{KS}} \hat{e}_j^{\text{KS}} \right) \quad (14.22)$$

$$= \sum_j \frac{dL_j^{\text{KS}}}{dt} \hat{e}_j^{\text{KS}} + L_j^{\text{KS}} \frac{d\hat{e}_j^{\text{KS}}}{dt} \quad (14.23)$$

$$= \sum_j \dot{L}_j^{\text{KS}} \hat{e}_j^{\text{KS}} + \vec{\omega} \times \vec{L}^{\text{KS}} \quad (14.24)$$

$$= \dot{\vec{L}}^{\text{KS}} + \vec{\omega} \times \vec{L}^{\text{KS}} \quad (14.25)$$

14.3 Eulersche Gleichungen

Diese Darstellung des Drehmoments wird als die *Eulerschen Gleichungen* bezeichnet. Wir schreiben im Folgenden:

$$\vec{M}^{\text{KS}} := (M_1, M_2, M_3), \quad \vec{L}^{\text{KS}} = (L_1, L_2, L_3), \quad \vec{\omega}^{\text{KS}} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

Für den Drehimpuls im Hauptachsensystem gilt:

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} = \Theta_{\text{diag}} \cdot \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \Theta_{\text{diag}} \cdot \dot{\vec{\omega}} \quad (14.26)$$

Damit folgt aus (??) ($\vec{M} = \dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$)

$$M_1 = \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 \quad (14.27)$$

$$M_2 = \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 \quad (14.28)$$

$$M_3 = \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 \quad (14.29)$$

Kapitel 15

Kreisel

Beim kräftefreien Kreisel, finden die *Eulerschen Kreiselgleichungen* ihre erste Anwendung ($M_j = 0$). Beim Schweren Kreisel (Kreisel im Gravitationsfeld der Erde) sind diese doch unhandlich, da das Drehmoment im körperfesten System ausgedrückt kompliziert sein kann. Dann werden wir lieber auf die Euler-Lagrange-Gleichungen zurückgreifen.

15.1 Freier Kreisel

15.1.1 Unsymmetrischer freier Kreisel

Satz

1. Für einen unsymmetrischen freien Kreisel ist eine konstante Winkelgeschwindigkeit nur bei Drehung um eine der Hauptträgheitsachsen möglich.
2. Dabei ist nur die Drehung um das größte oder kleinste Hauptträgheitsmoment stabil.

Beweis von 1.:

Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeit in alle Richtungen konstant sind: $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$. Da auf den freien Kreisel keine Kräfte wirken, gibt es auch kein Drehmoment, wodurch die Eulerschen Kreiselgleichungen wie folgt aussehen

$$(I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0 \quad (15.1)$$

$$(I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \quad (15.2)$$

$$(I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = 0 \quad (15.3)$$

Für einen unsymmetrischen Kreisel verschwinden keine der Differenzen $I_m - I_j$ ($\forall m \neq j$), womit zwei ω_j ($j \in \{1, 2, 3\}$) null sein müssen. Um die Achse der übrig gebliebenen Komponente findet also die Drehung statt. \square

Beweis von 2.:

Sei nun $\omega_1 \neq 0$. Wir betrachten nun kleine Störungen in die (2,3)-Richtung (*Stabilitätsanalyse*):

$$\omega_2 = \varepsilon_2(t) \ll \omega_1 \quad (15.4)$$

$$\omega_3 = \varepsilon_3(t) \ll \omega_1 \quad (15.5)$$

Wir betrachten für diese Störungen die Eulerschen Gleichungen, wobei uns nur die linearen Terme der ε_i interessieren:

$$0 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \varepsilon_2 \varepsilon_3 \approx I_1 \dot{\omega}_1 \Rightarrow \omega_1 = \text{const.} \quad (15.6)$$

$$0 = I_2 \dot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \varepsilon_3 \quad (15.7)$$

$$0 = I_3 \dot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \varepsilon_2 \quad (15.8)$$

Die beiden letzten Gleichungen bilden ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen erster Ordnung für ε_2 und ε_3 , welches wir auf zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung umformen können:

$$\frac{d}{dt}(\text{??}) : 0 = I_2 \ddot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \dot{\varepsilon}_3 \stackrel{(\text{??})}{=} \ddot{\varepsilon}_2 + \alpha \varepsilon_2 \quad (15.9)$$

mit $\alpha = \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)\omega_1^2}{I_2 I_3}$ (analog für ε_3 : $\ddot{\varepsilon}_3 + \alpha \varepsilon_3 = 0$).

Fallunterscheidung:

- I_1 ist größtes oder kleinstes Moment: $\alpha > 0 \Rightarrow$ harmon. Schwingung:

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_2(0) \cos(\sqrt{\alpha}t) + \eta_2 \sin(\sqrt{\alpha}t) \quad (15.10)$$

(η_2 ist eine durch $\dot{\varepsilon}_2$ bestimmte, kleine Konstante)

$\Rightarrow \varepsilon_2(t)$ (ebenso $\varepsilon_3(t)$) bleibt klein, wodurch $\omega_1(t)$ näherungsweise konstant bleibt, also ist die Drehung um die Hauptachse mit dem größten oder kleinsten Trägheitsmoment stabil.

- I_2 ist das mittlere Moment: $\alpha < 0 \Rightarrow$ exponentielles Verhalten:

$$\varepsilon_2(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_2(0) \left(e^{\sqrt{|\alpha|}t} + e^{-\sqrt{|\alpha|}t} \right) + \frac{1}{2} \eta_2 \left(e^{\sqrt{|\alpha|}t} - e^{-\sqrt{|\alpha|}t} \right) \quad (15.11)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2(t) = \varepsilon_2(0) \cosh \sqrt{|\alpha|}t + \eta_2 \sinh \sqrt{|\alpha|}t \quad (15.12)$$

$\Rightarrow \omega_1(t)$ ist instabil, da $\varepsilon_2(t)$ mit der Zeit immer größer wird. \square

Beispiel: Saturn-Mond Hyperion

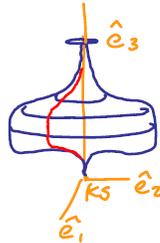
Der Saturn-Mond Hyperion, mit Halbachsen von etwa 190 km, 145 km und 114 km ist sehr unsymmetrisch. Folglich erzeugen die Euler-Gleichungen eine sehr komplizierte (chaotische) Dynamik: Eine hypothetische Messung der momentanen räumlichen Orientierung auf 10 Stellen genau durch „Voyager I“ im November 1980 wäre nicht ausreichend gewesen, um die Groborientierung der Achse beim Vorbeiflug von Voyager II im August 1981 vorherzusagen.

15.1.2 Symmetrischer freier Kreisel**Grundannahmen**

Für einen kräftefreien symmetrischen Kreisel gelten

$$\vec{M} = 0, \quad I_1 = I_2 := I \quad (15.13)$$

Die Symmetrieachse (\hat{e}_2) nennt man *Figurenachse*.

**Bewegungsgleichungen im körperfesten System**

Um Bewegungsgleichungen im körperfesten System zu erhalten, setzen wir diese Annahmen in die Eulerschen Gleichungen ein:

$$0 = I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 \quad (15.14)$$

$$0 = I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\omega_1\omega_3 \quad (15.15)$$

$$0 = I_3\dot{\omega}_3 + (I - I)\omega_1\omega_2 = I_3\dot{\omega}_3 \Rightarrow \omega_3 = \text{const.} \quad (15.16)$$

Die ersten beiden Gleichungen bilden wieder ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\omega}_1 = \Omega\omega_2 \quad (15.17)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\Omega\omega_1 \quad (15.18)$$

(mit $\Omega = \omega_3 \left(1 - \frac{I_3}{I}\right) = \text{const.}$)

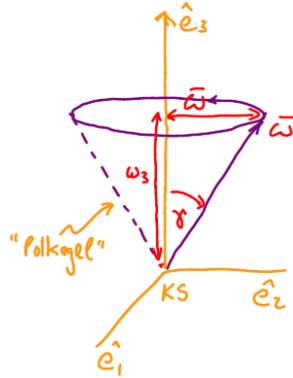
Ableiten von (??) liefert

$$\ddot{\omega}_1 = \Omega\dot{\omega}_2 = -\Omega^2\omega_1 \quad (15.19)$$

Wir haben also die Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung für ω_1 . Mit $\omega_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega}$ sind die Lösungen

$\omega_1(t)$	$=$	$\bar{\omega} \sin(\Omega t + \Psi_0)$	(15.20)
$\omega_2(t)$	$=$	$\bar{\omega} \cos(\Omega t + \Psi_0)$	(15.21)
ω_3	$=$	const.	(15.22)

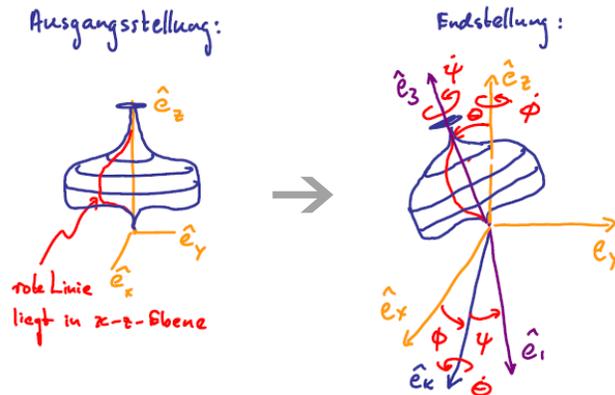
Die Spitze des Vektors $\vec{\omega}$ bewegt sich also auf einer Kreisbahn um die *Figuren-achse* mit konstantem Radius $\bar{\omega}$ in einer Ebene parallel zur x_1 - x_2 -Ebene.



Diese Bewegung von $\vec{\omega}$ nennt man *Präzession*. $\vec{\omega}$ bewegt sich im KS auf dem sogenannten *Polkegel* mit Öffnungswinkel $\gamma = \arctan \frac{\bar{\omega}}{\omega_3}$ und konstantem Betrag.

Bewegung im raumfesten Inertialsystem

Hierzu benötigen wir die in ?? eingeführten *Eulerwinkel*, da diese eine Beziehung zwischen den Basisvektoren des körperfesten mit denen des raumfesten Systems liefern:



Angewandt auf den Kreisel bedeuten die Eulerwinkel

Θ Winkel zwischen Figurenachse \hat{e}_3 und z-Achse (15.23)

$\dot{\Phi}$ Drehung der Figurenachse um z-Achse (15.24)

$\dot{\Psi}$ Rotation des Kreisels um die Figurenachse \hat{e}_3 (15.25)

Das heißt, wir benötigen Bewegungsgleichungen für die drei Eulerwinkel, um die Kreiselbewegung zu beschreiben. Diese gewinnen wir nun aus einer Beziehung zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit.

Der Drehimpuls ist konstant, da $\vec{M} = 0$, also eine feste Bezugsgröße im raumfesten System. Wir wählen deshalb

$$\vec{L} = L\hat{e}_z \quad (= \text{const.}) \quad (15.26)$$

Da im körperfesten Hauptachsensystem KS die angenehme Beziehung $\vec{L} = \Theta_{\text{diag}}\vec{\omega}$ zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit gilt, stellen wir den Drehimpuls im KS $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ unter Verwendung von (??) dar:

$$L_1 = L\hat{e}_z \cdot \hat{e}_1 = L \sin \Theta \sin \Psi \quad (15.27)$$

$$L_2 = L\hat{e}_z \cdot \hat{e}_2 = L \sin \Theta \cos \Psi \quad (15.28)$$

$$L_3 = L\hat{e}_z \cdot \hat{e}_3 = L \cos \Theta \quad (15.29)$$

und vergleichen mit

$$L_1 = I\omega_1 = I\bar{\omega} \sin(\Omega t + \Psi_0) \quad (15.30)$$

$$L_2 = I\omega_2 = I\bar{\omega} \cos(\Omega t + \Psi_0) \quad (15.31)$$

$$L_3 = I_3\omega_3 = \text{const.} \quad (15.32)$$

Aus $\frac{(\text{??})}{(\text{??})} = \frac{(\text{??})}{(\text{??})}$ folgt

$$\Psi(t) = \Omega t + \Psi_0 \quad (15.33)$$

Dies wiederum in (??) oder (??) eingesetzt zusammen mit (??)=(??) liefert

$$\Theta = \text{const} = \arctan \frac{I\bar{\omega}}{I_3\omega_3} \quad (15.34)$$

Es bleibt Φ zu bestimmen. Dazu benutzen wir die allgemeine Darstellung von $\vec{\omega}$ durch die Eulerwinkel (per Definition):

$$\vec{\omega} = \dot{\Phi}\hat{e}_z + \underbrace{\dot{\Theta}\hat{e}_k}_{=0} + \dot{\Psi}\hat{e}_3 \quad (15.35)$$

Da $\vec{\omega}$ für alle Koordinatensysteme gleich sein muss, können wir z.B. die Lösung für ω_1 im körperfesten System mit der Projektion obiger Darstellung in die \hat{e}_1 -Richtung gleichsetzen:

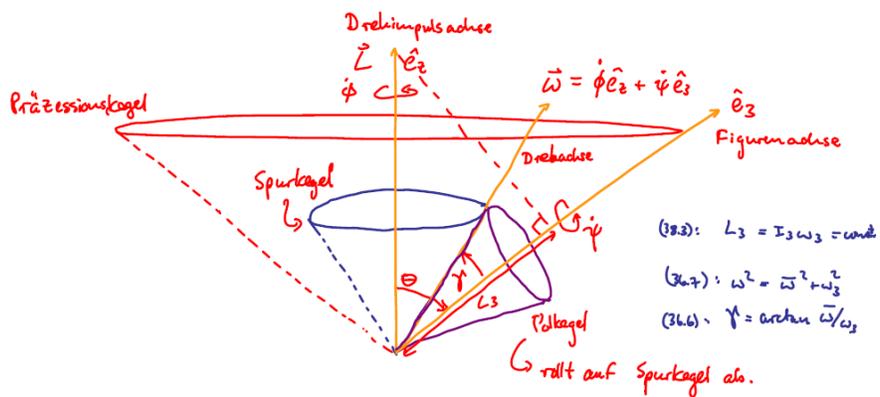
$$\vec{\omega} \cdot \hat{e}_1 = \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi = \omega_1 = \underbrace{\bar{\omega} \sin(\Omega t + \Psi_0)}_{\Psi(t)} \quad (15.36)$$

$$\Rightarrow \dot{\Phi} = \frac{\bar{\omega}}{\sin \Theta} \Rightarrow \Phi(t) = \frac{\bar{\omega}}{\sin \Theta} t + \Phi_0 \quad (15.37)$$

Wir erhalten also insgesamt für die Bewegungsgleichungen der Winkel

Θ	$= \text{const.} = \arctan \frac{I\bar{\omega}}{I_3\omega_3}$	(zw. \hat{e}_z und \hat{e}_3)	(15.38)
$\Psi(t)$	$= \Omega t + \Psi_0$	(Rot. um Figurenachse)	(15.39)
$\Phi(t)$	$= \frac{\bar{\omega}}{\sin \Theta} t + \Phi_0$	(Drehung um \hat{e}_z)	(15.40)

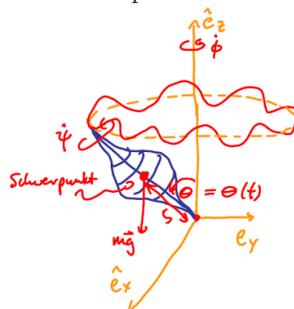
Visualisierung



Der Polkegel rollt auf dem sogenannten Spurkegel ab. Die Figurenachse bewegt sich dabei auf dem Präzessionskegel.

15.2 Schwerer Kreisel

Nun betrachten wir einen symmetrischen *Schweren Kreisel*, also einen Kreisel im Schwerfeld der Erde, für den $\vec{M} \neq 0$ ist. Wie angekündigt greifen wir in diesem Fall lieber auf die Euler-Lagrange-Gleichungen zurück, da das Drehmoment im körperfesten System sehr kompliziert sein kann.



Wir wählen den Unterstützungspunkt (logischerweise) auf der Figurenachse.

Potentielle und kinetische Energie

Wenn s der Abstand vom Schwerpunkt zum Ursprung ist, so erhalten wir

Potentielle Energie: $U = Mgs \cos \Theta$

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_{jm} \omega_j I_{jm} \omega_m = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$

wobei I_{jm} der Trägheitstensor bezüglich des Unterstützungspunktes im Hauptachsensystem ist. Für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System kennen wir bereits einen Ausdruck durch die Eulerwinkel aus (??) bis (??):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Psi + \dot{\Theta} \cos \Psi \\ \omega_2 &= \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Psi - \dot{\Theta} \sin \Psi \\ \omega_3 &= \dot{\Phi} \cos \Theta + \dot{\Psi} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die kinetische Energie als Funktion der Eulerwinkel

$$T = \frac{1}{2} I (\dot{\Theta}^2 + \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\Psi} + \dot{\Phi} \cos \Theta)^2 \tag{15.41}$$

Lagrangefunktion, Erhaltungsgrößen

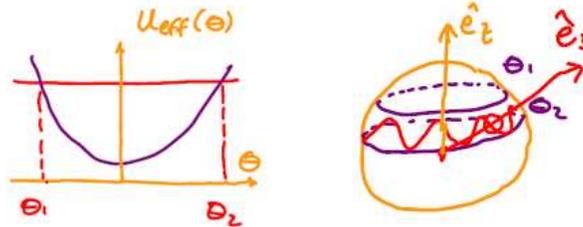
Die Lagrangefunktion

$$L = T - U = L(\Theta, \dot{\Phi}, \dot{\Psi}, \dot{\Theta}) \tag{15.42}$$

ist unabhängig von Φ, Ψ (zyklische Koordinaten) und der Zeit. Nach dem Noether-Theorem gibt es für jede dieser Symmetrien eine Erhaltungsgröße. Mit den Ausdrücken für diese Erhaltungsgrößen, können $\dot{\Phi}$ und $\dot{\Psi}$ eliminiert werden und man erhält schließlich eine eindimensionale Bewegungsgleichung für $\Theta(t)$ im *effektiven Potential*:

$$U_{\text{eff}}(\Theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \Theta)^2}{2I \sin^2 \Theta} + Mgs \cos \Theta - \frac{L_3^2}{2I_3} \tag{15.43}$$

$\Theta(t)$ führt dabei eine periodische Oszillation aus, die als *Nutation* bezeichnet wird.



Teil V

Hamiltonsche Mechanik

Kapitel 16

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

Im folgenden Teil werden wir die Hamiltonsche Formulierung der klassischen Mechanik kennenlernen. Diese Formulierung...

- ...erweitert die Klasse der zulässigen Koordinatentransformationen (was wichtig ist für die Diskussion von Symmetrien);
- ...ist ideal für eine formale Diskussion der mathematischen Struktur der klassischen Mechanik;
- ...verdeutlicht den Bezug der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik.

16.1 Die Hamilton-Funktion

Wir betrachten ein System mit den *kanonischen* (verallgemeinerten) Koordinaten

$$q = (q_1, \dots, q_f), \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad (16.1)$$

und den *kanonisch konjugierten* (bisher: verallgemeinerten) *Impulsen*

$$p = (p_1, \dots, p_f) \quad \text{mit} \quad p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad (16.2)$$

Mit der *Hamilton-Funktion* (engl.: *Hamiltonian*) entsteht ein Formalismus, dessen Variablen nicht (q, \dot{q}) , sondern (q, p) sind. Die Hamilton-Funktion ist definiert als

$$H(q, p, t) := \sum_k p_k \dot{q}_k(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \quad (16.3)$$

wobei p und q unabhängige Variablen sind, d.h. $\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0$ und $\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0$.

Bemerkung

Die Hamilton-Funktion stellt eine *Legendre-Transformation* (siehe ??) von L nach H dar, wodurch \dot{q} durch p als unabhängige Variable ersetzt wird.

16.1.1 Kanonische Systeme

Satz: Einschränkung für die Existenz der Hamiltonfunktion

Die Hamilton-Funktion existiert nur in *kanonischen Systemen*.

Dies sind Systeme, die durch eine Lagrange-Funktion beschrieben werden, für die gilt

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) =: \det M_{ij} \neq 0 \tag{16.4}$$

Beweis:

Um H zu konstruieren muss sich \dot{q}_k eindeutig durch $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q, p, t)$ ausdrücken lassen. Das heißt, $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k(q, \dot{q}, t)$ muss sich nach den \dot{q}_k auflösen lassen, also invertierbar sein. Dies ist nach dem Satz über invertierbare Funktionen genau dann möglich, wenn die Matrix

$$M_{kj} = \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{16.5}$$

invertierbar ist, dafür muss aber gelten

$$\det M_{kj} \neq 0 \quad \square \tag{16.6}$$

Plausibilitätsargument für diesen Satz:

Wir betrachten die Funktion $p_k = f_k(q, \dot{q}, t)$ und führen eine Taylorentwicklung nach dem zweiten Argument durch:

$$p_k = f_k(q, 0, t) + \sum_j \left(\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} \right)_{\dot{q}_j=0} \dot{q}_j + O(\dot{q}^2) \tag{16.7}$$

$$= f_k(q, 0, t) + \sum_j (M_{kj})_{\dot{q}_j=0} \dot{q}_j + O(\dot{q}^2) \tag{16.8}$$

$$\sum_j (M_{kj})_{\dot{q}_j=0} \dot{q}_j = p_k - f_k(q, 0, t) \tag{16.9}$$

Dies ist nach $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q, p)$ aber nur dann lösbar, wenn M_{kj} invertierbar ist.

Satz: hinreichende Bedingung für ein kanonisches System

Wenn die kinetische Energie in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten quadratisch ist und das Potential geschwindigkeitsunabhängig, so ist das System immer kanonisch.

Beweis:

Sei $T = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i T_{ij} \dot{q}_j$, wobei T_{ij} symmetrisch und positiv definit sei. Dann erhalten wir

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = T_{ij} \quad (16.10)$$

Also ist M_{ij} auch symmetrisch und hat keine Eigenwerte die verschwinden, wonach $\det M_{ij} \neq 0$, also das System kanonisch ist.

16.2 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Für ein kanonisches System sind die Euler-Lagrange-Gleichungen äquivalent zu den *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* (HG):

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (16.11)$$

(auch *kanonische Bewegungsgleichungen* genannt)

Bemerkung

Aus f Differentialgleichungen 2. Ordnung (ELG) werden somit $2f$ Differentialgleichungen 1. Ordnung. Folglich hat der Hamiltonformalismus mehr unabhängige Variablen ($2f$ statt f), und erlaubt somit eine größere Klasse von Transformationen (*kanonische Transformationen*).

Beweis 1: ELG \rightarrow HG

Betrachte

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \right) \quad (16.12)$$

$$= \dot{q}_k + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} - \sum_j \underbrace{p_j}_{p_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad (16.13)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) \right) \quad (16.14)$$

$$= \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} \right) \quad (16.15)$$

$$= \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (16.16)$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -\dot{p}_k \quad \square \quad (16.17)$$

Beweis 2: HG → ELG

Gegeben sei die Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$, dann können wir die Impulse mit den Hamilton-Gleichungen ausdrücken durch $p = p(q, \dot{q}, t)$ und die Lagrange-Funktion mit der Hamilton-Funktion definieren

$$L(q, \dot{q}, t) := \sum_j p_j(q, \dot{q}, t) \dot{q}_j - H(q, p(q, \dot{q}, t), t) \quad (16.18)$$

Betrachte

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_j + p_k - \sum_j \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{\dot{q}_k} \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k} = p_k \quad (16.19)$$

was die Definition der kanonischen Impulse reproduziert. Betrachte außerdem

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \dot{q}_j - \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_k}}_{-\dot{p}_k} - \sum_j \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_j}}_{\dot{q}_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (16.20)$$

was die Euler-Lagrange-Gleichungen reproduziert. □

16.2.1 Interpretation der Hamilton-Funktion

Satz

Für ein System mit skleronomen (zeitunabhängigen) Zwangsbedingungen und geschwindigkeitsunabhängigem Potential ist die Hamilton-Funktion gerade die Gesamtenergie des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten und kanonischen Impulse.

Beweis:

Für skleronome Zwangsbedingungen ist die kinetische Energie quadratisch in den Geschwindigkeiten

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i T_{ij} \dot{q}_j \quad (16.21)$$

Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale ergibt sich für die kanonischen Impulse

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j T_{kj} \dot{q}_j \quad (16.22)$$

Dann können wir die Hamilton-Funktion schreiben als

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L = \sum_{kj} \dot{q}_k T_{jk} \dot{q}_j - L = 2T - (T - U) = T + U = E \quad \square$$

Bemerkung

Sind die Potentiale zeitunabhängig, so ist die Hamilton-Funktion eine Erhaltungsgröße (Energieerhaltung):

$$\frac{dH(q, p, t)}{dt} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial t}}_{=0} = \sum_j (-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j) = 0 \quad (16.23)$$

16.2.2 Erhaltungsgrößen

Satz

Falls die Hamilton-Funktion nicht von einer bestimmten verallgemeinerten Koordinate abhängt (zyklische Koordinate), ist der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße.

Beweis: Dies folgt direkt aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Sei q_k eine zyklische Koordinate, so ist

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \quad \Rightarrow \quad p_k = \text{const.} \quad \square \quad (16.24)$$

Kapitel 17

Poisson-Klammer

Die Poisson-Klammer (nach Siméon Denis Poisson) ist ein bilinearer Differentialoperator in der *kanonischen* (hamiltonschen) Mechanik. Seien $F = F(q, p, t)$ und $G = G(q, p, t)$ zwei physikalische Größen, die von den Koordinaten, Impulsen und der Zeit abhängen, so definiert man die *Poisson-Klammer* von F und G als

$$\{F, G\} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} \right) \quad (17.1)$$

17.1 Eigenschaften

Die Poisson-Klammer für beliebige Funktionen (Operatoren) F, G, H hat folgende Eigenschaften

1. *Antisymmetrie:* $\{F, G\} = -\{G, F\}$
2. *Linearität:* $\{c_1 F_1 + c_2 F_2, G\} = c_1 \{F_1, G\} + c_2 \{F_2, G\}$
3. *Faktorzerlegung:* $\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H$
4. *Jacobi-Identität:* $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$

17.2 Anwendung

17.2.1 Fundamentale Poisson-Klammern

Für die hamiltonsche Mechanik wichtig, sind die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad (17.2)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad (17.3)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (17.4)$$

Diese folgen einfach aus den Beziehungen zwischen den unabhängigen dynamischen Größen (=Observablen) p, q :

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} \quad (17.5)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0 \quad (17.6)$$

17.2.2 Zeitabhängigkeit einer Observablen

Satz

Die Zeitabhängigkeit einer beliebigen Observablen $F(q, p, t)$ ist gegeben durch

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}} \quad (17.7)$$

Beweis:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (17.8)$$

$$= \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (17.9)$$

$$= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (17.10)$$

17.2.3 Erhaltungsgrößen (*Konstanten der Bewegung*)

Poissonklammer mit H verschwindet

Eine nicht explizit zeitabhängige Größe ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn die Poissonklammer mit H verschwindet.

Denn dann gilt

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 + 0 \Rightarrow F = \text{const.} \quad (17.11)$$

Poisson-Klammer von Erhaltungsgrößen

Die Poisson-Klammer zweier (nicht explizit zeitabhängiger) Erhaltungsgrößen ist selbst eine (nicht explizit zeitabhängige) Erhaltungsgröße.

Beweis:

Seien F_1, F_2 zwei Erhaltungsgrößen mit $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$. Wir müssen nur zeigen, dass die Poisson-Klammer der Poisson-Klammer von F_1 und F_2 mit H verschwindet, denn die nicht explizite Zeitabhängigkeit ist sofort klar, da aus zwei nicht zeitabhängigen Größen allein unmöglich etwas zeitabhängiges entstehen kann.

$$\{\{F_1, F_2\}, H\} = -\underbrace{\{\{H, F_1\}, F_2\}}_{=0} - \underbrace{\{\{F_2, H\}, F_1\}}_{=0} = 0 \quad \square \quad (17.12)$$

17.3 Bemerkungen

- Gleichung (??) enthält u.a. die *Hamiltonschen Bewegungsgleichungen* als Spezialfall:

Möchte man die Zeitabhängigkeit von q_i bestimmen, so erhält man

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} + \frac{\partial q_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + 0 = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

ebenso für p_i :

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} + \frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + 0 = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

- Mittels der Eigenschaften der Poisson-Klammer, lässt sich jede Rechnung auf die *fundamentalen Poissonklammern* reduzieren.
- *Quantenmechanik:*

Die Quantenmechanik ist eine andere Realisierung einer Theorie mit

- den Eigenschaften der fundamentalen Poisson-Klammern
- den Eigenschaften der Poisson-Klammer als Rechenregeln
- Gleichung (??) als Bewegungsgleichung.

Denn Heisenberg lieferte eine Matrix-Formulierung der Quantenmechanik, in der physikalische Größen durch unendlich-dimensionale Matrizen dargestellt werden. Die Poissonklammer wird dabei ersetzt durch einen sog. Kommutator: $\{F, G\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}]$, der dieselben Eigenschaften erfüllt wie die Poisson-Klammer. Auch die Eigenschaften der fundamentalen Poisson-Klammern bleiben erhalten. Die Bewegungsgleichung (??) wird zu *Heisenbergs Bewegungsgleichung für Operatoren*, die äquivalent ist zur Schrödingergleichung der Wellenformulierung der Quantenmechanik.

- Die Erhaltungsgrößen bilden bezüglich der Poisson-Klammer eine abgeschlossene *Algebra*. (Def. Algebra: Die Menge von Elementen mit einer Kompositionsregel, laut der die Komposition zweier Elemente dieser Menge wieder ein Element der Menge ist.)

Die Poisson-Klammer-Algebra hat in der Regel nur eine endliche Anzahl von Elementen, da die Poisson-Klammer zweier Erhaltungsgrößen eine Linearkombination von schon bekannten Erhaltungsgrößen produzieren, oder einfach eine Zahl sein kann.

Beispiel: Drehimpuls-Algebra

Wir betrachten f Punktmassen, miteinander wechselwirkend durch ein zentralsymmetrisches Potential

$$H = T + V, \quad T = \sum_{j=1}^f \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{r}}_j^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} g(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (17.13)$$

wobei $g(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ eine Funktion ist, die nur von den Abständen der Punktmassen untereinander abhängt. Für ein solches System ist nach Abschnitt ?? der Drehimpuls erhalten. Wenn wir die Poisson-Klammern von jeweils zwei Komponenten des Drehimpulses bilden, müssen wir wieder eine Erhaltungsgröße erhalten:

$$\left. \begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= \dots = L_z \\ \{L_y, L_z\} &= \dots = L_x \\ \{L_z, L_x\} &= \dots = L_y \end{aligned} \right\} \{L_a, L_b\} = \sum_{a,b,c} L_c \varepsilon_{a,b,c} \quad (17.14)$$

Das heißt, die drei Komponenten des Drehimpulses bilden eine geschlossene Algebra (mit drei Elementen). Also liefern die Poisson-Klammern in diesem Fall keine neuen Erhaltungsgrößen, in anderen Fällen könnte das aber durchaus passieren.

(Ein weiteres Beispiel ist im Skript von Prof. v. Delft auf Seite [H19] und [H20] zu finden.)

Kapitel 18

Phasenraum und Liouvillescher Satz

18.1 Phasenraum

Ein *Phasenraum* in der Mechanik ist ein $2f$ -dimensionaler (f : Freiheitsgrade) Raum (\mathbb{R}^{2f}) der kanonischen Koordinaten und kanonisch konjugierten Impulse. Jede Kombination der einzelnen Werte dieser Variablen entspricht dann einem Punkt im Phasenraum und wird auch *Zustand* genannt. Trajektorien im Phasenraum (PR) sind meist die Lösungen von Differentialgleichungen, d.h. Kenntnis über die Trajektorien im Phasenraum bedeutet Kenntnis der Dynamik.

Beispiel: harmonischer Oszillator

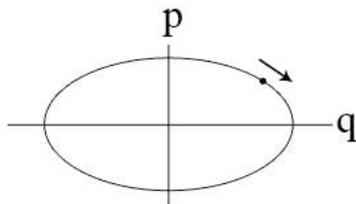
Die Hamilton-Funktion eines harmonischen Oszillators mit einem Freiheitsgrad lautet

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (18.1)$$

mit den Hamilton-Gleichungen erhalten wir

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q \quad (18.2)$$

Der Phasenraum lässt sich dann daraus konstruieren zu



18.2 Liouvillescher Satz

Für ein kanonisches System ist der Fluss im Phasenraum volumenerhaltend (divergenzfrei):

$$\boxed{\frac{d}{dt} \text{Vol } \Omega_t = 0 \quad (18.3)}$$



Beweis:

Sei $x = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$ ein Zustand im $2f$ -dimensionalen Phasenraum PR. Zur Zeit t sei ein Volumen in PR gegeben:

$$\text{Vol } \Omega_t = \int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_{2f} \quad (18.4)$$

Dessen Zeitentwicklung wird beschrieben durch die Zeitentwicklung der PR-Koordinaten $x_i(t)$. Wir betrachten die Entwicklung des Systems in einem infinitesimalen Zeitintervall

$$x'_i = x_i(t + \tau) = x_i(t) + \tau \dot{x}_i(x) \quad (18.5)$$

mit dem neuen Volumen:

$$\text{Vol } \Omega_{t+\tau} = \int_{\Omega_{t+\tau}} dx'_1 \dots dx'_{2f} = \int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_{2f} \det J(x) \quad (18.6)$$

mit der Jacobi-Matrix (siehe ??)

$$J_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i + \tau \dot{x}_i(x)) = \delta_{ij} + \tau \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \quad (18.7)$$

Da bei der Bildung der Determinante von J alle Terme, die von Produkten mit Nichtdiagonalelementen stammen die zweite oder höhere Ordnung in τ besitzen, und wir diese vernachlässigen möchten, interessiert uns nur das Produkt der Diagonalelemente von J :

$$\det J = \prod_{i=1}^{2f} \left(1 + \tau \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} \right) + O(\tau^2) \quad (18.8)$$

$$\downarrow \quad \text{da } (1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + ab + bc + ac + abc + \dots$$

$$= 1 + \tau \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + O(\tau^2) \quad (18.9)$$

$$\downarrow \quad \text{da } x = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$$

$$= 1 + \tau \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) + O(\tau^2) \quad (18.10)$$

$$= 1 + \tau \underbrace{\left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)}_{=0} + O(\tau^2) \tag{18.11}$$

$$= 1 + O(\tau^2) \tag{18.12}$$

Daraus ergibt sich für das Volumenelement nach der Zeit τ :

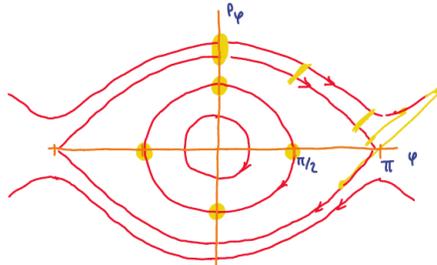
$$\text{Vol } \Omega_{t+\tau} = \int_{\Omega_t} dx_1 \dots dx_n + O(\tau^2) = \text{Vol } \Omega_t + O(\tau^2) \tag{18.13}$$

Dann erhalten wir für die zeitliche Änderung des Volumens Ω_t :

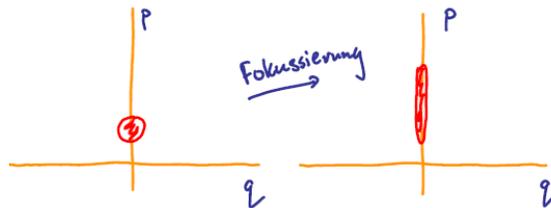
$$\frac{d}{dt} \text{Vol } \Omega_t = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\text{Vol } \Omega_{t+\tau} - \text{Vol } \Omega_t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} O(\tau^2) = 0 \quad \square \tag{18.14}$$

18.3 Bemerkungen

- In der Regel wird ein Gebiet im Phasenraum im Laufe der Zeit stark deformiert. (z.B.: mathematisches Pendel)



- In Teilchenbeschleunigern fokussiert man einen Teilchenstrahl bez. des Ortes, das heißt aber nach dem Liouvilleschen Satz, dass dazu eine breitere Impulsverteilung nötig ist, denn die Fläche im Phasendiagramm muss erhalten bleiben:



- **Einschränkungen der Dynamik im Phasenraum:**

- Trajektorien kreuzen sich nicht.
- Erhaltungsgrößen schränken Trajektorien ein.
- Volumenerhaltung nach dem Liouvilleschen Satz.

Kapitel 19

Kanonische Transformationen

Wenn wir die Hamiltonsche Formulierung in der Praxis anwenden, vermindert sie in den meisten Fällen die Schwierigkeiten bei der Lösung einer mechanischen Aufgabenstellung nicht wesentlich. Wir müssen uns praktisch mit denselben zu lösenden Differentialgleichungen befassen, die auch die Lagrange-Methode liefert. Die Tatsache, dass Koordinaten und Impulse gleichberechtigt als unabhängige Variablen angesehen werden, gibt uns allerdings eine größere Freiheit bei der Auswahl der physikalischen Größen. Dennoch liegt der Vorteil der Hamiltonschen Formulierung nicht in ihrer Verwendung als Werkzeug, sondern in den tieferen Einsichten, die sie in die formale Struktur der Mechanik gewährt. So werden wir auf modernere, abstraktere Wege zur Darstellung des physikalischen Gehalts der Mechanik geleitet.

Die eine oder andere Formulierung der klassischen Mechanik dient als Ausgangspunkt sowohl für die statistische Mechanik als auch für die Quantentheorie. Deshalb werden wir unter anderem solche Formulierungen, die auf natürliche Weise aus dem Hamiltonschen Verfahren hervorgehen näher betrachten.

Im Folgenden werden wir Transformationen kennenlernen, die aufgrund geeigneter Koordinatenwahl zu einer sehr einfachen Beschreibung des jeweiligen kanonischen Systems führen werden. Wir wissen bereits, dass die Anzahl zyklischer Koordinaten von der Wahl der verallgemeinerten Koordinaten abhängt. Da die offensichtlich naheliegenden Koordinaten häufig nicht zyklisch sind, suchen wir zunächst ein Verfahren zur Transformation von einem Satz von Variablen auf einen anderen, geeigneteren.

Punkttransformationen

Als wir bisher kleine Störungen in Koordinaten (um die Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung herzuleiten und um Symmetrien aufzuspüren), orthogonale Transformationen oder den Übergang von kartesischen zu Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten betrachtet haben, sind wir mithilfe von *Punkttransformationen im Konfigurationsraum*

$$Q_i = Q_i(q, t) \quad (19.1)$$

von einem Satz von Koordinaten q_i auf einen neuen Satz Q_i übergegangen. Dabei wurden stets die Geschwindigkeiten mittransformiert. In der Hamiltonschen Formulierung, sind aber die Impulse genau wie die verallgemeinerten Ortskoordinaten unabhängige Variablen. Deshalb müssen wir den Begriff der Koordinatentransformation erweitern auf Transformation der q_i und p_i auf einen neuen Satz Q_i, P_i :

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \quad (19.2)$$

$$P_i = P_i(q, p, t) \quad (19.3)$$

Diese Transformation beschreibt eine *Punkttransformation im Phasenraum*.

19.1 Hamilton-Gleichungen und das modifizierte Hamiltonsche Prinzip

Diese Transformation muss - damit sie für unsere Zwecke interessant ist - allerdings kanonisch sein, das heißt die Q, P müssen kanonische Koordinaten sein, was wiederum bedeutet, dass eine transformierte Hamilton-Funktion $K(Q, P, t)$ existieren muss, sodass die Bewegungsgleichungen

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (19.4)$$

erfüllt sind.

Modifiziertes Hamilton-Prinzip

Für Variationen im Phasenraum (kanonische Transformationen) gilt äquivalent zu den Variationen im Konfigurationsraum das Hamilton-Prinzip, das eine Bedingung für die dynamische Entwicklung des Systems angibt.

Die Wirkung:

$$S[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) \quad (19.5)$$

ist bei vorgegebenen Randbedingungen

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (19.6)$$

$$\delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0 \quad (19.7)$$

stationär:

$$\delta S = 0 \quad (19.8)$$

Satz

Das modifizierte Hamiltonsche Variationsprinzip ist äquivalent zu den Hamilton-Gleichungen.

Beweis:

Auf obiges Variatonsprinzip können wir die Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung anwenden, mit der Funktion

$$G(q, p, \dot{q}, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \tag{19.9}$$

und erhalten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \Leftrightarrow \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{19.10}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{p}_i} = \frac{\partial G}{\partial p_i} \Leftrightarrow \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \square \tag{19.11}$$

Bemerkung

Eigentlich ist die zweite Randbedingung (??) nicht für die Herleitung des Satzes nötig, da G nicht explizit von \dot{p} abhängt. Das heißt das modifizierte Hamilton-Prinzip gilt unter denselben Voraussetzungen wie das ursprüngliche Hamilton-Prinzip für $L(q, \dot{q}, t)$. Der Grund für die Einschränkung wird sich weiter unten erklären.

19.2 Erzeugende

Wenn wir nun die ursprünglichen q_i und p_i über eine kanonische Transformation in die Q_i, P_i transformieren, muss dieses erweiterte Hamilton-Prinzip für beide Koordinatensätze gelten, das heißt

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) dt \tag{19.12}$$

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) dt \tag{19.13}$$

jeweils mit den Randbedingungen (??) und (??). Damit beides erfüllt ist, muss gelten

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \tag{19.14}$$

Denn der Zusatzterm $F(q, p, Q, P, t)$ verschwindet bei Variation unter dem Integral:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} F(q + \delta q, p + \delta p, Q + \delta Q, P + \delta P, t) = \tag{19.15}$$

$$= F(q + \delta q, p + \delta p, Q + \delta Q, P + \delta P, t) \Big|_{t_1}^{t_2} \stackrel{(\text{??}), (\text{??})}{=} 0 \tag{19.16}$$

Die Funktion F nennt man *Erzeugende*. Da nur zwei der vier Variablen q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von Erzeugenden:

$$F = F_1(q, Q, t) \quad (19.17)$$

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_i Q_i P_i \quad (19.18)$$

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_i q_i p_i \quad (19.19)$$

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_i q_i p_i - Q_i P_i \quad (19.20)$$

Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die andere.

19.2.1 Klasse F_1

Die Form von F_1 bestimmt die Transformation wie folgt (mit ESK)

$$p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) \quad (19.21)$$

$$p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (19.22)$$

Dies ist erfüllt, wenn folgende Identitäten gelten

$$p_i(q, Q, t) = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i} \quad (19.23)$$

$$P_i(q, Q, t) = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i} \quad (19.24)$$

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t} \quad (19.25)$$

aus $p_i(q, Q, t)$ und $P_i(q, Q, t)$ kann dann durch Invertierung $q(Q, P, t)$ und $p(Q, P, t)$ gewonnen werden, womit die transformierte Hamiltonfunktion K tatsächlich nur noch von Q, P, t abhängt.

Beispiel: Harmonischer Oszillator

$$\text{Hamilton-Funktion: } H(q, p, t) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\text{Ansatz für } F_1: F_1(q, Q) = \frac{1}{2} m \omega q^2 \cot Q$$

$$\text{aus (??): } p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m \omega q \cot Q$$

$$\text{aus (??): } P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{\frac{1}{2} m \omega q^2}{\sin^2 Q}$$

aufgelöst nach $q(Q, P, t)$ und $p(Q, P, t)$:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q$$

$$\text{transf. HF: } K(Q, P, t) = \dots = \omega P \quad (Q \text{ zyklisch!})$$

Hamilton-Gleichungen: $\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$, $\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega$

$$\Rightarrow P = \text{const.} = C \quad , \quad Q(t) = \omega t + \alpha$$

eingesetzt in q, p : $q(t) = \sqrt{\frac{2C}{m\omega}} \sin(\omega t + \alpha)$
 $p(t) = \sqrt{2m\omega C} \cos(\omega t + \alpha) \sqrt{\quad}$

19.2.2 Die übrigen Klassen

Analog können wir die Beziehungen zwischen den übrigen Klassen von Erzeugenden und den daraus entstehenden Transformationen gewinnen, indem wir jeweils die entsprechenden Koeffizienten in der Bedingung für die kanonischen Transformationen (??) vergleichen. Wenn wir diese ein wenig umschreiben, können wir die jeweiligen Erzeugenden gut ablesen:

$$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} = K(Q, P, t) - H(q, p, t) - \frac{\partial F}{\partial t} \quad (19.26)$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn beide Seiten verschwinden, wobei die rechte Seite für alle Klassen von Erzeugenden gilt. Die Gleichungen für die Transformationen, die hieraus entstehen sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Erzeugende	Koeffizientenvergleich
$F = F_1(q, Q, t)$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k$ $\Rightarrow p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} , P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$
$F = F_2(q, P, t) - Q_k P_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \dot{P}_k - \dot{Q}_k P_k - Q_k \dot{P}_k$ $\Rightarrow p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} , Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$
$F = F_3(p, Q, t) + q_k p_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_3}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \dot{q}_k p_k + q_k \dot{p}_k$ $\Rightarrow q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k} , P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}$
$F = F_4(p, P, t) + q_k p_k - Q_k P_k$	$-p_k \dot{q}_k + P_k \dot{Q}_k + \frac{\partial F_4}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F_4}{\partial P_k} \dot{P}_k + \dot{q}_k p_k + q_k \dot{p}_k - \dot{Q}_k P_k - Q_k \dot{P}_k$ $\Rightarrow q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k} , Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}$

Beispiel

Wählen wir eine Erzeugende der Klasse F_2 der Form

$$F_2(q, P, t) = \sum_{j=1}^f f_j(q, t) P_j \quad (19.27)$$

so erhalten wir laut den Transformationsgleichungen für die Impulse p_k und die Koordinaten Q_k

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial f_j}{\partial q_k} P_j, \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = f_k(q, t) \quad (19.28)$$

Die erzeugte Transformation für die Koordinaten Q_k umfasst alle bekannten Koordinatentransformationen (sog. *Punkttransformationen*) der Lagrangeschen Mechanik. Wählen wir die Funktion $f_j(q, t) = q_j$, dann erhalten wir wie man leicht sieht die identische Transformation ($p_k = P_k, Q_k = q_k$).

19.3 Satz über kanonische Transformationen

Eine gegebene Transformation

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t) \quad (19.29)$$

ist genau dann kanonisch, wenn folgende Poisson-Klammer-Relationen erfüllt sind:

$$\boxed{\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}, \quad \{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0} \quad (19.30)$$

Dies sind genau die Beziehungen, die wir in Abschnitt ?? den *fundamentalen Poisson-Klammern* zugeordnet haben.

Kapitel 20

Hamilton-Jacobi-Theorie

Die kanonischen Transformationen können dazu verwendet werden, ein allgemeines Verfahren zur Lösung mechanischer Problemstellungen zu finden. Ein mögliches Verfahren besteht darin, dass wir eine kanonische Transformation von den Koordinaten q und den Impulsen p auf einen Satz konstanter Größen suchen, beispielsweise die $2f$ Anfangswerte q_0, p_0 . In diesem Fall sind dann die Transformationsgleichungen, die die alten und neuen Variablen verknüpfen genau die gesuchten Lösungen der mechanischen Fragestellung:

$$q = q(q_0, p_0, t), \quad (20.1)$$

$$p = p(q_0, p_0, t). \quad (20.2)$$

20.1 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wenn die neuen Variablen zeitlich konstant sein sollen, müssen wir einfach fordern, dass die transformierte Hamilton-Funktion K verschwindet, denn die Hamilton-Gleichungen liefern dann

$$\frac{\partial K}{\partial Q_k} = -\dot{P}_k = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial P_k} = \dot{Q}_k = 0 \quad (20.3)$$

Wir haben bereits gesehen, dass die transformierte Hamilton-Funktion mit der Erzeugenden F über folgende Relation (aus der Bedingung für kanonische Transformationen) verknüpft ist

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (20.4)$$

Die neue Hamilton-Funktion verschwindet also, wenn F die Gleichung

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (20.5)$$

erfüllt. Wir wollen für diesen Fall eine Erzeugende als Funktion der alten Koordinaten q_i und der neuen konstanten Impulse P_i wählen, also vom Typ $F_2(q, P, t)$.

Damit in Gleichung (??) keine alten Impulse p_k vorkommen, ersetzen wir diese mithilfe der Transformationsgleichungen der Klasse F_2 ($p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$), sodass wir die sog. *Hamilton-Jacobi-Gleichung* (HJG) erhalten

$$\boxed{H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0} \quad (20.6)$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für F_2 mit $(f+1)$ Variablen q_1, \dots, q_f, t , welche als Lösung die Form von F_2 angibt, mit $\alpha_1, \dots, \alpha_{f+1}$ als Integrationskonstanten:

$$F = F_2(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_{f+1}, t) \quad (20.7)$$

In Wirklichkeit kann eine der Integrationskonstanten vernachlässigt werden, da F_2 nur bis auf eine additive Konstante durch obige Differentialgleichung festgelegt wird, da nur partielle Ableitungen nach q und t vorkommen. Das heißt, $F_2 + \alpha$ muss auch eine Lösung sein, und eine der α_i muss diese additive Konstante sein. Somit können wir die Lösung angeben als

$$F_2(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f, t) \quad (20.8)$$

wobei keine der α_i nur als additive Konstante vorkommt. Diese Form entspricht genau der Form einer Erzeugenden vom Typ F_2 , wobei wir die α_i als die neuen Impulse P_i wählen können, die ja per Konstruktion konstant sein sollen. Wir erhalten also (nach den Regeln für die Klasse F_2) die Transformationsgleichungen:

$$\boxed{P_k := \alpha_k, \quad Q_k = \frac{\partial F_2(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_k} = \text{const} := \beta_k} \quad (20.9)$$

Durch Invertierung erhalten wir die gesuchten Bewegungsgleichungen für die Ortskoordinaten

$$\boxed{q_k = q_k(\alpha, \beta, t)} \quad (20.10)$$

und mit der anderen Hälfte der Transformationsgleichungen für Erzeugende vom Typ F_2 bekommen wir auch Funktionen für die Impulse

$$\boxed{p_k = \frac{\partial F_2(q, \alpha, t)}{\partial q_k} = p_k(\alpha, \beta, t),} \quad (20.11)$$

die nun nur noch von Konstanten und der Zeit abhängen, das heißt, wir haben eine Methode gefunden, die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen systematisch zu lösen, bzw. das Problem darauf verlagert, die Hamilton-Jacobi-Gleichung zu lösen, eine partielle Differentialgleichung.

20.1.1 Physikalische Interpretation der Erzeugenden

Die Lösung $F_2(q, \alpha, t)$ der Hamilton-Jacobi-Gleichung ist gerade die Wirkung entlang der physikalischen Trajektorie.

Beweis:

Da die Wirkung das Zeitintegral der Lagrangefunktion entlang der Trajektorie darstellt, müssen wir zeigen, dass die Zeitableitung der Erzeugenden die Lagrangefunktion liefert:

$$\frac{d}{dt}F_2(q, \alpha, t) = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \dot{q}_k \stackrel{(\text{HJG}), (??)}{=} -H + \sum_k p_k \dot{q}_k = L$$

Integriert ergibt sich

$$F_2(q, \alpha, t) = \int_{t_0}^t dt' L(q, \dot{q}, t') + \underbrace{F_2(q_0, \alpha, t_0)}_{:=0} = S \quad \square \quad (20.12)$$

Die Wirkung lässt sich also als Erzeugende für gerade die kanonische Transformation interpretieren, die die Hamilton-Funktion verschwinden lässt. Deshalb schreiben ab jetzt für obige Erzeugende \tilde{S} .

20.1.2 Zeitunabhängige Hamilton-Funktion

Satz

Wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, dann muss die Erzeugende \tilde{S} der Form sein

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = -Et + W(q, \alpha_1 = E, \dots, \alpha_f) \quad (20.13)$$

Wir erhalten dann die *verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung* dann zu

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = E \quad (20.14)$$

$W(q, \alpha)$ nennt man dann die *verkürzte Wirkung* oder *charakteristische Hamilton-Funktion*.

Beweis:

Wenn die Hamiltonfunktion nicht von der Zeit abhängt, dann kann sie als Energie interpretiert werden.

$$H(q, p) := E = \text{const} \quad (20.15)$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung liefert dann

$$H(q, p) = E = -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} \Rightarrow \tilde{S}(q, \alpha, t) = -Et + W \quad (20.16)$$

W sei einfach eine Funktion, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Sie muss allerdings von den Koordinaten q_k und den Konstanten α_k abhängen, von denen eine gleich der Energie E gesetzt wird:

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = -Et + W(q, E, \alpha_2, \dots, \alpha_f) \quad (20.17)$$

Die Impulse p_k in der Hamilton-Funktion sind nun aus der *verkürzten Wirkung* zu berechnen, denn $p_k = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k} = \frac{\partial W}{\partial q_k}$. □

20.1.3 Beispiel: harmonischer Oszillator

Hamilton-Funktion: $H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 := E$

Erzeugende: $\tilde{S}(q, \alpha = E, t) = -Et + W(q, E)$

Verkürzte HJG: $E = H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

Wir müssen also folgende Differentialgleichung für W lösen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} W(q, E) &= \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}, \\ \Rightarrow W(q, E) - \underbrace{W(q_0, E)}_{:=0} &= \int_{q_0}^q dq' \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2} \end{aligned}$$

Nun können wir die Bewegungsgleichungen aus den Transformationsgleichungen berechnen:

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2} \quad (20.18)$$

$$Q = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial E}(-Et + W(q, E)) = -t + \frac{\partial W}{\partial E} \quad (20.19)$$

$$= -t + \int_{q_0}^q dq' \frac{m}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2}} \quad (20.20)$$

$$= -t + \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{m\omega q}{\sqrt{2mE}}\right) = \text{const} := \beta \quad (20.21)$$

Zur Ausführung der etwas unschönen Integration kann in Integraltabellen nachgeschlagen werden. Die gesuchten Bewegungsgleichungen für q, p erhalten wir nun durch Invertierung:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega(t + \beta)) \quad (20.22)$$

$$p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega(t + \beta)) \quad (20.23)$$

Die Anfangsbedingungen legen $\alpha = E$ und β fest.

20.2 Separation der Variablen in der HJG

Da wir mit der Hamilton-Jacobi-Theorie von $2f$ gewöhnlichen Differentialgleichungen auf die Hamilton-Jacobi-Gleichung transformieren, die eine partielle Differentialgleichung mit $f + 1$ unabhängigen Variablen darstellt, könnten wir den Eindruck bekommen, dass wir damit für die Praxis nicht viel gewonnen hätten. Unter gewissen Bedingungen ist es jedoch möglich, die Variablen in der Hamilton-Jacobi-Gleichung zu separieren, wie wir dies bereits im Falle einer zeitunabhängigen Hamilton-Funktion getan haben. Dort haben wir die Erzeugende/Wirkung \tilde{S} in zwei Beiträge zerlegt:

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = -\alpha_1 t + W(q, \alpha_1, \dots, \alpha_f) \quad (20.24)$$

Wenn die Hamilton-Funktion zusätzlich zyklisch in einer Koordinate q_f ist, also wenn sie nicht von dieser abhängt

$$\frac{\partial H}{\partial q_f} = 0 \quad (= -\dot{p}_k) \quad (20.25)$$

(d.h. wenn der zu q_f konjugierte kanonische Impuls p_k erhalten ist), dann kann die charakteristische Hamiltonfunktion $W(q, \alpha)$ auch in zwei Beiträge separiert werden (linear in q_f und unabhängig von q_f):

$$\boxed{W(q, \alpha) = \alpha_f q_f + W'(q_1, \dots, q_{f-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_f)} \quad (20.26)$$

Denn dann reproduziert die Transformationsgleichung $p_k = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}$ die Impulserhaltung:

$$p_f = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_f} = \alpha_f = \text{const.} \quad (20.27)$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$\boxed{H\left(q_1, \dots, q_{f-1}, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_{f-1}}, \alpha_f\right) = \alpha_1} \quad (20.28)$$

20.2.1 Beispiel: Zentralkraft-Problem

Wir wählen Polarkoordinaten in der Bahnebene (mit dem Vorwissen, dass sich die Bewegung in einer Ebene abspielt): $\vec{r} = (\rho, \varphi)$.

Zunächst berechnen wir die Hamilton-Funktion:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2), \quad V = V(\rho)$$

$$\text{kanonische Impulse: } p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow H(q, p) = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k - L = \dots = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right) + V(\rho)$$

Wir sehen sofort, dass φ zyklisch ist.

Wir können also die charakteristische Hamilton-Funktion (verkürzte Wirkung für die zeitunabhängige Hamilton-Funktion) zerlegen:

$$W(\rho, \varphi, \alpha_1 = E, \alpha_\varphi) = \alpha_\varphi \varphi + W'(\rho, \alpha_1, \alpha_\varphi) \quad (20.29)$$

Hamilton-Jacobi-Gleichung für W' :

$$H\left(\rho, \frac{\partial W'}{\partial \rho}, \alpha_\varphi\right) = \alpha_1 \quad (20.30)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho^2} \right) + V(\rho) = \alpha_1 \quad (20.31)$$

$$\frac{\partial W'}{\partial \rho} = \pm \sqrt{2m(\alpha_1 - V(\rho)) - \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho^2}} \quad (20.32)$$

$$\Rightarrow W' = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \sqrt{2m(\alpha_1 - V(\rho')) - \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho'^2}} \quad (20.33)$$

Die volle Erzeugende ergibt sich zu

$$\tilde{S} = -\alpha_1 t + \alpha_\varphi \varphi + W' \quad (20.34)$$

Die neuen Impulse:

$$P_\rho = \alpha_1, \quad P_\varphi = \alpha_\varphi$$

Die transformierte Konstante für ρ :

$$Q_\rho = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_1} = -t + \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \frac{\pm m}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V(\rho')) - \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho'^2}}} = \text{const} := \beta_1$$

Diese Relation liefert invertiert den Radius $\rho = \rho(t)$.

Die neue Ortskoordinate für φ :

$$Q_\varphi = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi + \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \frac{\pm \alpha_\varphi / \rho'^2}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V(\rho')) - \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho'^2}}} \quad (20.35)$$

Dies gibt den Winkel φ als Funktion des Radius ρ an, also die Bahnkurve.

20.3 Winkel-Wirkungs-Variablen

Die folgende Methode liefert für Systeme, deren Bewegung periodisch verläuft, eine Weg die Frequenzen der Schwingungen direkt zu bestimmen (ohne erst die Bewegungsgleichungen berechnen zu müssen).

Wir wollen uns im Folgenden auf Winkel-Wirkungs-Variablen (WWV) mit einem Freiheitsgrad beschränken.

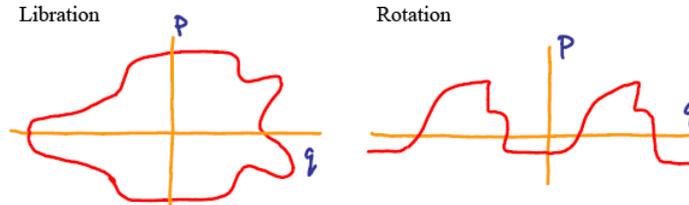
20.3.1 Zwei Arten von periodischer Bewegung

Def.: Libration

Bei einer Libration ist die Bahn im Phasenraum geschlossen, d.h. q und p sind beide periodische Funktionen der Zeit mit der gleichen Frequenz (z.B. harm. Oszillator).

Def.: Rotation

Bei einer Rotation ist der Impuls p eine periodische Funktion von der Koordinate q , die einen Winkel darstellt und deren Wert unbeschränkt zunehmen kann. (z.B. rotierender starrer Körper)



Folgende Diskussion gilt für beide Arten.

20.3.2 Wirkungsvariable

Wir betrachten den Fall einer zeitunabhängigen Hamilton-Funktion

$$H = H(q, p) := \alpha_1 \quad (20.36)$$

$$\Rightarrow p = p(q, \alpha_1) \quad (20.37)$$

Def.: Wirkungsvariable

Die Wirkungsvariable erhält man durch Integration über eine vollständige Periode der Libration oder Rotation des Impulses als Funktion der Ortsvariablen, sodass die Ortsabhängigkeit verschwindet:

$$J := \oint dq p(q, \alpha_1) = J(\alpha_1) \quad (20.38)$$

Da J nur von α_1 abhängt, wird nun in der Hamilton-Jacobi-Theorie J anstatt α_1 als neuer Impuls gewählt:

$$H = \alpha_1 = \alpha_1(J) \Rightarrow H = H(J) \quad (20.39)$$

Somit ist die charakteristische Hamilton-Funktion (zeitunabhängiges H) eine Funktion der Wirkungsvariablen

$$W = W(q, J) \quad (20.40)$$

20.3.3 Winkelkoordinate/-variable

Definition

Für den neuen Impuls J erhalten wir aus den Transformationsgleichungen der Erzeugenden vom Typ F_2 auch die Koordinate konjugiert zu J :

$$w(q, J) := \frac{\partial W}{\partial J} \quad \left(\Leftrightarrow Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \right) \quad (20.41)$$

Dynamik

Aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erhalten wir eine Bewegungsgleichung für w :

$$\dot{w} = \frac{\partial H}{\partial J} = \text{const} =: \nu(J), \quad (20.42)$$

die sofort gelöst werden kann

$$w(t) = \nu t + \beta \quad (20.43)$$

Nun könnten wir (??) nach q auflösen ($q = q(w, J)$), die Bewegungsgleichung einsetzen und so die Bahn bestimmen. Der besondere Sinn der Winkel-Wirkungs-Variablen liegt jedoch darin, dass die Frequenz der Bahn bestimmt werden kann, ohne $q = q(t)$ explizit zu kennen.

20.3.4 Bestimmung der Frequenz

w verändert sich in einer Periode τ um

$$\Delta w = w(t + \tau) - w(t) = \nu \tau \quad (20.44)$$

Andererseits können wir Δw für eine gegebene Änderung von q auch ausdrücken durch

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq = \oint dq \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{d}{dJ} \oint dq \frac{\partial W}{\partial q} \quad (20.45)$$

Mit einer der Transformationsgleichungen für Erzeugende vom Typ F_2 ($\frac{\partial W}{\partial q} = p$) erhalten wir

$$\Delta w = \frac{d}{dJ} \oint dq p = \frac{dJ}{dJ} = 1 \quad (\text{„wow!“}) \quad (20.46)$$

Dies liefert einen allgemeinen Ausdruck für die Frequenz:

$$\frac{1}{\tau} = \nu(J) = \frac{\partial H}{\partial J} \quad (20.47)$$

20.3.5 Beispiel: Harmonischer Oszillator

Hamilton-Funktion: $H = \frac{1}{2}mp^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 = \alpha_1$

Aus dem vorigen Beispiel: Differentialgleichung für W

$$p = \frac{\partial}{\partial q}W(q, \alpha) = \sqrt{2m\alpha_1 - m^2\omega^2q^2} \quad (20.48)$$

Wirkungsvariable: $J = \oint dq p = \oint dq \sqrt{2m\alpha_1 - m^2\omega^2q^2}$

Substitution: $q = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2}} \sin \theta \Rightarrow dq = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2}} \cos \theta$

$$\Rightarrow J = \frac{2\alpha_1}{\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta = \frac{2\pi\alpha_1}{\omega}$$

Hamilton-Funktion: $H(J) = \alpha_1 = \frac{\omega J}{2\pi}$

Frequenz: $\nu = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{\omega}{2\pi}$

Bemerkung

Wir können die Bewegungsgleichungen für q, p aus dem vorigen Beispiel auch durch $w = \nu t + \beta$ ausdrücken:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega(t + \beta)) = \sqrt{\frac{J}{\pi m\omega}} \sin(2\pi w) \quad (20.49)$$

$$p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega(t + \beta)) = \sqrt{\frac{mJ\omega}{\pi}} \cos(2\pi w) \quad (20.50)$$

Sie können dann als Transformationsgleichungen von den alten zu den Wirkungs-Winkel-Variablen aufgefasst werden.

Teil VI

Anhang

Anhang A

Begriffe der Theoretischen Physik

A.1 Der Begriff der Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{e}_x + y(t) \hat{e}_y + z(t) \hat{e}_z := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

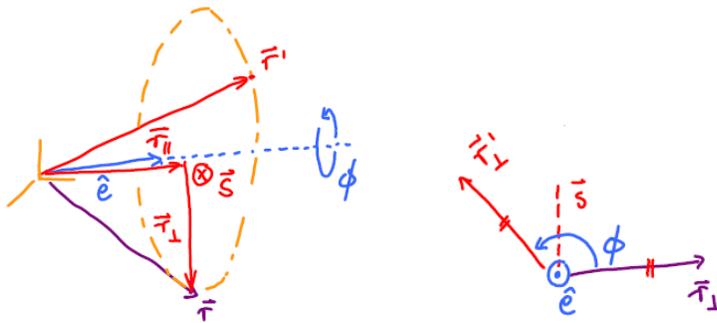
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t) \hat{e}_x + \dot{y}(t) \hat{e}_y + \dot{z}(t) \hat{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t) \hat{e}_x + \ddot{y}(t) \hat{e}_y + \ddot{z}(t) \hat{e}_z$$

A.2 Drehungen

A.2.1 Drehung eines Vektors um eine Achse

Drehe den Vektor \vec{r} um einen Winkel ϕ um eine Achse \hat{e} mit $|\hat{e}| = 1$, wobei er in den Vektor \vec{r}' übergeht (aktive Transformation).



1. Zerlege \vec{r} bezüglich \hat{e}

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} = \hat{e} \cdot (\hat{e} \cdot \vec{r}) - \hat{e} \times (\hat{e} \times \vec{r}) \quad (\text{A.1})$$

2. Schreibe $\vec{s} = \hat{e} \times \vec{r}$

3. Es ergibt sich

$$\vec{r}_{\perp}' = \vec{r}_{\perp} \cos \phi + \vec{s} \sin \phi \quad (\text{A.2})$$

4. rotierender Vektor:

$$\vec{r}' = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}' = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} \cos \phi + \vec{s} \sin \phi \quad (\text{A.3})$$

$$= \hat{e} \cdot (\hat{e} \cdot \vec{r}) - \hat{e} \times \vec{s} \cos \phi + \hat{e} \times \vec{r} \sin \phi \quad (\text{A.4})$$

$$\stackrel{(\text{A.1})}{=} \vec{r} \cos \phi + (1 - \cos \phi) \hat{e} (\hat{e} \cdot \vec{r}) + \hat{e} \times \vec{r} \sin \phi \quad (\text{A.5})$$

5. Da um infinitesimalen Winkel $d\phi$ gedreht wird, kann die Näherung für kleine Winkel für sin und cos eingesetzt werden:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \hat{e} \times \vec{r} d\phi + \text{Ordnung}(d\phi^2) \quad (\text{A.6})$$

Dreht sich der Vektor mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit um die Drehachse, ergibt sich für dessen zeitliche Änderung

$$\vec{r}' - \vec{r} = d\vec{r} = \hat{e} \times \vec{r} d\phi \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{\vec{r}} = \hat{e} \times \vec{r} \frac{d\phi}{dt} =: \hat{e} |\vec{\omega}| \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{A.8})$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{A.9})$$

A.2.2 Drehmatrizen

Ausgangspunkt sind zwei verschiedene Koordinatensysteme O und O' mit den orthonormalen Basisvektoren

$$\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \quad \text{und} \quad \hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3. \quad (\text{A.10})$$

Elemente des Raums (z.B. Vektoren) sollen aus beiden KS beschreibbar sein und zwischen den Beschreibungen soll transformiert werden können (passive Transformationen).

Basisvektoren in gedrehtem KS

Ein Einheitsvektor aus O' kann in O dargestellt werden:

$$\hat{e}'_j = \sum_{m=1}^3 \underbrace{(\hat{e}'_j \cdot \hat{e}_m)}_{*} \cdot \hat{e}_m = \sum_m D_{jm} \hat{e}_m \quad (\text{A.11})$$

*: die Komponenten von \hat{e}'_j in Richtungen \hat{e}_m werden als *Drehmatrix* D_{jm} bezeichnet

Darstellung eines beliebigen Vektors in gedrehtem KS

Da der Ortsvektor \vec{r} eine geometrische Größe ist, ist er unabhängig vom KS immer gleich:

$$\vec{r}' = \vec{r} \quad (\text{A.12})$$

$$\sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}'_i = \sum_{m=1}^3 x_m \hat{e}_m \quad (\text{A.13})$$

$$(x'_i \hat{e}'_i) \cdot \hat{e}'_j = (x_m \hat{e}_m) \cdot \hat{e}'_j \quad (\text{A.14})$$

$$x'_j = x'_i \cdot \underbrace{(\hat{e}'_i \hat{e}'_j)}_{\delta_{ij}} = x_m \cdot (\hat{e}_m \hat{e}'_j) \stackrel{(*)}{=} D_{jm} x_m \quad (\text{A.15})$$

Also lässt sich ein Vektor \vec{r} im neuen Koordinatensystem wie folgt darstellen (passive Transformation):

$$\boxed{x'_j = D_{jm} x_m \quad \Rightarrow \quad \vec{r}' = D \vec{r} \quad (\text{A.16})}$$

Rückdrehung

Eine Rückdrehung, also die Rückgewinnung der Darstellung des Vektors im ursprünglichen KS erfolgt mithilfe der *inversen Drehmatrix* D^{-1} :

$$D^{-1} \vec{r}' = \underbrace{D^{-1} D}_{=1=E} \vec{r} = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad x_i = D_{ij}^{-1} x'_j \quad (\text{A.17})$$

(1 bzw. E : Einheitsmatrix)

Mit der gleichen Überlegung wie in (??) erhält man andererseits

$$x_i = (x_m \underbrace{\hat{e}_m}_{\delta_{mi}}) \hat{e}_i = (x'_j \underbrace{\hat{e}'_j}_{D_{ji}}) \hat{e}_i = D_{ji} \cdot x'_j = D_{ij}^T \cdot x'_j \quad (\text{A.18})$$

Aus (??) und (??) ergibt sich für die inverse Drehmatrix die Identität $D_{ij}^{-1} = D_{ij}^T$ und somit für die Rückdrehung:

$$\boxed{\vec{r} = D^T \vec{r}'} \quad (\text{A.19})$$

Eigenschaften der Drehmatrix

- **Die Zeilenvektoren von D sind orthonormal**

Man kann nutzt die Orthonormalität der Basisvektoren:

$$\delta_{ij} = \hat{e}'_i \hat{e}'_j = (D_{im} \hat{e}_m) \cdot (D_{jn} \hat{e}_n) \quad (\text{A.20})$$

$$= D_{im} D_{jn} \underbrace{\hat{e}_m \cdot \hat{e}_n}_{\delta_{mn}} = D_{im} D_{jm} \quad (\text{A.21})$$

$$\Rightarrow \sum_m D_{im} D_{jm} = \delta_{ij} \quad (\text{A.22})$$

D.h. das Skalarprodukt der i.-ten und j.-ten Zeile von D ist null, falls $i \neq j$, also sind alle Zeilenvektoren einer Drehmatrix untereinander orthonormal.

• **Die Spaltenvektoren von D sind orthonormal**

Analoges Vorgehen wie oben, nur nutzt man die inverse Drehmatrix:

$$\delta_{ij} = \hat{e}_i \hat{e}_j = (D_{im}^{-1} \hat{e}'_m) \cdot (D_{jn}^{-1} \hat{e}'_n) \tag{A.23}$$

$$= D_{mi} D_{nj} \underbrace{\hat{e}'_m \cdot \hat{e}'_n}_{\delta_{mn}} = D_{mi} D_{mj} \tag{A.24}$$

$$\Rightarrow \sum_m D_{mi} D_{mj} = \delta_{ij} \tag{A.25}$$

D.h. das Skalarprodukt der i-ten und j-ten Spalte von D ist null, falls $i \neq j$, also sind auch alle Spaltenvektoren einer Drehmatrix untereinander orthonormal.

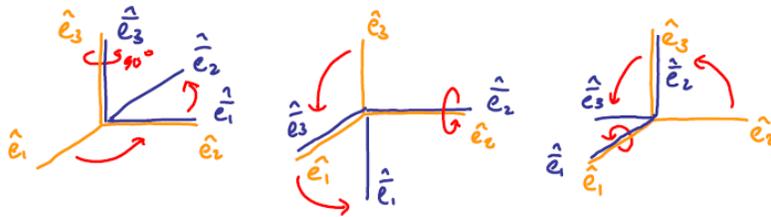
• **Rotationen sind nicht kommutativ**

Seien D^x, D^y, D^z wie folgt definiert:

$$D^z_{jm}(90^\circ) = \hat{e}'_j \hat{e}_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (Rotation um } 90^\circ \text{ um z-Achse)}$$

$$D^y_{jm}(90^\circ) = \hat{e}'_j \hat{e}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (Rotation um } 90^\circ \text{ um y-Achse)}$$

$$D^x_{jm}(90^\circ) = \hat{e}'_j \hat{e}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (Rotation um } 90^\circ \text{ um x-Achse)}$$



Nun

stellt man fest:

Ein Rotationsabfolge von D^y, D^x liefert die Gesamtdrehmatrix

$$D^x \cdot D^y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.26}$$

wohingegen die Abfolge D^x, D^y diese Drehmatrix liefert

$$D^y \cdot D^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.27}$$

Was zeigt, dass Rotationsabfolgen nicht vertauschbar sind.

A.2.3 Dreidimensionale Drehgruppe

Nun sollen Vektoren auch mit Matrizen in einem KS gedreht werden können (aktive Transformationen).

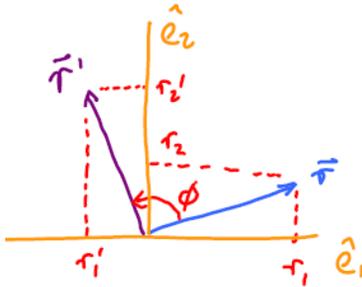
Def.: Rotation

Sei R eine Drehmatrix, \vec{r} ein Ortsvektor im \mathbb{R}^3 , so beschreibt

$$r'_i = \sum_{k=1}^3 R_{ik} r_k \tag{A.28}$$

eine Rotation.

Beispiel



$$r'_1 = \cos(\phi + \alpha) = r_1 \cos \phi - r_2 \sin \phi \tag{A.29}$$

$$r'_2 = \sin(\phi + \alpha) = r_1 \sin \phi + r_2 \cos \phi \tag{A.30}$$

$$\Rightarrow \vec{r}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}}_{\equiv K} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \tag{A.31}$$

Eigenschaften

- **Erhalt der Längen**

Unter (??) bleiben Längen erhalten.

Beweis:

$$(r')^2 = \sum_{i=1}^3 r'_i r'_i \tag{A.32}$$

$$= \sum_i \sum_{j,k=1}^3 (R_{ij} r_j)(R_{ik} r_k) \tag{A.33}$$

$$= \sum_{jk} r_j r_k \sum_i R_{ij} R_{ik} = \sum_{jk} r_j r_k \sum_i R_{ji}^T R_{ik} \tag{A.34}$$

$$\stackrel{(\text{??})}{=} \sum_{jk} r_j r_k \delta_{jk} = \sum_j r_j r_j = r^2 \tag{A.35}$$

• **Reine Drehung und Spiegelung**

Es gilt

- det $R = 1$, falls R eine reine *Drehung* darstellt,
- det $R = -1$, falls R eine *Drehung* und *Raumspiegelung* darstellt.

Ist R eine reine Drehung, so ist $R \in SO(3)$. $SO(3)$ ist der Name für die Drehgruppe, S steht für speziell und bezieht sich auf det $R = 1$, das O für orthogonal und bezieht sich auf die Orthogonalität der Zeilen und Spaltenvektoren ($A^{-1} = A^T$), die 3 für die Dimension.

• **Gruppenaxiome**

$SO(3)$ erfüllt die Gruppenaxiome. Zum Beispiel:
Sei $R_1, R_2 \in SO(3)$, und $M := R_1 \cdot R_2$ dann ist

$$M \cdot M^T \stackrel{[ES16]}{=} (R_1 \cdot R_2) \cdot (R_1^T \cdot R_2^T) = R_1 \cdot R_1^T = \mathbf{1} \Rightarrow M \text{ orthogonal}$$

• **Hintereinanderausführen von Drehungen**

Jede $SO(3)$ -Rotation lässt sich durch Hintereinanderausführen von Drehungen um die drei Koordinatenachsen aufbauen:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (Drehung um z-Achse)} \quad (\text{A.36})$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \text{ (Drehung um y-Achse)} \quad (\text{A.37})$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ (Drehung um x-Achse)} \quad (\text{A.38})$$

(Drehungen gegen den Uhrzeigersinn)

Für ein Element aus $O(3)$ wird eine zusätzliche Matrix gebraucht:

$$R_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (Raumspiegelung)} \quad (\text{A.39})$$

$SO(3)$ ist damit eine *dreiparametrische Gruppe*.

A.3 Addition von Winkelgeschwindigkeiten

Lassen sich Winkelgeschwindigkeiten addieren wie Vektoren?

Wir betrachten zwei aufeinander folgende Drehungen

$$d\vec{\varphi}_a := \vec{\omega}_a dt \quad , \quad d\vec{\varphi}_b := \vec{\omega}_b dt \quad (\text{A.40})$$

Drehen wir \vec{r} um $d\vec{\varphi}_a$ erhalten wir

$$\vec{r} + d\vec{r}_a \quad \text{mit} \quad d\vec{r}_a = d\vec{\varphi}_a \times \vec{r} \quad (\text{A.41})$$

Drehen wir $\vec{r} + d\vec{r}_a$ um $d\vec{\varphi}_b$ erhalten wir

$$\vec{r} + d\vec{r}_a + d\vec{r}_b \quad \text{mit} \quad d\vec{r}_b = d\vec{\varphi}_b \times (\vec{r} + d\vec{r}_a) = d\vec{\varphi}_b \times \vec{r} \quad (\text{A.42})$$

Wir erhalten also insgesamt

$$d\vec{r} = d\vec{r}_a + d\vec{r}_b = (d\vec{\varphi}_a + d\vec{\varphi}_b) \times \vec{r} = (\vec{\omega}_a + \vec{\omega}_b) dt \times \vec{r} = \vec{\omega} dt \times \vec{r} \quad (\text{A.43})$$

Das bedeutet wir können Winkelgeschwindigkeiten addieren wie Vektoren.

A.4 Dyadisches Produkt

Das dyadische Produkt (kurz auch: Dyade) ist in der Mathematik ein Tensor zweiter Stufe, dessen Komponenten durch Multiplikation der skalaren Komponenten zweier Vektoren in bestimmter Weise entstehen.

$$\vec{x}\vec{y} \equiv \vec{x} \otimes \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

Verwendung

Wird eine Dyade $\vec{a} \otimes \vec{b}$ mit einem Vektor \vec{c} von rechts dazu multipliziert, so erhält man einen Vektor der parallel zu \vec{a} ist:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (\text{A.45})$$

wird er von links dazu multipliziert, erhält man einen Vektor der parallel zu \vec{b} ist:

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} \quad (\text{A.46})$$

(Um einzusehen, dass die Gleichungen gelten, schreibe man den Ausdruck wie oben als Produkt von Zeilen- und Spaltenvektoren und nutze die Assoziativität.)

A.5 Legendre-Transformation

A.5.1 Funktion einer Variablen

Wir betrachten eine Funktion

$$f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{mit } f''(x) \neq 0 \quad \forall x \quad (\text{A.47})$$

und definieren die Funktion

$$p(x) := f'(x) \quad \text{mit Umkehrfunktion } x = x(p) \quad (\text{A.48})$$

(Die Umkehrfunktion existiert, weil $p = f'$ injektiv, da $f'' = p' \neq 0 \quad \forall x$)

Dann ist die *Legendre-Transformierte* von $f(x)$ die Funktion

$$\tilde{f}(p) := p x(p) - f(x(p)) \quad (\text{A.49})$$

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha, \quad \forall x > 0, \alpha \neq 1 \quad (\text{A.50})$$

$$p(x) = f'(x) = x^{\alpha-1} \quad (\text{A.51})$$

$$x(p) = p^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (\text{A.52})$$

$$\tilde{f}(p) = p x(p) - \frac{1}{\alpha} \left(p^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)^\alpha = \frac{1}{\beta} p^\beta \quad \text{mit } \beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} \quad (\text{A.53})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} x^\alpha \rightarrow \frac{1}{\beta} p^\beta \quad (\text{A.54})$$

Bemerkung

Bei der Legendre-Transformation geht keine Information verloren, denn sie führt zweifach ausgeführt wieder zur Identität. Im Beispiel oben:

$$f^*(y) = \frac{1}{\gamma} y^\gamma, \quad \text{mit } \gamma = \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1} = \frac{\alpha}{\alpha - (\alpha-1)} = \alpha \quad (\text{A.55})$$

$$\Rightarrow f^*(y) = \frac{1}{\alpha} y^\alpha = f(y) \quad (\text{A.56})$$

A.5.2 Funktion mit mehreren Variablen

Betrachte die Funktion

$$f(x_1, \dots, x_f) \quad \text{mit } \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0 \quad (\text{A.57})$$

Definiere die Funktionen

$$p_k := \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{mit Umkehrfunktionen } x_k(p) \quad (\text{A.58})$$

Dann ist die Legendre-Transformierte von f

$$\tilde{f}(p_1, \dots, p_f) := \sum_k (p_k x_k(p) - f(x_1(p), \dots, x_f(p))) \quad (\text{A.59})$$

Anhang B

Differentialgleichungen

B.1 Eigenschaften

- *Ordnung:*
höchste Abl. = Ordnung der DG = Anzahl der unabh. Anfangsbed.
- *Linearität:*
Eine DG ist linear, wenn die Funktion und ihre Ableitungen in linearem Zusammenhang stehen, z.B.:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

- *In-/Homogenität:*
Eine DG ist homogen, wenn keine expliziten Abhängigkeiten von x vorkommen, sie ist inhomogen, wenn solche existieren.
- *Anfangsbedingungen:*
Lösung der DG ist eine Funktion die bestimmte Anfangsbedingungen erfüllt. Diese müssen unabhängig (siehe Script von Prof. Dr. von Delft [DG2]) sein. Die allg. Lösung einer DG n-ten Grades hängt von n unabh. Parametern ab.
- *Superpositionsprinzip:*
Der Raum der homogenen linearen DG ist ein Vektorraum.

B.2 Lösungsstrategien

1. *Lösung durch Ansätze*
Ansätze werden geraten und in die Differentialgleichung eingesetzt.
2. *Systematische Lösungsverfahren*
Für einige Klassen von gew. DG gibt es systematische Lösungswege, wie z.B.:

- SEPARATION DER VERÄNDERLICHEN:
In der DG werden die Variablen separiert, d.h. aus $\frac{df}{dx} = cf(x)$ wird $\frac{df}{f} = c dx$.
- VARIATION DER KONSTANTEN:
Im entsprechenden Ansatz wird eine Konstante von einer von x abhängigen Funktion ersetzt.

B.3 Differentialgleichungen verschiedenen Typs

B.3.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

homogen

also $F(y', y) = 0$

Lösungsverfahren: Separation der Veränderlichen / Raten

inhomogen

also $F(y', y, x) = 0$

Lösung wird zusammengesetzt aus allgemeiner homogener und spezieller inhomogener Lösung:

1. Lösung der homogenen DGL (y_h)
2. Ansatz mit Variation der Konstanten liefert ggf. spez. inh. Lösung (y_i)
3. Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_i$

B.3.2 Differentialgleichungen 2. Ordnung

also $F(y'', y', y, x) = 0$

sind nur lösbar, wenn

1. $F(y'', y', x) = 0$
Substitution mit $y' = h$ liefert $F(h', h, x) = 0$
2. $F(y'', y', y) = 0$
Substitution mit $y' = h$ ergibt $y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dh}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dh}{dy} = h \frac{dh}{dy}$
 $\Rightarrow F\left(h \frac{dh}{dy}, h, y\right) = 0$

Ansatz kann auch geraten werden.

B.4 mögliche Probleme

- *Entartung*

Besitzt das charakteristische Polynom eine Lösung zu wenig, d.h. hängt eine scheinbare Lösung, nur von $n-1$ der n Parameter ab, so muss die Methode Variation der Konstanten angewendet werden, wobei sich herausstellt, dass hier die variierte Funktion ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades darstellt

- *Nicht-Linearität*

In einigen der oben beschr. Fällen, kann es z.B. aufgrund eines nicht-linearen Zusammenhangs zu Problemen kommen.

- *nichtkonstante Koeffizienten*

Ein Ansatz mit $e^{\lambda x}$ führt in der Regel zu Widersprüchen. ($e^{f(x)}$ zu umständlich wegen Ketten- und Produktregel)

Ausweg:

y, y', y'', a_1 und a_0 als Taylorreihe darstellen (falls möglich) und nach x^n ordnen, was eine Reihe liefert: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Rightarrow c_n = \dots = 0$

Bemerkungen:

- Schwierigkeiten liegen hier in der Umwandlung der Potenzreihe in eine geschlossene Form.
- DGLen höherer Ordnung lassen sich oft auch nach diesem Ansatz lösen.

Anhang C

Einige Sätze und Theoreme

C.1 Virialsatz

Häufig ist die Lösung von Systemen mit vielen Freiheitsgraden schwierig bis unmöglich. Nützliche Information kann dann der Virialsatz liefern.

Def.: Zeitlicher Mittelwert einer Größe

$$\bar{O} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt O(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t), \dot{\vec{r}}_1(t), \dots, \dot{\vec{r}}_N(t)) \quad (\text{C.1})$$

Virialsatz

Falls alle \vec{r}_i und $\dot{\vec{r}}_i$ im Verlauf der Zeit endlich bleiben, gilt

$$\boxed{\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i}} \quad (\text{C.2})$$

Beweis:

$$\bar{T} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt T = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \int_0^\tau \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (\text{C.3})$$

$$\downarrow \text{ partielle Integration} \quad (\text{C.4})$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \Big|_0^\tau - \int_0^\tau \vec{r}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i \right) \quad (\text{C.5})$$

$$\downarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \frac{1}{2} \sum_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \Big|_0^\tau = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_i \overline{\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i} \quad (\text{C.7})$$

Lemma:

Für Potentialkräfte mit einem Potential, das eine homogene Funktion n-ten Grades ist, d.h.

$$V(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N) = \lambda^n V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad (\text{C.8})$$

folgt aus dem Virialsatz

$$\boxed{2\bar{T} = n\bar{V}} \quad (\text{C.9})$$

Beweis:

Für eine homogene Funktion V gilt:

$$\frac{d}{d\lambda} V(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N) = \left\{ \begin{array}{l} n\lambda^{n-1} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial V(\lambda \vec{r}_1, \dots, \lambda \vec{r}_N)}{\partial(\lambda \vec{r}_i)} \cdot \vec{r}_i \end{array} \right. \quad (\text{C.10})$$

$$\downarrow \quad \text{setze } \lambda = 1 \quad (\text{C.11})$$

$$nV(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{\partial V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial(\vec{r}_i)}}_{-\vec{F}_i} \cdot \vec{r}_i \quad (\text{C.12})$$

Aus dem Virialsatz folgt

$$2\bar{T} = \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i \cdot (-\vec{F}_i)} = \sum_{i=1}^N \overline{\vec{r}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}} \stackrel{??}{=} n\bar{V} \quad (\text{C.13})$$

C.1.1 Beispiele

- Harmonischer Oszillator: $V = \frac{1}{2}k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \bar{T} = \bar{V}$
mit Energieerhaltung $\bar{T} + \bar{V} = E : \bar{T} = \bar{V} = \frac{E}{2}$
- Keplerproblem: $V = \frac{V_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \Rightarrow n = -1 \Rightarrow \bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{V}$
mit Energieerhaltung $\bar{T} + \bar{V} = E : \bar{T} = -E, \bar{V} = 2E$
(z.B. gewinnt ein Satellit, der durch Reibung Energie verliert, an kinetischer Energie.)

C.2 Koordinatentransformation bei Integralen

Bei einer Koordinatentransformation der Form

$$x'_i = x'_i(x) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{C.14})$$

transformiert das Volumenelement $d^n x$ wie folgt

$$\boxed{dx'_1 \dots dx'_n = dx_1 \dots dx_n \det J(x)} \quad (\text{C.15})$$

mit der *Jacobi-Matrix*

$$J_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \quad (\text{C.16})$$

Anhang D

Abschließ. Beispiel: Schwingung einer Saite

Ziele

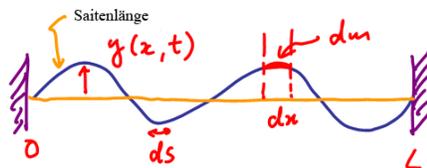
- Herleitung und Lösung der Wellengleichung für eine schwingende Saite,
- Illustration, wie Randbedingungen zu Quantisierungseffekten führen,
- Zerlegung der Bewegung in Eigenmoden.

D.1 Wellengleichung

D.1.1 Herleitung der Wellengleichung

Wir benutzen folgende Längenbezeichnungen:

l : ungestreckte Ruhelänge, L : gestreckte Ruhelänge,
 $\tilde{L}(t)$: Länge während der Schwingung



Potentielle Energie

Wenn die Saite ruht, enthält sie die potentielle Energie $V_0 = V(L) = \frac{1}{2}k(L-l)^2$, wodurch eine innere Spannung (Kraft in der ruhenden gestreckten Saite) wirkt:

$$F := \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=L} = k(L-l) \quad (\text{D.1})$$

Während die Saite schwingt, verlängert sich die Gesamtlänge auf

$$\tilde{L}(t) = \int_0^L ds = \int_0^L dx \sqrt{1+y'^2} \quad (\text{D.2})$$

Für kleine Auslenkungen $y(x,t)$ der Saite bleibt $\frac{dy}{dx} := y'$ klein, somit kann $\tilde{L}(t)$ angenähert werden zu

$$\tilde{L}(t) = \int_0^L dx \left(1 + \frac{1}{2}y'^2 + O(y'^3) \right) = L + \frac{1}{2} \int_0^L y'^2 dx = L + \Delta \quad (\text{D.3})$$

Es gibt also eine zusätzliche Streckung aufgrund der Schwingung

$$\Delta = \tilde{L}(t) - L \ll L - l \quad (\text{D.4})$$

Somit ergibt sich für die potentielle Energie während der Schwingung

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}k(\tilde{L} - l)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta + L - l)^2 \quad (\text{D.5})$$

$$= \frac{1}{2}k(L-l)^2 + k(L-l)\Delta + \frac{1}{2}k\Delta^2 \approx V_0 + F\Delta \quad (\text{D.6})$$

Die potentielle Energie ist also ein Funktional

$$\tilde{V}[y] = V_0 + \frac{F}{2} \int_0^L dx y'^2 \quad (\text{D.7})$$

Kinetische Energie

Mit der Massendichte $\tau = \frac{dm}{dx}$ ist die kinetische Energie gegeben durch

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \int dm v_y^2 = \frac{\tau}{2} \int_0^L dx \dot{y}^2 \quad (\text{D.8})$$

Lagrangefunktion

Somit ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$L_{ag} = \tilde{T} + \tilde{V} = -V_0 + \int_0^L dx \left(\frac{\tau}{2} \dot{y}^2 - \frac{F}{2} y'^2 \right) \quad (\text{D.9})$$

Den Term unter dem Integral nennt man *Lagrangedichte* \mathcal{L} . Die Konstante $-V_0$ wird im Folgenden weggelassen, da sie durch geeignete Wahl des Potentialminimums verschwindet.

Bewegungsgleichung

Nach dem Hamiltonsche Extremalprinzip wird die Wirkung

$$S[y] = \int_0^T dt L_{ag} = \int_0^T dt \int_0^L dx \mathcal{L}(\dot{y}, y') \quad (\text{D.10})$$

für die physikalische Schwingung $y(x, t)$ extremal. Dies ist ein mehrdimensionales Variationsproblem wie wir es in (??) behandelt haben. Dafür stellen wir deshalb die Euler-Lagrange-Gleichung auf

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \quad (\text{D.11})$$

$$0 = \tau \ddot{y} - F y'' \quad (\text{D.12})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \frac{\tau}{F} = \frac{1}{c^2} \quad (\text{D.13})}$$

Gleichung (??) nennt man *Wellengleichung* mit der Wellengeschwindigkeit $c = \sqrt{F/\tau}$.

D.1.2 Lösungen der Wellengleichung

Satz: Superpositionsprinzip

Seien $y_1(x, t)$ und $y_2(x, t)$ Lösungen der Wellengleichung (??), dann ist die *Superposition* oder *lineare Überlagerung* $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ ebenfalls eine Lösung.

Beweis: Wir benutzen die Notation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} := D_\gamma$.

$$D_\gamma(y_1 + y_2) = D_\gamma y_1 + D_\gamma y_2 = 0 \quad (\text{D.14})$$

Es wurde die Linearität von D_γ , sowie die Eigenschaft von y_1 und y_2 als Lösungen der Wellengleichung benutzt. □

Satz: Form der Lösungen

Sei $f(z)$ eine beliebige zweifach differenzierbare Funktion von z . Dann sind die Funktionen

$$f_\pm(x, t) = f_\pm(x \pm ct) \quad (\text{D.15})$$

Lösungen der Wellengleichung.

Beweis:

Wir betrachten zunächst die Ableitungen von $f(z)$ mit $z = x \pm ct$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} := f''(z) \quad (\text{D.16})$$

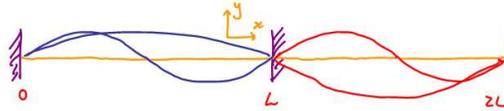
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\pm c f'(z)) = c^2 f''(z) \quad (\text{D.17})$$

Also ergibt sich mit $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} := D_\gamma$

$$D_\gamma f_\pm(x \pm ct) = (1 - 1) f''(z) = 0 \quad (\text{D.18})$$

□

D.2 Randbedingungen



Da die Saite fest eingespannt ist, können die Randpunkte nicht mitschwingen:

$$y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0 \quad (\text{D.19})$$

Wir können $y(x, t)$ ($\forall t$) als $2L$ -periodisch in x auffassen, obwohl wir uns nur für den Bereich $0 \leq x \leq L$ interessieren.

Für $t=0$

Folglich lässt sich $y(x, 0)$ in einer Fourierreihe entwickeln:

$$y(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i \frac{n2\pi}{2L} x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ik_n x} \quad (\text{D.20})$$

Wir fordern, dass $y(x, 0)$ reell ist, also muss gelten: $y(x, 0) = \bar{y}(x, 0)$, d.h.

$$\bar{y}(x, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n e^{-ik_n x} \stackrel{n \rightarrow -n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{-n} e^{ik_n x} \stackrel{!}{=} y(x, 0) \quad (\text{D.21})$$

$$\Rightarrow a_n = \bar{a}_{-n} \quad (\text{D.22})$$

Für beliebige t

Ansatz für beliebige t :

$$y(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ik_n(x+ct)} + \bar{a}_n e^{ik_n(x-ct)} \quad (\text{D.23})$$

$$\downarrow n \rightarrow -n \text{ im zweiten Summand} \quad (\text{D.24})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ik_n(x+ct)} + \bar{a}_{-n} e^{-ik_n(x-ct)} \quad (\text{D.25})$$

Mit der Randbedingung $y(0, t) = 0$ erhalten wir

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ik_n ct} + \bar{a}_{-n} e^{ik_n ct} \Rightarrow \bar{a}_{-n} = -a_n \quad (\text{D.26})$$

Eingesetzt in $y(x, t)$ ergibt (mit $k_n c = w_n$)

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(e^{ik_n(x+ct)} - e^{-ik_n(x-ct)} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2i a_n e^{iw_n t} \sin k_n x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2i a_n \sin k_n x (\cos w_n t + i \sin w_n t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2i [\cos w_n t (a_n \sin k_n x + a_{-n} \sin k_{-n} x) \\ &\quad + i \sin w_n t (a_n \sin k_n x - a_{-n} \sin k_{-n} x)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2i \sin k_n x [\cos w_n t (a_n - a_{-n}) + i \sin w_n t (a_n + a_{-n})] \end{aligned}$$

Mit (??) und

$$2i(a_n - \bar{a}_n) = -4 \Im(a_n) := A_n \quad (\text{D.27})$$

$$2i(a_n + \bar{a}_n)i = -4 \Re(a_n) := B_n \quad (\text{D.28})$$

erhalten wir

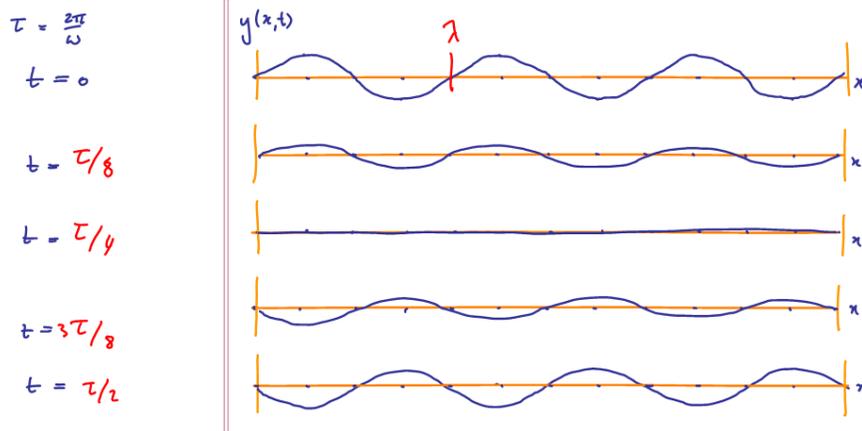
$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \quad (\text{D.29})$$

$$\boxed{y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \phi_n)} \quad (\text{D.30})$$

mit $k_n = \frac{\pi n}{L}$ und $\omega_n = ck_n$.

Graphische Darstellung

(??) ist eine Überlagerung stehender Wellen. Betrachten wir nur eine Mode:



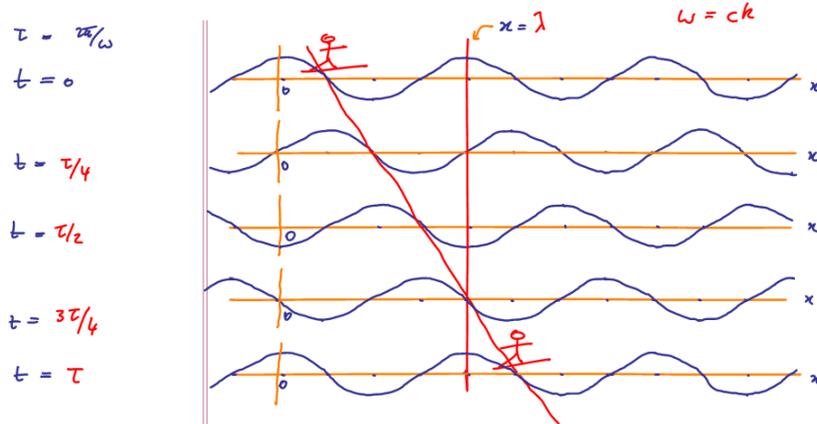
Bemerkungen

- Frequenz und Wellenlänge der stehenden Welle sind verknüpft ($\omega_n = ck_n$) und *quantisiert*:

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n = c \frac{\pi n}{L} \tag{D.31}$$

Der Grund dafür sind die festen Randbedingungen.

- Ohne Randbedingungen hat die Wellengleichung auch laufende Wellen als Lösung, z.B. $y(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$. Dies kann wie folgt veranschaulicht werden:



Für einen festen Punkt auf der laufenden Welle (z.B. Surfer in Abbildung) ist die Phase $\varphi = \omega t - kx$ konstant, d.h. $0 = \dot{\varphi} = \omega - k\dot{x}$. Führt man die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \dot{x}$ ein ergibt sich hierfür

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \tag{D.32}$$

D.3 Zerlegung einer stehenden Welle

Gegeben sei eine Funktion $y(x, t)$ einer stehenden Welle und die Randbedingungen $y(0, t) = 0$ und $y(L, t) = 0$. Wir betrachten zunächst nur den Fall $t = 0$ in einem Fourieransatz:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x \quad , \quad k_n = \frac{\pi n}{L} \quad (\text{D.33})$$

mit den Fourier-Koeffizienten

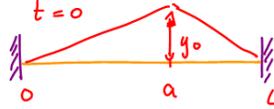
$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L dx \sin k_n x y(x) \quad (\text{D.34})$$

Nehmen wir die Zeitentwicklung dazu, ist es zweckmäßig den folgenden Ansatz zu wählen:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x \cos \omega_n t \quad (\text{D.35})$$

Denn $y(x, t = 0) = y'(x)$.

D.3.1 Beispiel: gezupfte Saite



$$y(x) = \begin{cases} x \frac{y_0}{a} & \text{für } x \in [0, a] \\ -(x - L) \frac{y_0}{L - a} & \text{für } x \in [a, L] \end{cases} \quad (\text{D.36})$$

Berechnen der Fourier-Koeffizienten liefert ¹

$$a_m = \frac{2y_0}{\pi^2(1-Q)Q} \frac{\sin m\pi Q}{m^2} \quad , \quad \text{mit } Q = \frac{a}{L} \quad (\text{D.37})$$

¹Eine schöne Illustration der Eigenmoden findet man unter <http://www.jensign.com/JavaScience/www/plucker.html>. Ein Applet zur Wellenerzeugung mit einem Seil ist unter <http://www.colorado.edu/physics/phet/simulations/stringwave/stringWave.swf> erreichbar.