

R: Rechenmethoden - Bernhard Emmer

WiSe 06/07

Vorlesungsskript

verfasst von
Sebastian Gottwald

24. April 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoren	6
1.1	Definition: Vektor	6
1.2	Darstellung von Vektoren	6
1.3	Rechnen mit Vektoren	6
1.3.1	Die Länge bzw. der Betrag eines Vektors	6
1.3.2	Addition zweier Vektoren	7
1.3.3	Multiplikation mit konstantem Faktor	7
1.3.4	Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt)	7
1.3.5	Vektorprodukt (nur im \mathbb{R}^3 sinnvoll)	8
2	Vektorwertige Funktionen	11
2.1	Definition: Vektorwertige Funktion	11
2.2	Darstellung	11
2.3	Beispiele	11
2.4	Überlegung: Teilchengeschwindigkeit	12
2.4.1	Differenzieren	12
2.4.2	Bogenlänge	13
2.4.3	Geschwindigkeit	13
3	Das begleitende Dreibein	15
3.1	Die drei Einheitsvektoren	15
3.1.1	Tangenteneinheitsvektor	15
3.1.2	Normaleneinheitsvektor	15
3.1.3	Binormaleneinheitsvektor	15
3.2	Schmiegungeebene	16
4	Felder	17
4.1	Skalares Feld	17
4.2	Vektorfeld	18
4.3	Partielle Ableitungen	18
4.3.1	Partielle Ableitung im skalaren Feld	18
4.3.2	Partielle Ableitung im Vektorfeld	18
4.3.3	Totales Differential	19
4.3.4	Nabla $\vec{\nabla}$	20
4.3.5	Bezeichnungen	21
5	Das Potential	22
5.1	Kurven-/Linienintegrale	23
5.2	Kriterien für die Existenz eines Potentials (Zus.)	26
6	Differentiale	27

7	Koordinatensysteme	28
7.1	Zweidimensional	28
7.1.1	Kartesisches Koordinatensystem	28
7.1.2	Polarkoordinatensystem	28
7.1.3	Allgemein	29
7.2	Dreidimensional	30
7.2.1	Zylinderkoordinatensystem	30
7.2.2	Kugelkoordinatensystem	31
7.3	Differentiale in anderen Koordinatensystemen	31
7.4	$\vec{\nabla}$ in anderen Koordinatensystemen	32
8	Mehrdimensionale Integration	34
8.1	Spezialfall: Rechteck als Grundfläche	34
8.2	Allgemein: Integration über krummlinige Flächen	35
9	Oberflächenintegrale	39
9.1	Definition: Parametrisierung einer Fläche	39
9.2	Durchfluss durch eine Fläche	40
10	Integralsätze	42
10.1	Satz von Gauß	42
10.2	Satz von Stokes	44
11	Extrema	46
11.1	Extrema ohne Nebenbedingung	46
11.2	Extrema mit Nebenbedingung	47
12	Taylorreihen	49
12.1	Taylor-Entwicklung	49
12.2	Konvergenz der Taylorreihe	50
13	Komplexe Zahlen	51
13.1	Definition	51
13.2	Graphische Darstellung	52
13.3	Darstellung in Polarkoordinaten	52
13.4	Euler-Darstellung	52
13.5	Multiplikation in \mathbb{C}	53
13.6	Zusammenfassung	55
13.6.1	Darstellungen komplexer Zahlen	55
13.6.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	55
14	Fourierreihen	56
14.1	Fourier-Entwicklung	56
14.2	Beispiel: Rechteckschwingung	57
14.3	Satz von Dirichlet	58
14.4	2π -verschiedene Periodendauer	59
14.5	2. Zugang zur Fourierreihe	59

14.6	Spektrale Darstellung der Fourierreihe	59
14.7	Fourierintegrale, Fouriertransformation	60
14.8	Zusammenfassung	62
14.9	Bemerkungen (Skalarprodukt für Funktionen)	63
15	Wahrscheinlichkeitsrechnung	64
15.1	Kombinatorik	64
15.1.1	Permutationen	64
15.1.2	Kombinationen	64
15.1.3	Variationen	65
15.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	65
15.2.1	Definitionen	65
15.2.2	Veranschaulichung: Wahrscheinlichkeitsbaum	66
15.2.3	Anwendung: totale Wahrscheinlichkeit	66
15.2.4	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	67
15.2.5	Kenngrößen einer Verteilung	68
15.2.6	Binomialverteilung	69
15.2.7	Gaußsche Normalverteilung	71
16	Entropie	72
16.1	Informationsgehalt einer Nachricht	72
16.2	Informationsgehalt eines Nachrichtensatzes	72
17	Distribution	73
17.1	Die δ -Funktion	73
17.1.1	Definition	73
17.1.2	Eigenschaften	74
17.1.3	Anwendung auf eine Funktion	74
17.1.4	Im Dreidimensionalen	75
18	Differentialgleichungen	76
18.0.5	Definition	76
18.0.6	Eigenschaften	76
18.1	Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	76
18.2	Homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	77
18.2.1	Konstante Koeffizienten	77
18.2.2	Nicht-konstante Koeffizienten	78
18.3	Inhomogene lineare Differentialgleichungen	79
18.3.1	Spezialfälle	79
18.4	Partielle Differentialgleichungen	81
19	Matrizen	82
19.0.1	Definition	82
19.1	Eigenschaften	82
19.2	Rechenregeln	83
19.3	Lineare Abbildungen	83

19.3.1	Extraktion der Spaltenvektoren	84
19.4	Eigenwerte	84
19.4.1	Verfahren zum Finden der Eigenwerte und -vektoren . . .	85
19.4.2	Determinante	85
19.4.3	Diagonalisierung	86
19.4.4	Anwendung	86

1 Vektoren

In der Physik unterscheidet man skalare und vektorielle Größen.

Skalare Größen sind durch Maßzahl und Maßeinheit charakterisiert (Bsp.: Masse, Temperatur, ...).

Die *vektoriellen Größen* weisen darüber hinaus eine Richtung auf (Bsp.: Kraft, Geschwindigkeit). Dies motiviert den Vektorbegriff:

1.1 Definition: Vektor

Ein Vektor ist die Menge aller gleichgerichteter, gleichlanger Pfeile.

Oft wählt man aus dieser Menge einen charakteristischen Repräsentanten: Den Pfeil, der bei einem ausgezeichneten Punkt (in der Regel der Nullpunkt) startet, der Ortsvektor.

Offenbar lässt sich der Anschauungsraum durch die Menge aller Ortsvektoren charakterisieren (d.h. es gibt eine 1:1-Zuordnung jedes Punktes im Raum zu jedem Ortsvektor.)

1.2 Darstellung von Vektoren

Zur besseren Beschreibbarkeit wählt man in der Regel ein Koordinatensystem aus rechtwinklig zueinander stehenden Achsen (Koordinatenachsen), die ein *Rechtssystem* bilden.

Hier werden in der Regel zweidimensionale Fälle betrachtet (Übersichtlichkeit); dreidimensional verläuft analog.

Ein Vektor ist wie folgt definiert:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 =: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

- Offenbar lässt sich jeder Vektor in eindeutiger Art und Weise als Summe von Vielfachen von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 beschreiben.
- \vec{e}_1 und \vec{e}_2 heißen (wegen dieser Darstellbarkeit) Basis des Zweidimensionalen Raums.
- Da hier \vec{e}_1 und \vec{e}_2 aufeinander senkrecht stehen und die Länge 1 haben, spricht man hier auch von einem *Orthonormalsystem*.

1.3 Rechnen mit Vektoren

1.3.1 Die Länge bzw. der Betrag eines Vektors

Die Länge eines Vektors ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

1.3.2 Addition zweier Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = \vec{e}_1(a_1 + b_1) + \vec{e}_2(a_2 + b_2) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Multiplikation mit konstantem Faktor

$$c \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

1.3.4 Multiplikation zweier Vektoren (Skalarprodukt)

Um eine neue Rechenmethode einzuführen (die Multiplikation), genügt es, die Basisvektoren zu betrachten, denn mit diesen können alle restlichen Vektoren dargestellt werden:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$$

Kurz:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases} \quad (1)$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \cdot (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) = a_1b_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + a_1b_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + a_2b_1\vec{e}_2\vec{e}_1 + a_2b_2\vec{e}_2\vec{e}_2 \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

Dieses Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 (+a_3b_3)$ heißt *Skalarprodukt* ($\in \mathbb{R}$).

geometrische Bedeutung

Für $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ ist

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Folgerungen

- Für alle \vec{a}, \vec{b} : $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
- Für $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Anwendung

Dies liefert uns eine schnelle Möglichkeit alle Vektoren \vec{c} zu bestimmen, die auf einem gegebenen Vektor \vec{a} senkrecht stehen (eine Ebene):

$$\{\vec{c} \in \mathbb{R} : \vec{c} \cdot \vec{a} = 0\} = \{\vec{c} \in \mathbb{R} : c_1a_1 + c_2a_2 = 0\}$$

Rechenregeln zum Skalarprodukt

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2, d \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $(d\vec{a}) \cdot \vec{b} = d \cdot (\vec{a}\vec{b}) = \vec{a} \cdot (d\vec{b})$
2. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = c\vec{a} + c\vec{b}$

1.3.5 Vektorprodukt (nur im \mathbb{R}^3 sinnvoll)

Im Rechtssystem der Basisvektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ kann man folgende Verknüpfungen (Rechtssysteme) herstellen:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 &= \vec{0} & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 &= \vec{0} & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 &= \vec{0} \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Also:

- falls $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$ Vorzeichen „+“ (*)
- falls $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$ Vorzeichen „-“ (**)

Levi-Civita-Tensor

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq j \neq k \text{ und Reihenfolge wie in (*) (zyklisch)} \\ -1 & \text{falls } i \neq j \neq k \text{ und Reihenfolge wie in (**) (antizyklisch)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einschub: Einstein'sche Summenkonvention (ESK)

Lasse Summenzeichen immer dann weg, wenn ein Index (als Laufvariable) genau zweimal vorkommt. Beispiel (Skalarprodukt):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_i b_i$$

Vektorprodukt der Basisvektoren

Für die Basisvektoren gilt also:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \cdot \vec{e}_k = \epsilon_{ijk} \cdot \vec{e}_k$$

Vektorprodukt allgemein

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$$

Mit Distributiv- und Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1b_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + a_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + \dots = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{k,i,j=1}^3 a_i \cdot b_j \cdot \epsilon_{ijk} \cdot \vec{e}_k \quad (2)$$

Allgemeine Folgerungen:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, wenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Geometrische Interpretation

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist der Vektor, der auf \vec{a} und \vec{b} senkrecht steht, mit ihnen ein Rechtssystem bildet und die Länge $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ besitzt.

Außerdem:

- $|\vec{a} \times \vec{b}| = A_{\text{Parallelogramm mit } \vec{a}, \vec{b} \text{ als Seiten}}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = V_{\text{Parallelepiped aus } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$

Beispiel

$$(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_k = ?$$

Wir betrachten zunächst $\vec{a} \times \vec{b}$ (aus (2)):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^3 a_i \cdot b_j \cdot \epsilon_{ij1} \\ \sum_{i,j=1}^3 a_i \cdot b_j \cdot \epsilon_{ij2} \\ \sum_{i,j=1}^3 a_i \cdot b_j \cdot \epsilon_{ij3} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen nun nur die erste Komponente ($k = 1$) von $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_k$:

$$(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_1 = \sum_{i,j=1}^3 a_i (\vec{b} \times \vec{c})_j \cdot \epsilon_{ij1} = \sum_{i,j=1}^3 a_i \epsilon_{ij1} \cdot \sum_{l,m=1}^3 b_l c_m \epsilon_{lmj}$$

(Hilfsregel: $\sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij1} \cdot \epsilon_{jlm} = \delta_{il}\delta_{1m} - \delta_{im}\delta_{1l}$ und mit $\epsilon_{ij1} = -\epsilon_{i1j}$)

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^3 a_i \epsilon_{ij1} \cdot \sum_{j,l,m=1}^3 b_l c_m \epsilon_{lmj} = - \sum_{i,j=1}^3 \sum_{l,m=1}^3 a_i b_l c_m \cdot \epsilon_{i1j} \cdot \epsilon_{jlm} = \\ & = \sum_{i,l,m=1}^3 a_i b_l c_m \cdot (-\delta_{il}\delta_{1m} + \delta_{im}\delta_{1l}) = \sum_{i=1}^3 (a_i b_1 c_i - a_i b_i c_1) \\ & = b_1 \cdot \sum_{i=1}^3 (a_i c_i) - c_1 \cdot \sum_{i=1}^3 (a_i b_i) = b_1(\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_1(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

2 Vektorwertige Funktionen

(mit eindimensionaler Quelle)

2.1 Definition: Vektorwertige Funktion

Eine vektorwertige Funktion sei hier eine Funktion mit $M \subset \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\vec{f} = M \rightarrow V, t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} (= \vec{r}(t))$$

2.2 Darstellung

Man stelle sich ein Teilchen vor, dass sich entlang einer willkürlichen Kurve fortbewegt, entlang der sog. *Raumkurve* oder *Bahn*. Diese Bahn kann dann durch eine vektorwertige zeitabhängige Funktion \vec{f} *parametrisiert* werden (nicht eindeutig, d.h. es gibt immer mehrere Möglichkeiten für eine Parametrisierung).

Die Menge $\{\vec{r}(t) | t \in M\}$ heißt *Raumkurve/Bahn*.

2.3 Beispiele

- im \mathbb{R}^2 :

Zu einer gegebenen Geraden $\tilde{m}x_1 + \tilde{t}$ ist $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x_1 \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{m}x_1 + \tilde{t} \end{pmatrix}$ mit geeignetem $\tilde{m}, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung der Geraden.

- im \mathbb{R}^3 :

Für eine gegebene Gerade $g = \left\{ t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ist

$\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung der Bahn g .

Ebenso wäre

$\tilde{\vec{f}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung (damit würde

sich das Teilchen doppelt so schnell der Bahn entlang bewegen).

Oder auch

$\tilde{\vec{f}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Aus der Parametrisierung: $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto R \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ 0 \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$ ergibt sich ein um den Ursprung rotierender Vektor in der $x_1 - x_3$ -Ebene mit Radius R ,

denn die Komponente $x_1(t) = \cos \omega t$ wandert zwischen $-1 \cdot R$ und $1 \cdot R$, ebenso die Komponente $x_3(t)$ (nur um $\pi/2$ phasenverschoben).

$$\bullet \vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos \omega t^3 \\ e^t \\ \sin \omega t^3 \end{pmatrix}$$

Zunächst betrachten wir $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos \omega t^3 \\ 0 \\ \sin \omega t^3 \end{pmatrix}$, wobei auffällt,

dass diese vektorwertige Funktion sich vom vorigen Beispiel nur darin unterscheidet, dass die Zeit in der dritten Potenz auftritt. Der Vektor führt also dieselbe Kreisbewegung aus, nur viel schneller. Nun betrachten wir noch die Komponente $x_2(t) = e^t$ unseres ursprünglichen Vektors, dieser zieht den Kreis zu einer Spirale auseinander, die für $t < 0$ immer enger wird und sozusagen in die $x_1 - x_3$ -Ebene hineinszilliert.

2.4 Überlegung: Teilchengeschwindigkeit

2.4.1 Differenzieren

Um die Geschwindigkeit einer Bahnbewegung eines Teilchens zu ermitteln, betrachten wir zunächst die Ableitung einer vektorwertigen Funktion:

Mit $\Delta \vec{f} = \vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)$ erhalten wir für immer kleinere Δt einen Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta t} = \frac{d\vec{f}}{dt} = \dot{\vec{f}}(t)$$

Allgemeine Rechenregeln:

(Beweise über Nachrechnen mit Basisvektor)

$$1. \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$$

$$2. (\vec{a}(t) + \vec{b}(t)) \dot{=} \dot{\vec{a}}(t) + \dot{\vec{b}}(t)$$

$$3. (g(t) \cdot \vec{a}(t)) \dot{=} \dot{g}(t) \cdot \vec{a}(t) + g(t) \cdot \dot{\vec{a}}(t)$$

$$4. (\vec{b}(t) \cdot \vec{a}(t)) \dot{=} \dot{\vec{b}}(t) \cdot \vec{a}(t) + \vec{b}(t) \cdot \dot{\vec{a}}(t)$$

$$5. (\vec{b}(t) \times \vec{a}(t)) \dot{=} \dot{\vec{b}}(t) \times \vec{a}(t) + \vec{b}(t) \times \dot{\vec{a}}(t) \text{ (nicht kommutativ!)}$$

Analoges wie oben, gilt für höhere Ableitungen.

Analog lassen sich vektorwertige Funktionen komponentenweise auch integrieren.

Beispiel: Einheitsvektor in beliebiger Richtung

Der Einheitsvektor $\vec{e}_{\vec{a}}$ in Richtung \vec{a} ist bei zeitabhängigem $\vec{a}(t)$ auch zeitabhängig, also $\vec{e}_{\vec{a}}(t)$. (Allgemein gilt: $\vec{e}_{\vec{a}}(t) = \frac{\vec{a}(t)}{|\vec{a}(t)|}$.)

Wir wollen nun dessen Ableitung betrachten. Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

$$\begin{aligned}\vec{e}_{\vec{a}}(t) \cdot \vec{e}_{\vec{a}}(t) &= 1 \\ \frac{d}{dt}(\vec{e}_{\vec{a}}(t) \cdot \vec{e}_{\vec{a}}(t)) &= \frac{d}{dt}1 = 0\end{aligned}$$

mit obiger Produktregel ergibt sich

$$\begin{aligned}2\left(\frac{d}{dt}\vec{e}_{\vec{a}}(t)\right) \cdot \vec{e}_{\vec{a}}(t) &= 0 \\ \Rightarrow \vec{e}_{\vec{a}}(t) \perp \frac{d}{dt}\vec{e}_{\vec{a}}(t)\end{aligned}$$

2.4.2 Bogenlänge

Die Bogenlänge s ist die Länge einer Bahn gemessen entlang der Kurve, ab einem willkürlich gewählten Anfangspunkt t_a bis zu einem Endpunkt t_e . Um diese Bogenlänge zu berechnen, teilen wir sie in n Bogenabschnitte für t_n Zeiten auf und addieren die Längen dieser Abschnitte.

Näherung für die Bogenlänge:

$$L_N(t_a, t_e) = \sum_{i=0}^{N-1} |\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)| = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{|\vec{r}(t_i + \Delta t) - \vec{r}(t_i)|}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

Für kleinere Abschnitte wird der berechnete Wert der Bogenlänge immer genauer: Für $N \rightarrow \infty$ folgt $\Delta t \rightarrow 0$ und man schreibt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{d}{dt}\vec{r}(t_i) \right| \cdot dt &= \int_{t_a}^{t_e} \left| \frac{d}{dt}\vec{r}(t^*) \right| dt^* \\ \Rightarrow \text{Bogenlänge } s(t) &= \int_{t_a}^t |\dot{\vec{r}}(t^*)| dt^*\end{aligned}$$

2.4.3 Geschwindigkeit

Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit entlang der Bahnkurve:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}(t)|$$

Beispiel: Kreisbewegung

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ 0 \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Wir wollen die Bogenlänge berechnen:

$$1. \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} -\omega \sin \omega t \\ 0 \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$2. \left| \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \right| = R\sqrt{(-\omega \sin \omega t)^2 + (\omega \cos \omega t)^2} = R \cdot \omega \sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = R \cdot \omega$$

$$3. s(t) = \int_0^t R\omega dt^* = R\omega t$$

Die Bogenlänge wird hier also durch die Formel $s = R\omega t$ ausgedrückt. Wir können nun den Ort in Abhängigkeit von dem auf der Kurve zurückgelegten Weg angeben:

$$t(s) = \frac{s}{R\omega} \Rightarrow \vec{r}(s) = R \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{R} \\ 0 \\ \sin \frac{s}{R} \end{pmatrix}$$

3 Das begleitende Dreibein

Natürliche Parametrisierung

Eine Parametrisierung einer Kurve mit Parameter s (Bogenlänge) heißt natürliche Parametrisierung.

Das begleitende Dreibein

Wir legen in jeden Kurvenpunkt ein Koordinatensystem mit Einheitsvektoren, das begleitende Dreibein (im \mathbb{R}^3), das sich aus dem Tangenteneinheitsvektor, Normaleneinheitsvektor und dem Binormaleneinheitsvektor zusammensetzt. Diese Vektoren bilden ein Rechtssystem (also $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$)

3.1 Die drei Einheitsvektoren

3.1.1 Tangenteneinheitsvektor

$$\vec{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad \text{mit Kettenregel:} \quad \vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$\vec{t}(s)$ liegt tangential an der Kurve im Punkt $\vec{r}(s)$.

Krümmung und Krümmungsradius:

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| \quad \text{heißt Krümmung der Bahn bei } \vec{r}(s).$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \quad \text{heißt Krümmungsradius der Bahn bei } \vec{r}(s)$$

3.1.2 Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}(s)}{ds}}{\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{t}(s)}{ds}$$

Da \vec{t} ein Einheitsvektor ist, steht seine Ableitung $\frac{d\vec{t}(s)}{ds}$ senkrecht auf \vec{t} , also $\vec{t} \perp \vec{n}$

3.1.3 Binormaleneinheitsvektor

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}.$$

Diese Betrachtungen gelten nur für Orte, für die gilt $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0$.

3.2 Schmiegungeebene

\vec{t} und \vec{n} beschreiben im Punkt \vec{r} offenbar eine Ebene, die sogenannte *Schmiegungeebene*. Folglich ist \vec{b} Normalenvektor zur Schmiegungeebene. Die Änderung von $\vec{b}(s)$ beschreibt eine „Richtungsänderung“ der Ebene. $\frac{d\vec{b}(s)}{ds}$ beschreibt, wie stark sich die Kurve aus der Schmiegungeebene herausdreht.

Torsion und Torsionsradius

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{b}(s)}{ds} &= \frac{d}{ds}(\vec{t} \times \vec{n}) = \frac{d}{ds}\vec{t} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d}{ds}\vec{n} = \vec{n} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d}{ds}\vec{n} = \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} &= \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{t} \text{ und } \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b} \quad \text{mit einigen Richtungsüberlegungen:} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau \vec{n}\end{aligned}$$

τ heißt Torsion der Raumkurve

$\vartheta = \frac{1}{\tau}$ heißt Torsionsradius

weitere Größe:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{n}}{ds} &= \frac{d}{ds}(\vec{b} \times \vec{t}) = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \times \frac{d\vec{t}}{ds} = -\tau \vec{n} \times \vec{t} + \kappa \vec{b} \times \vec{n} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}\end{aligned}$$

Zusammenfassung: Fresnet'sche Formeln

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{t}}{ds} &= \kappa \vec{n} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}\end{aligned}$$

Anwendung

Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenpunktes

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{t} \quad |\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \cdot \vec{t} \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{ds}{dt} \right) \vec{t} + \frac{ds}{dt} \frac{d}{dt} \vec{t} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v^2 \frac{d\vec{t}}{ds} \\ \Rightarrow \vec{a}(t) &= \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \quad (\text{Tangentialkomponente} + \text{Normalkomponente})\end{aligned}$$

4 Felder

4.1 Skalares Feld

Ein skalares Feld ist eine Abbildung

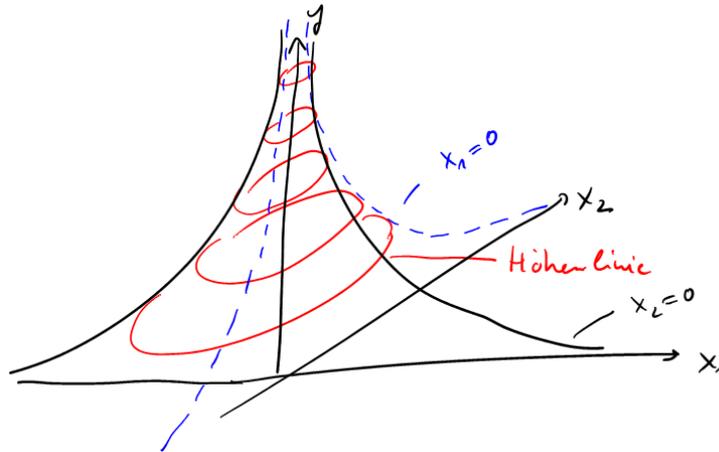
$$\phi : M \rightarrow N, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \phi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \quad \text{wobei } M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}$$

In der Regel ist $M \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$.

ϕ ordnet also jedem Ort des $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ einen Skalar zu.

Beispiel

$$\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(= \frac{1}{r} \right)$$



Konstante Funktionswerte für konstante Abstände des Arguments $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vom Ursprung. ($\phi(x_1, x_2) = \text{const.}$ für $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \text{const.}$)

Menge der roten Höhenlinien:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \phi(x_1, x_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \text{const. bzw. fest} \right\}$$

Meist bezeichnet man die Projektion der roten Höhenlinien auf die x_1-x_2 -Ebene als Höhenlinien:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \text{const. bzw. fest} \right\}$$

4.2 Vektorfeld

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$\vec{a}: M \rightarrow N, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \vec{a} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ mit } M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^m.$$

\vec{a} ordnet also jedem Punkt der Ebene/des Raums einen Vektor zu.

Beispiel 1

$$\vec{a}(\vec{r}) = \alpha \vec{r}$$

Jedem Punkt in der Ebene wird ein Vektor $\alpha \vec{r}$ zugeordnet, welcher zur Veranschaulichung mittig an diesem Punkt platziert wird. (hier: radial um den Ursprung Vektoren mit nach außen hin immer höherem Betrag)

Beispiel 2

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (\text{elektrisches Feld})$$

4.3 Partielle Ableitungen

Wir betrachten die Änderungsraten parallel zu den Koordinatenachsen.

4.3.1 Partielle Ableitung im skalaren Feld

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\phi(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_m) - \phi(x_1, \dots, x_m)}{\Delta x_i} =: \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ heißt Partielle Ableitung von ϕ nach x_i . (Halte alle Variablen außer x_i fest, leite nach x_i ab.) Weitere Schreibweisen: $\partial_{x_i} \phi$ oder ϕ_{x_i} .

Beispiel

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = (\sin x_1) x_2^5 e^{x_3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = (\cos x_1) x_2^5 e^{x_3}$$

4.3.2 Partielle Ableitung im Vektorfeld

Hier wird die Partielle Ableitung komponentenweise vorgenommen.

Beispiel

$$\vec{a}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial x_1} = -x_2 \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = -x_1$$

Analog definieren sich die höheren partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 x_2} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 x_1} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}$$

wobei die rechte Ableitung immer zuerst erfolgt.

Rechenregeln

1. $\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi + \varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\phi + \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$
2. $\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{a}\right) \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{b}\right)$
3. $\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{a} \times \vec{b}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{a}\right) \times \vec{b} + \vec{a} \times \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{b}\right)$

Sind x_i Funktionen, so ergibt sich die Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}\phi(x_1(t), x_2(t)) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt}$$

4.3.3 Totales Differential

Sind nun alle x_i von einem Parameter t abhängig (sprechen wir also von einer Parametrisierung $\phi(x_1(t), x_2(t))$), ergibt sich für die Änderungsrate (der Bahnkurve) in Abhängigkeit von der Zeit:

$$D = \frac{\phi(x_1(t + \Delta t), x_2(t + \Delta t)) - \phi(x_1(t), x_2(t))}{\Delta t}$$

mit $x_i(t + \Delta t) = x_i + \Delta x_i$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{\Delta t} (\phi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - \phi(x_1, x_2 + \Delta x_2) + \phi(x_1, x_2 + \Delta x_2) - \phi(x_1, x_2)) \\ &= \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \cdot \frac{\phi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - \phi(x_1, x_2 + \Delta x_2)}{\Delta x_1} + \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \cdot \frac{\phi(x_1, x_2 + \Delta x_2) - \phi(x_1, x_2)}{\Delta x_2} \end{aligned}$$

Nun ergibt sich mit $\Delta t \rightarrow 0$ (und damit $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} D = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} =: \frac{d\phi}{dt}$$

$$\text{also: } d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2$$

4.3.4 Nabla $\vec{\nabla}$

Im Dreidimensionalen ergibt sich aus dem totalen Differential:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \phi \right) \cdot \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Der Vektor $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ leitet, was rechts von ihm steht, nach x_1, x_2, x_3 ab.

Beispiel 1

$$\vec{\nabla}(x_1 x_2^2 \cos x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 x_2^2 \cos x_3) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 x_2^2 \cos x_3) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1 x_2^2 \cos x_3) \end{pmatrix} = \dots$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} a(x_1, x_2, x_3) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2, x_3) \\ a_2(x_1, x_2, x_3) \\ a_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} a_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} a_2(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} a_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

\Rightarrow Mit $\vec{\nabla}$ lässt sich wie mit einem „normalen“ Vektor rechnen, solange man keine Reihenfolgen vertauscht.

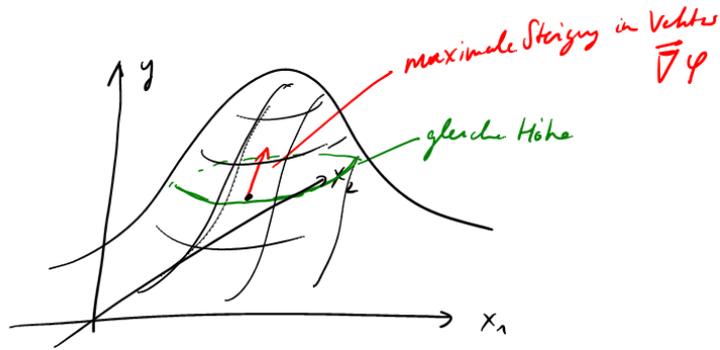
Geometrische Interpretation

Aus (3): $\frac{d\phi}{dt} = \vec{\nabla}\phi \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} d\phi &= \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = |\vec{\nabla}\phi| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\theta \quad (\text{Skalarprodukt: } \vec{a}\vec{b} = ab \cos\theta) \\ \Rightarrow \frac{d\phi}{|d\vec{r}|} &= |\vec{\nabla}\phi| \cos\theta \end{aligned} \quad (4)$$

Die Änderungsrate $\frac{d\phi}{|d\vec{r}|}$ wird also maximal, wenn $\theta = 0$, d.h. wenn $d\vec{r} \parallel \vec{\nabla}\phi$.

$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi$ beschreibt Richtung und Betrag der *maximalen Änderung* von ϕ .



Für andere Richtungen, also für $\vec{\nabla} \phi \parallel d\vec{r}$ ergibt sich aus (4) die Steigung von ϕ in \vec{r} -Richtung: $\frac{d\phi}{|d\vec{r}|} = |\vec{\nabla} \phi| \cos \theta = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{e}_r$ (Projektion von $\vec{\nabla} \phi$ auf $d\vec{r}$).

Extremfall: Bewegung senkrecht zu $\vec{\nabla} \phi$: $d\vec{r} \perp \vec{\nabla} \phi \Leftrightarrow d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 = d\phi$
 \Rightarrow ...findet auf Linie (Ebene) gleicher Höhe statt.

4.3.5 Bezeichnungen

1. $\vec{\nabla} \phi$ =: grad ϕ (Gradient, Vektor)
(Richtung und Betrag der größten Änderungsrate eines skalaren Feldes ϕ)
2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ =: div \vec{a} (Divergenz, Skalar)
(Quellenstärke eines Vektorfeldes \vec{a})
3. $\vec{\nabla} \times \vec{a}$ =: rot \vec{a} (Rotation, Vektor)
(Wirbelstärke eines Vektorfeldes \vec{a} , z.B.: $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ = Ladungsdichte)

5 Das Potential

Definition

Sei ϕ skalares Feld, \vec{a} Vektorfeld. Gilt

$$\vec{a} = \text{grad } \phi \quad (5)$$

dann heißt ϕ *Potential* von \vec{a} , und \vec{a} heißt *Gradientenfeld* von ϕ .

Fragestellung

Für welche \vec{a} gibt es ein Potential ϕ ?

Wenn ein ϕ mit $\vec{a} = \text{grad } \phi$ existiert, muss gelten:

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x_1, x_2, x_3) \\ a_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x_1, x_2, x_3) \\ a_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\vec{a} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für ein Potential von \vec{a} muss also gelten:

$$\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \phi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_1^2 + C_1(x_2, x_3) \\ 2x_1x_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \phi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2 + C_2(x_1, x_3) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \phi(x_1, x_2, x_3) = C + C_3(x_1, x_2) \end{aligned}$$

\Rightarrow Ein Potential ist möglicherweise also $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^2$.

Bemerkung:

Wenn obiges Gleichungssystem nicht lösbar ist, gibt es kein Potential.

Bsp.: $\vec{a}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ ist ein Wirbelfeld.

Wäre hier \vec{a} ein Gradientenfeld (d.h. gäbe es ein Potential ϕ), würde das Feld jedem Punkt in der Ebene einen Vektor maximaler Steigung ($\vec{\nabla}\phi$) zuordnen. Da sich ein Punkt im Wirbelfeld aber auf einer geschlossenen Kreisbahn bewegt, kann es kein Potential geben, denn der Punkt würde - obwohl er sich immerzu in die „steilste“ Richtung bewegt - irgendwann wieder an den Startpunkt gelangen, was nicht möglich ist.

Erweiterte Fragestellung

Gibt es zu einem Vektorfeld \vec{a} ein Vektorfeld \vec{b} , sodass

$$\vec{a} = \text{rot } \vec{b} \quad (\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{b})$$

Soetwas kann auftreten, ist aber umständlich auszurechnen.

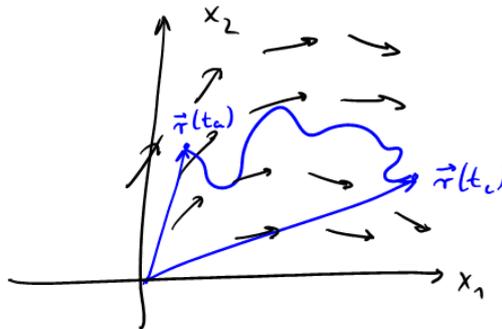
Tritt auf, wenn $\text{div } \vec{a} = 0$. \vec{b} heißt dann Vektorpotential von \vec{a} (z.B. ein Normalenvektor auf einem Wirbelfeld).

(Analog: Existenz eines Potentials für $\text{rot } \vec{a} = 0$.)

5.1 Kurven-/Linienintegrale

Gegeben sei $\vec{a} : M \rightarrow M$ ein Vektorfeld, Γ eine Kurve in der Definitionsmenge des Vektorfelds, d.h. Γ wird beschrieben durch

$$r : [t_a; t_e] \rightarrow M, t \mapsto \vec{r}(t) \quad (= \Gamma(t))$$

**Anwendung**

Sei \vec{a} ein Kraftfeld. Ein Teilchen/eine Ladung bewegt sich entlang Γ , welche Arbeit muss aufgewendet werden?

An jedem Punkt ist die Arbeit $d\phi = \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ aufzuwenden. Daraus ergibt sich die Gesamtarbeit:

$$\Delta\phi = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_e} \text{entlang } \Gamma \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (\text{Summation über alle } d\phi)$$

$$= \int_{t_a}^{t_e} \vec{a}(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt \quad (,Erweiterung mit dt')$$

Dieses Integral heißt Kurven- oder Linienintegral.

Beispiel (drei mögliche Bahnkurven)

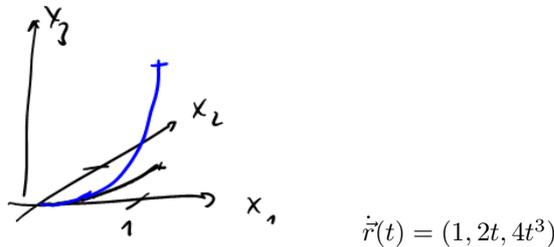
$$\vec{a}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 2x_1x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir untersuchen nun drei Bahnkurven, auf denen sich ein Massenpunkt vom Ursprung $(0, 0, 0)$ zur Koordinate $(1, 1, 1)$ bewegt, auf ihr Kurvenintegral.

1. Möglichkeit: $\Gamma_1 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t, t)$ ($= \vec{r}(t)$).

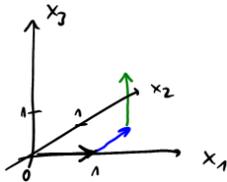
$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{a}(\vec{r}(t)) d\vec{r} &= \int_0^1 (\vec{a}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)) dt & \left[\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \int_0^1 [a_1(\vec{r}(t)) \cdot 1 + a_2(\vec{r}(t)) \cdot 1 + a_3(\vec{r}(t)) \cdot 1] dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^2) dt = [t^3]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: $\Gamma_2 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t^2, t^4)$ ($= \vec{r}(t)$).



$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{a}(\vec{r}(t)) d\vec{r} &= \int_0^1 (\vec{a}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)) dt = \int_0^1 (t^4 \cdot 1 + 2t^3 \cdot 2t + 0 \cdot 4t^3) dt \\ &= \int_0^1 5t^4 dt = [t^5]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

3. Möglichkeit: $\Gamma_3 : [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{cases} (t, 0, 0) & \text{für } t \in [0; 1] \\ (1, t-1, 0) & \text{für } t \in [1; 2] \\ (1, 1, t-2) & \text{für } t \in [2; 3] \end{cases}$



\Rightarrow Kann wie oben ausgerechnet werden (Integration über t), ist aber relativ aufwendig... Schneller: „direktes Ausrechnen“:

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} [a_1(\vec{r}) \cdot dx_1 + a_2(\vec{r}) \cdot dx_2 + a_3(\vec{r}) \cdot dx_3] \\ &= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} a_1(\vec{r}) dx_1 + \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} a_2(\vec{r}) dx_2 + \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} a_3(\vec{r}) dx_3 \\ &= \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} x_2^2 dx_1 + \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2x_1 x_2 dx_2 + \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 0 dx_3 \end{aligned}$$

→ dx_1 nimmt nur einen Wert an, wenn sich der Massenpunkt in x_1 -Richtung bewegt; für die Intervalle $[1, 2], [2, 3]$ bewegt sich der Punkt aber nur in x_2 - und x_3 -Richtung (Analoges gilt für dx_2):

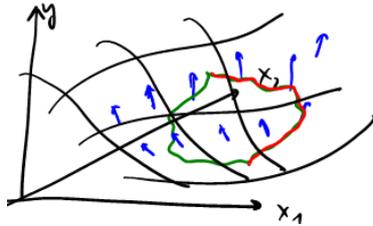
$$= \int_0^1 x_2^2 dx_1 + \int_0^1 2x_1x_2 dx_2 + 0$$

→ x_2^2 hat aber auf dem Weg auf der x_1 -Achse den Wert 0; x_1 hat auf dem Weg in Richtung der x_2 -Achse den Wert 1.

$$= 0 + \int_0^1 2x_2 dx_2 = [x_2^2]_0^1 = 1$$

⇒ Für alle drei Wege ergibt sich als Kurvenintegral der Wert 1! Ein Zufall?

Erklärung: Wir betrachten zwei Kurvenintegrale in einem Gradientenfeld (also in einem Vektorfeld mit Potential):



$$d\phi = \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \text{grad}\phi \cdot d\vec{r}$$

Für die beiden Linienintegrale gilt also:

$$\Delta\phi = \int_{\text{grün}} \text{grad}\phi \cdot d\vec{r} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\phi = \int_{\text{rot}} \text{grad}\phi \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta\phi = \int \text{grad}\phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}_e) - \phi(\vec{r}_a) \quad (6)$$

⇒ Für Gradientenfelder... ⇔ Falls zu einem Vektorfeld ein Potential existiert,...
... ist $\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_e} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r}$ wegunabhängig.

Man kann auch die Umkehrung zeigen: Wenn die Kurvenintegrale wegunabhängig sind, dann existiert ein Potential ϕ .

Bemerkung:

Alle Kurvenintegrale sind wegunabhängig ⇔ alle Kurvenintegrale über geschlossene Kurven haben den Wert 0.

Begründung:

„⇒“: $\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_e} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = \phi(\vec{r}_e) - \phi(\vec{r}_a)$ (geschlossene Kurve: $\vec{r}_a = \vec{r}_e$) = 0.

„⇐“: Γ_3 sei eine geschlossene Bahnkurve, zusammengesetzt aus den Wegen Γ_1 und Γ_2 , dann gilt:

$$0 = \int_{\Gamma_3} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \dots - \int_{\Gamma_2} \dots$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Gamma_1} \dots = \int_{\Gamma_2} \dots \Leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ wegunabhängig.}$$

⇒ Hat jedes Integral über eine geschlossene Kurve von \vec{a} den Wert 0, so besitzt \vec{a} ein Potential.

weiteres Kriterium für ein Potential

Sei \vec{a} Vektorfeld, das auf einem *einfach zusammenhängenden Gebiet*¹ definiert ist, dann existiert ein Potential ϕ mit $\vec{a} = \vec{\nabla}\phi$, wenn

$$\text{rot } \vec{a} = 0$$

Begründung:

$$\text{„}\Rightarrow\text{“: } \vec{a} = \vec{\nabla}\phi \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})\phi = \vec{0}$$

„\Leftarrow“ aufwendig!

5.2 Kriterien für die Existenz eines Potentials (Zus.)

Es existiert für ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ ein Potential, wenn...

1. $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi$ (direkt über die Definition in (5) (komponentenweise))
2. ... alle Kurvenintegrale wegunabhängig sind (siehe bei (6)).
3. ... jedes Integral über eine geschlossene Kurve den Wert 0 hat.
4. $\text{rot } \vec{a} = 0$ (für einfach zusammenhängendes Gebiet)
5. $\forall i, j \quad \frac{\partial}{\partial x_i} a_j = \frac{\partial}{\partial x_j} a_i$ (entspricht im Dreidimensionalen obigem 4.)

¹einfach zusammenhängendes Gebiet: jede geschlossene Kurve lässt sich zu einem Punkt zusammenziehen, d.h. innerhalb der Kurve darf kein „Loch“ (=Definitionsücke) im Feld auftreten.

6 Differentiale

Linienintegrale summieren infinitesimale Änderungen längs einer Kurve, hierzu Vektorfeld:

Die Änderung lässt sich beschreiben:

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Gesamtänderung:

$$\begin{aligned} & \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{entlang } \Gamma \quad a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \quad (\text{Linienintegral}) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} a_1 \frac{dx_1}{dt} dt + a_2 \frac{dx_2}{dt} dt + a_3 \frac{dx_3}{dt} dt \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^4 \end{pmatrix} \\ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 &= \int_0^1 a_1 \frac{dx_1}{dt} dt + a_2 \frac{dx_2}{dt} dt + a_3 \frac{dx_3}{dt} dt \\ \int_0^1 (t^2)^2 1 dt + 2tt^2 2t dt &= \int_0^1 5t^4 dt = [t^5]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

Ausdrücke der Gestalt $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$ heißen *Differentiale*. Jedes Differential wird durch das Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ beschrieben und umgekehrt.

Fragestellung

Wann sind diese Integrale wegunabhängig?

⇒ Bisher: Wenn zum zugehörigen Vektorfeld ein Potential existiert. (siehe **5.2**)

Wenn also $\vec{a}(\vec{r})$ ein Gradientenfeld ist, d.h. wenn ein Potential existiert, gilt offenbar:

$$a_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad a_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad a_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$$

und für die höheren Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi$.

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} a_j = \frac{\partial}{\partial x_j} a_i \quad (\text{für alle } i, j)$$

Man kann zeigen (schwierig!), dass bei einfach zusammenhängenden Gebieten auch die Umkehrung gilt:

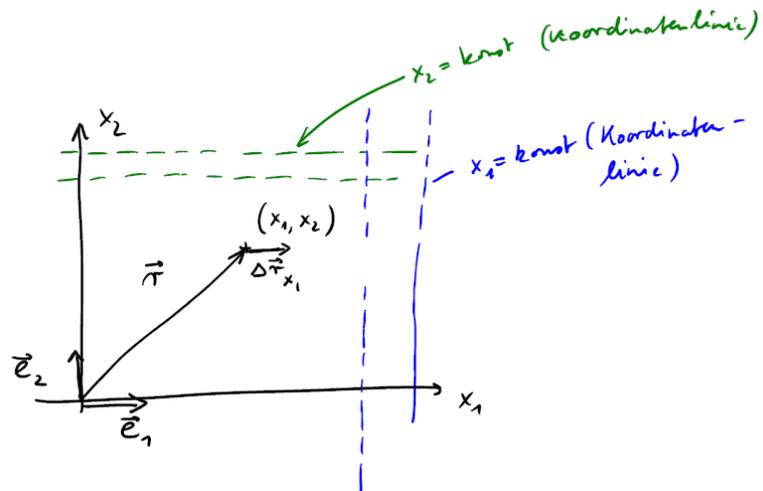
$$\forall i, j \quad \frac{\partial}{\partial x_i} a_j = \frac{\partial}{\partial x_j} a_i \quad \Rightarrow \exists \text{ Potential } \phi$$

Wenn nun zu einem Differential (zum zugehörigen Vektorfeld) ein Potential existiert, dann heißt das Differential *total* oder *exakt*. Das Potential heißt auch *Stammfunktion*.

7 Koordinatensysteme

7.1 Zweidimensional

7.1.1 Kartesisches Koordinatensystem



Einheitsvektoren

- Verschiebe Punkt (x_1, x_2) in x_1 -Richtung:

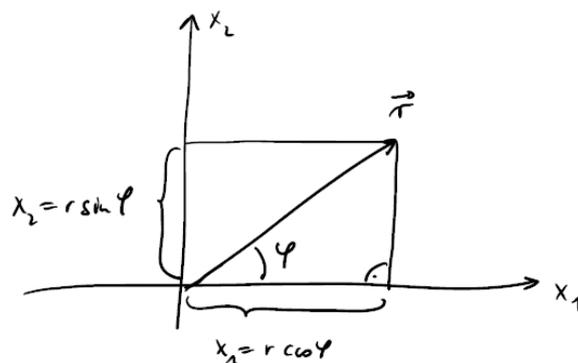
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{e}_1 =: \vec{e}_{x_1}$$

- Verschiebe Punkt (x_1, x_2) in x_2 -Richtung:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \vec{e}_2 =: \vec{e}_{x_2}$$

\Rightarrow Rechtwinkliges ($\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$), geradliniges (Koord.-linien sind Geraden) KS.

7.1.2 Polarkoordinatensystem

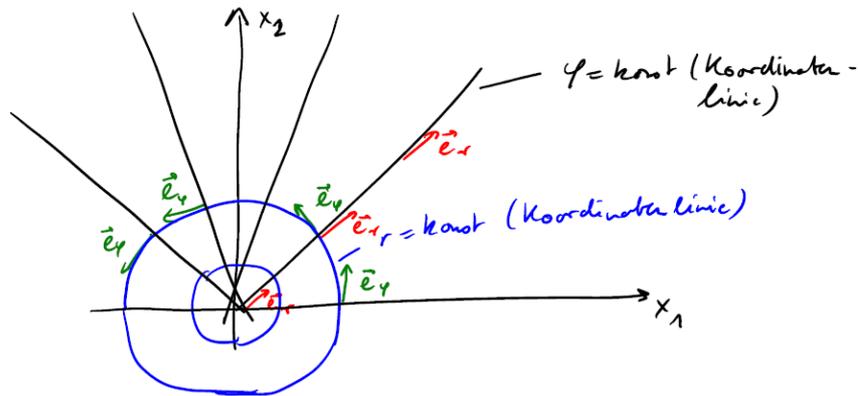


Betrachte statt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ die Koordinaten $r \in [0; \infty[$ $\phi \in [0; 2\pi[$ mit

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \phi = \arctan \frac{x_1}{x_2} \text{ bzw. } \phi = \arctan \frac{x_2}{x_1} + \pi$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$$

Offenbar existiert also 1:1-Zuordnung, die jedem Koordinatenpaar (x_1, x_2) ein Koordinatenpaar $(r; \phi)$ zuordnet (außer bei $(0, 0)$).



Einheitsvektoren

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ → hat den Betrag 1 $\Rightarrow \vec{e}_r := \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$
- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}$ → hat den Betrag r $\Rightarrow \vec{e}_\phi := \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$

⇒ Rechtwinkliges, krummliniges Koordinatensystem.

⇒ Einheitsvektoren tangential zu Koordinatenlinien.

⇒ Transformation: kartesische Koord. → Polarkoord. durch Drehung um ϕ .

7.1.3 Allgemein

Seien α, β neue Koordinaten.

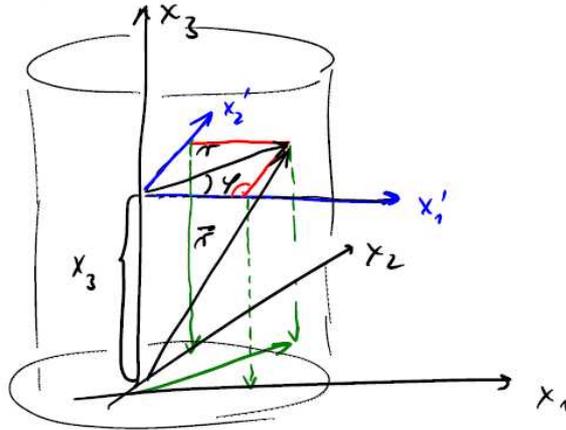
Einheitsvektoren

- $\vec{e}_\alpha = \frac{1}{b_\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$ mit $b_\alpha = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|$
- $\vec{e}_\beta = \frac{1}{b_\beta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}$ mit $b_\beta = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right|$

(Hierfür \vec{r} in Abhängigkeit von α und β darstellen: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1(\alpha, \beta) \\ x_2(\alpha, \beta) \end{pmatrix}$).

7.2 Dreidimensional

7.2.1 Zylinderkoordinatensystem



Wir betrachten nun die Koordinaten $r \in [0; \infty]$, $\phi \in]0; 2\pi]$, $x_3 \in \mathbb{R}$.
 \Rightarrow Polarkoordinaten in der $x'_1 - x'_2$ -Ebene, x_3 -Koordinate bleibt.

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Zylinder mit Radius R und Höhe zwischen h_1 und h_2

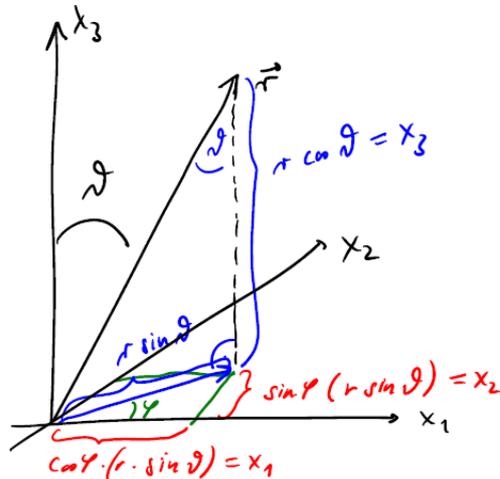
$$\left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ wobei } r \in [0; R], \phi \in]0; 2\pi], x_3 \in [h_1; h_2] \right\}$$

Einheitsvektoren

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} := \vec{e}_r$
- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $b_\phi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = r \Rightarrow \vec{e}_\phi = \frac{1}{b_\phi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{e}_{x_3} = \vec{e}_3$

\Rightarrow Krummliniges, rechtwinkliges KS.

7.2.2 Kugelkoordinatensystem



Wir betrachten nun $r \in [0; \infty[$ $\varphi \in [0; 2\pi[$ $\vartheta \in [0; \pi]$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} := \vec{e}_r$ da $b_r = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1$
- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $b_\varphi = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \vartheta \Rightarrow \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix}$ mit $b_\vartheta = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| = r \Rightarrow \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$

\Rightarrow Krummliniges, rechtwinkliges KS.

7.3 Differentiale in anderen Koordinatensystemen

Ein gegebener Ortsvektor \vec{r} ist von den Koordinaten y_1, y_2, y_3 abhängig.

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \begin{pmatrix} dx_1(y_1, y_2, y_3) \\ dx_2(y_1, y_2, y_3) \\ dx_3(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_1}{\partial y_i} dy_i \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_2}{\partial y_i} dy_i \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_3}{\partial y_i} dy_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 dy_i \frac{\partial}{\partial y_i} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 dy_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 dy_i b_{y_i} \vec{e}_{y_i} \end{aligned}$$

Beispiele

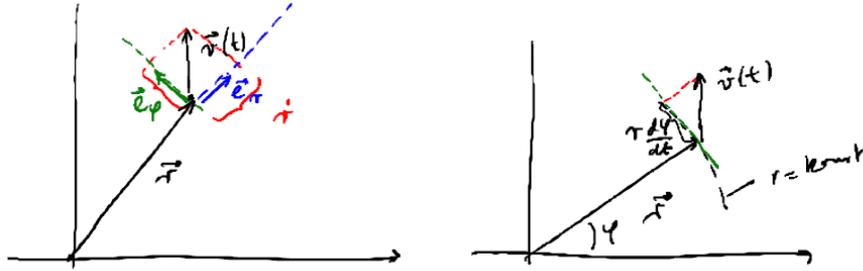
- **Polarkoordinaten:** $d\vec{r} = dr b_r \vec{e}_r + d\varphi b_\varphi \vec{e}_\varphi = dr \vec{e}_r + d\varphi r \vec{e}_\varphi$

- **Ausflug in die Theoretische Mechanik:**

Bewegung eines Massenpunktes in der Ebene, beschrieben durch $\vec{r}(t)$.

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + \frac{d\varphi}{dt} r \vec{e}_\varphi = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Gleichzeit ist aber } \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r \quad \Rightarrow \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

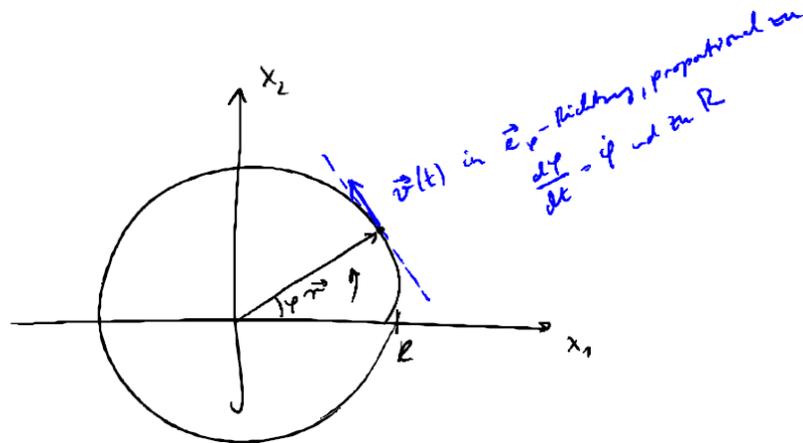


- **Kreisbewegung:** $\vec{r}(t) = R \vec{e}_r \quad R = \text{const.}$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{R} \vec{e}_r + R \dot{\vec{e}}_r = R \dot{\vec{e}}_r$$

Mit obiger Regel:

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{R} \vec{e}_r + R \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = R \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad \Rightarrow \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$



Analoge Rechnung mit $\vec{a}(t)$ liefert: $\dot{\vec{e}}_\varphi \perp \vec{e}_\varphi$ und $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_r$

7.4 $\vec{\nabla}$ in anderen Koordinatensystemen

Für seine i -te Komponente im (y_1, y_2, y_3) -System gilt (ϕ ist skalares Feld):

$$(\vec{\nabla} \phi)_{y_i} = \vec{e}_{y_i} \text{ grad } \phi = \left(\frac{1}{b_{y_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right) \text{ grad } \phi$$

$$= \frac{1}{b_{y_i}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial y_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{y_1}} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{1}{b_{y_2}} \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \frac{1}{b_{y_3}} \frac{\partial}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

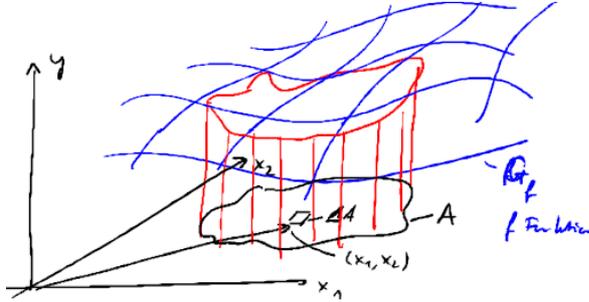
Beispiel

Kugelkoordinaten, mit $b_r = 1, b_\varphi = r \sin \vartheta, b_\vartheta = r$

$$\vec{\nabla}_{kug} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \end{pmatrix}$$

8 Mehrdimensionale Integration

Motivation



Wie groß ist das Volumen zwischen Grundfläche A und dem Graph G_f ?

Näherung

Zerlege A näherungsweise in Flächenstücke ΔA .

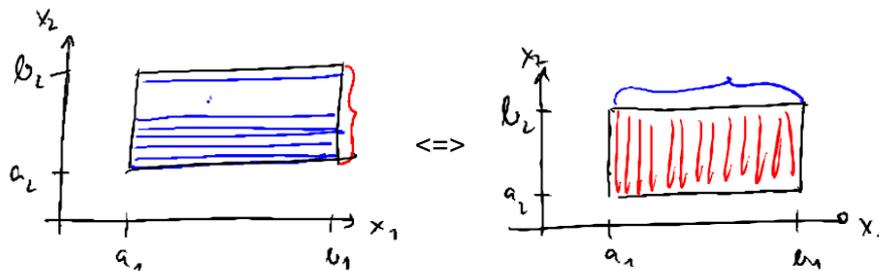
$$\Rightarrow \text{Volumen} = \sum_{\Delta A} f(x_1, x_2) \cdot \Delta A \xrightarrow{\Delta A \rightarrow 0} \iint_A f(x_1, x_2) dA$$

($dA = dx_1 \cdot dx_2$ infinitesimales „rechteckiges“ Flächenelement)

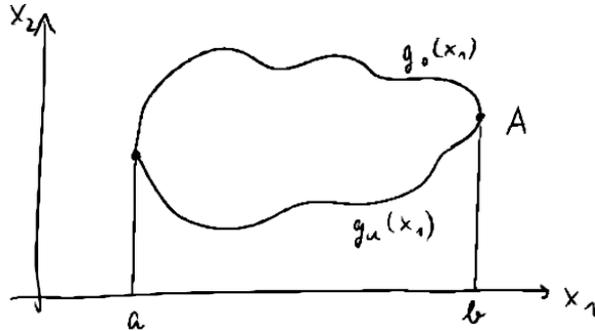
8.1 Spezialfall: Rechteck als Grundfläche

$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$; Dann ist das Volumen:

$$\iint_A f(x_1, x_2) dA = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$



8.2 Allgemein: Integration über krummlinige Flächen



Für die Punkte in A gilt: $a \leq x_1 \leq b$ und $g_u(x_1) \leq x_2 \leq g_o(x_1)$

Für die Fläche A gilt dann

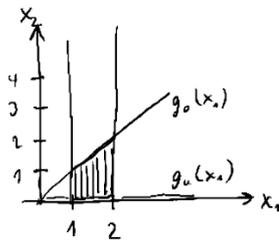
$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x_1 \leq b \wedge g_u(x_1) \leq x_2 \leq g_o(x_1)\}$$

Für das Volumen gilt dann

$$\iint_A f(x_1, x_2) dA = \int_a^b \left(\int_{g_u(x_1)}^{g_o(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

Beispiel 1

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto 2x_1x_2 \quad \text{mit } a = 1; b = 2; g_u(x_1) = 0; g_o(x_1) = x_1$$



$$\text{Volumen: } \iint_A f(x_1, x_2) dA = \int_1^2 \left(\int_0^{x_1} 2x_1x_2 dx_2 \right) dx_1$$

(Zwischenbemerkung: $\int_0^{x_1} \left(\int_1^2 2x_1x_2 dx_1 \right) dx_2$ wäre nicht sinnvoll!)

$$= \int_1^2 [x_1x_2^2]_0^{x_1} dx_1 = \int_1^2 x_1^3 dx_1 = \left[\frac{x_1^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{4}$$

Nebenbemerkung

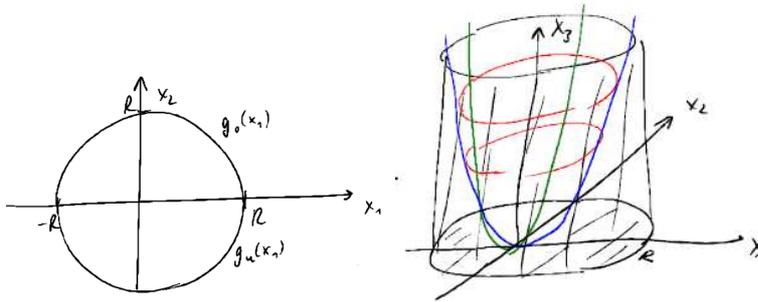
Falls die Grundfläche nicht direkt in $g_u(x_1)$ und $g_o(x_1)$ aufteilbar ist



in mehrere Flächenstücke aufteilen und das Volumen einzeln berechnen.

Beispiel 2

Die Grundfläche ist eine Kreisscheibe:



$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$$

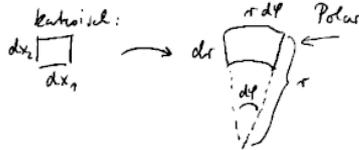
$$\iint f(x_1, x_2) dA = \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} (x_1^2 + x_2^2) dx_2 \right) dx_1 = \dots = \frac{R^4}{2} \pi$$

Kürzere Möglichkeit: Umwandlung in Polarkoordinaten

$$(r, \varphi) \rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = (x_1, x_2)$$

Kreisscheibe (KS):

- kartesisch: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$
- polar: $\{(r, \varphi) \in [0; \infty[\times [0; 2\pi[: r \leq R\} = [0; R] \times [0; 2\pi]$



$$\begin{aligned} \iint_{\text{KS}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \iint_{\text{KS}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R [(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2] r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\varphi = \frac{R^4}{2} \pi \end{aligned}$$

Allgemein: infinitesimale Größen in anderen KS

Seien y_1, y_2, y_3 Koordinaten eines anderen Koordinatensystems als dem kartesischen, dann ist

$$dx_1 dx_2 dx_3 = by_1 dy_1 by_2 dy_2 by_3 dy_3$$

Beispiel 3

Masse eines homogenen Vollzylinders mit Dichte ρ .



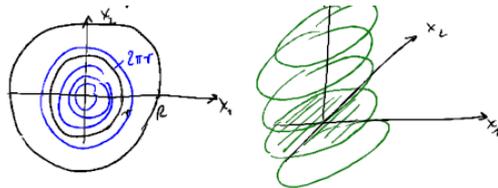
$$M = \sum_{\Delta m} \Delta m = \sum \rho \Delta V \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} = \iiint_{\text{Zyl.}} \rho dV = \rho \iiint_{\text{Zyl.}} dx_1 dx_2 dx_3$$

Zylinder:

- kartesisch: $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \text{ und } h_1 \leq x_3 \leq h_2\}$
- Zylinderkoordinat.: $\{(r, \varphi, x_3) \in [0; R] \times [0; 2\pi] \times [h_1; h_2]\}$

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{h_1}^{h_2} r dx_3 d\varphi dr \quad (b_{x_3} = 1, b_r = 1, b_\varphi = r) \\ &= \rho \int_{h_1}^{h_2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\varphi dr dx_3 = \rho \int_{h_1}^{h_2} \int_0^R 2\pi r dr dx_3 = \rho \int_{h_1}^{h_2} \pi R^2 dx_3 \\ &= \rho \pi R^2 (h_2 - h_1) \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation:



- Inneres Integral liefert Kreislinie (Summation von Punkten)
- Mittleres Integral liefert Kreisfläche (Summation von Linien)
- Äußerstes Integral liefert Zylindervolumen (Summation von Kreisflächen)

Allgemein: Volumen-/Flächeninhalt

Beobachtung: Offenbar ist $\iiint_{\text{Zyl.}} dx_1 dx_2 dx_3 = \text{Zylindervolumeninhalt}$

\implies Flächeninhalt eines Körpers $A = \iint_K dA = \iint_K dx_1 dx_2$

\implies Volumeninhalt eines Körpers $V = \iiint_K dV = \iiint_K dx_1 dx_2 dx_3$

9 Oberflächenintegrale

Motivation

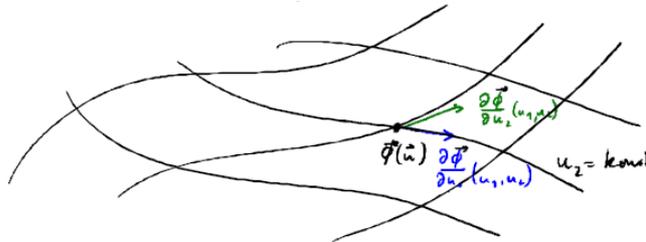
Durchfluss durch eine Fläche.

Notwendig ist dafür zum einen ein Vektorfeld, das den Fluss beschreibt und zum anderen eine *Parametrisierung der Fläche*.

9.1 Definition: Parametrisierung einer Fläche

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ (offen), so beschreibt eine fast überall injektive Funktion ϕ , die stetig partiell differenzierbar ist, ein Flächenstück im \mathbb{R}^3 , wenn folgendes gilt:

1. U ist zweidimensionale Fläche (in MP2)
2. Für obige Funktion ϕ gilt:
 $\frac{\partial}{\partial u_1} \phi(\vec{u})$ und $\frac{\partial}{\partial u_2} \phi(\vec{u})$ sind linear unabhängig $\forall \vec{u} = (u_1, u_2)$



- Variiere u_1 : $\phi(u_1, u_2) \rightarrow \phi(u_1 + \Delta u_1, u_2)$
für $\Delta u_1 \rightarrow 0$: Änderungsrate $\frac{\partial}{\partial u_1} \phi(u_1, u_2)$
- Variiere u_2 : $\phi(u_1, u_2) \rightarrow \phi(u_1, u_2 + \Delta u_2)$
für $\Delta u_2 \rightarrow 0$: Änderungsrate $\frac{\partial}{\partial u_2} \phi(u_1, u_2)$

Die partiellen Ableitungen von ϕ beschreiben die Tangentialebene an die Fläche im Punkt $\phi(u_1, u_2)$.

Insbesondere beschreibt $\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial \phi}{\partial u_2}(u_1, u_2)$ den Normalenvektor der Tangentialebene im jeweiligen Punkt.

Bemerkung

In der Regel ist diese Parametrisierung nicht eindeutig, insbesondere ist die Orientierung des Normalenvektors von der Parametrisierung abhängig.

Beispiele

1. Ebene mit Aufpunkt \vec{a} und Richtungsvektoren \vec{b}, \vec{c} :
 $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u_1, u_2) \mapsto \vec{a} + u_1 \vec{b} + u_2 \vec{c}$

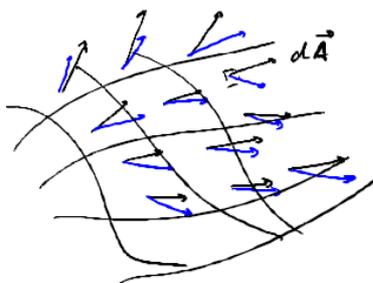
2. obere Halbkugel:

$$\phi: [0; 2\pi[\times [0; \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3, (\varphi, \vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \varphi \sin \vartheta \\ R \sin \varphi \sin \vartheta \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

9.2 Durchfluss durch eine Fläche

Wir suchen nun die Gesamtmenge pro Zeit eines Flusses, der durch die Fläche fließt.

Anschaulich



Der Durchfluss durch ein Flächenstück dA mit Normalenvektor $d\vec{A}$ ist umso größer, je kleiner der Winkel zwischen $d\vec{A}$ und dem Vektorfeld \vec{f} , das den Fluss beschreibt, ist. ($d\vec{A} \perp \vec{f} \Rightarrow$ kein Durchfluss; $d\vec{A} \parallel \vec{f} \Rightarrow$ maximaler Durchfluss)

$$\Rightarrow \iint_A \vec{f} \cdot d\vec{A} \quad \text{gibt Gesamtmenge des Durchflusses pro Zeit}$$

Definition

Sei $\vec{f}: M \rightarrow N$ mit $M, N \subset \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung einer Fläche A , so ist

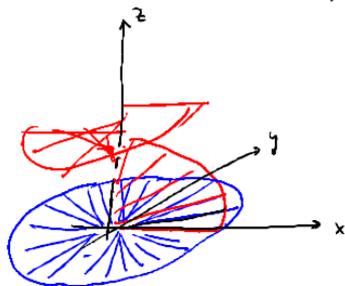
$$\iint_A \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_U \vec{f}(\vec{\phi}(u_1, u_2)) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \vec{\phi}(u_1, u_2) \times \frac{\partial}{\partial u_2} \vec{\phi}(u_1, u_2) \right) du_1 du_2$$

die Gesamtmenge des Durchflusses pro Zeit. (eindeutig bis auf Vorzeichen)

Beispiel: Fluss durch Schraubenfläche

$$\vec{\phi}:]0; 1[\times]0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$



$$\iint_A \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_U \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \right) dr d\varphi$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi \end{pmatrix} dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \sin^2 \varphi + r \cos^2 \varphi + r\varphi) dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1 + \varphi) dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \varphi) d\varphi = \pi + \pi^2 \end{aligned}$$

10 Integralsätze

10.1 Satz von Gauß

Heuristische Vorüberlegung

Quellen in einem Volumen bewirken Fluss aus dem Volumen, d.h. durch seine Begrenzungsfläche.

$$\Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{f} \, dV = \iint_A \vec{f} \, d\vec{A}$$

(A ist die Begrenzungsfläche des Volumens.)

Satz von Gauß

Sei $\vec{f} : M \rightarrow N, M, N \subset \mathbb{R}^3$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld, $V \subset M$ eine dreidimensionale Menge im \mathbb{R}^3 mit Begrenzungsfläche A, dann gilt

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{f} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iint_A \vec{f} \, d\vec{A}$$

(Alles was im Volumen V quillt, muss durch die Begrenzungsfläche!)

Beispiel: Elektrisches Feld einer homogenen geladenen Kugel

In der EII oder TIII zeigt man: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

(\vec{E} Elektrisches Feld, ρ Ladungsdichte)

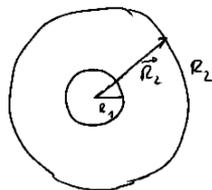
Ladungsdichte einer homogenen geladenen Kugel

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \rho_0 & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R_1^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beschreibe ρ in Kugelkoordinaten:

$$\rho(r, \varphi, \vartheta) = \begin{cases} \rho_0 & \text{falls } r \leq R_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7)$$

Skizze



Symmetriebetrachtung:

\vec{E} -Feld auf Kugelschale mit konstantem R_2 (Betrag und Richtung konst.) und \vec{E} -Feld radial nach außen/innen.

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{R}_2) = E(R_2) \vec{e}_{\vec{R}_2} \quad (8)$$

Integration von $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

rechte Seite:

$$\begin{aligned} \iiint_{\text{Kugel mit } R_2} \frac{\rho}{\epsilon_0} dx_1 dx_2 dx_3 &= \iiint_{\text{Kugel mit } R_2} \frac{\rho(r, \varphi, \vartheta)}{\epsilon_0} r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta \\ &\stackrel{(7)}{=} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \frac{R_2^3}{3} d\varphi d\vartheta \\ &= \dots = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} R_1^3 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot V_{\text{Kugel mit } R_1} \end{aligned}$$

linke Seite:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dx_1 dx_2 dx_3 \stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \stackrel{(8)}{=}$$

hier: Auf Kugeloberfläche ist $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ und konst. \Rightarrow Auf der Kugeloberfläche lebt ein konstantes E-“Betrag“-Feld.

$$\begin{aligned} &\stackrel{(8)}{=} \iint_A E(R_2) \vec{e}_{R_2} \cdot d\vec{A} \vec{e}_A = E(R_2) \iint_A dx_1 dx_2 = E(R_2) \cdot A_{\text{Kugeloberfläche}} \\ &= E(R_2) \cdot 4\pi R_2^2 \end{aligned}$$

linke Seite = rechte Seite:

$$\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R_1^3 = E(R_2) \cdot 4\pi R_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad E(R_2) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{1}{3} R_1^3 \frac{1}{R_2^2}$$

Allgemein:

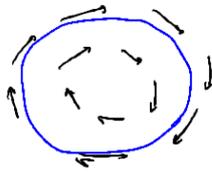
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{1}{3} R_1^3 \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (r < R_1)$$

Analog, bzw. ähnlich:

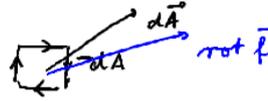
Inneres einer Kugel (E-Feld hängt nur vom eingeschlossenen Volumen ab.)

10.2 Satz von Stokes

Berechnung der Auswirkungen eines Wirbelfelds auf einen geschlossenen Weg.



mikroskopisch:



⇒ Maß für Wirbel in dA : $\text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{A}$

⇒ Gesamt: $\iint_A \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{A}$



Im Inneren der Fläche heben sich die Begrenzungslinien der Flächenstücke dA bezüglich ihrer Bewegung auf. ⇒ Rand bleibt.

$$\implies \iint_A \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{Rand}} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Satz von Stokes

Sei Γ eine geschlossene Kurve, A eine von ihr eingeschlossene (nicht entartete) Fläche, dann gilt

$$\int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \iint_A \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{A} \quad (\vec{f} \text{ Vektorfeld, stetig partiell differenzierbar})$$

Beispiel: Induktion eines E-Felds

In der EII: $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

(ein sich änderndes Magnetfeld bewirkt ein elektrisches Wirbelfeld)

Vorgaben und -Überlegungen

- $\dot{\vec{B}}$ räumlich konstant (ohne Einschränkung)
- $\dot{\vec{B}} \perp A \rightarrow \dot{\vec{B}} \parallel d\vec{A}$
- \vec{E} tangential zur Kreisbahn Γ
- $|\vec{E}|$ ist auf der Kreisbahn konstant.

Integration

$$\iint_A -\dot{\vec{B}} \, d\vec{A} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{E} \, d\vec{A} = \int_{\Gamma} \vec{E} \, d\vec{r} = \int_0^{2\pi R} E \, dr = 2\pi RE$$

Gleichzeitig:

$$\iint_A -\dot{\vec{B}} \, d\vec{A} = \iint_A -\dot{B} \, dA = -R^2 \pi \dot{B}$$

Also:

$$-R^2 \pi \dot{B} = 2\pi RE(R) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(r) = -\frac{1}{2} \dot{B} R \vec{e}_\varphi \quad (\text{Plattenkondensator})$$

Exkurs: Raumwinkel

Ausgangssituation: Flächenstück auf Kugeloberfläche.

\(\Rightarrow\) in Kugelkoordinaten:

$$\text{Volumenstück:} \quad dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr$$

$$\text{Flächenstück:} \quad dA = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\text{Winkelstück:} \quad d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

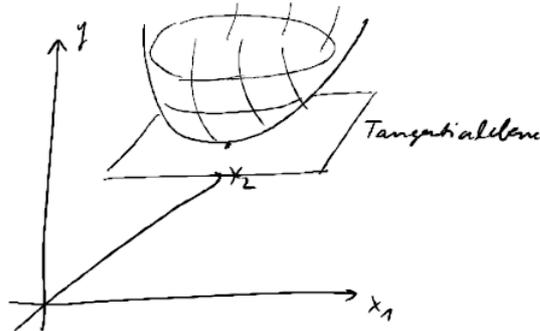
Dieses Winkelstück bezeichnet einen Raumwinkel Ω .

11 Extrema

Gleichgewichtszustände in der Physik lassen sich in der Regel durch Extremprinzipien beschreiben. (Bsp.: Energie minimal \leftrightarrow stabiles Gleichgewicht.)

11.1 Extrema ohne Nebenbedingung

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein mehrfach partiell differenzierbares Feld.



\Rightarrow Notwendige Bedingung: waagrechte Tangentialebene

- Betrachte diese Ebene als (besonders einfaches) skalares Feld:
 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem Differential $dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2$
- Da g eine Tangentialebene sein soll, muss gelten: $\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$
 Also $dg = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2$
- Für eine waagrechte Tangentialebene muss gelten: $dg = 0$
 $\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 = 0$ nur wenn $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \varphi \stackrel{!}{=} 0$ (notw. Bed. für Extrema)

Maximum oder Minimum

Zwei Möglichkeiten:

1. Lineare Algebra
2. Untersuche Umgebung auf Monotonieverhalten (aufwendig)

Beispiel

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2$$

$$\vec{\nabla} \varphi = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 = x_2$$

Da $\varphi(x_1, x_2) < 0 \quad \forall (x_1, x_2) \neq (0; 0)$ ist an der Stelle $(0; 0)$ ein Minimum.

11.2 Extrema mit Nebenbedingung

Motivation

Nicht Extrema von φ über Fläche, sondern nur über einer Bahnkurve, die durch eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x_1, \dots, x_n) = 0$ beschrieben wird.

(z.B. Kreisbahn $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - R^2 \Rightarrow$ Nebenbedingung: $x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0$)

- Es muss wieder sein: $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 (+ \dots) = 0$
- Nebenbedingung: $g(x_1, x_2) = 0$ (auf der Kurve konstant)
 $\Rightarrow dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0 \Rightarrow dx_2 = -\frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} \cdot dx_1$ (falls $\frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0$)
- dx_2 in $d\varphi = 0$: $0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cdot \left(-\frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} \right) dx_1$
 $\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \varphi / \partial x_1}{\partial g / \partial x_1}}_{=: \lambda} - \underbrace{\frac{\partial \varphi / \partial x_2}{\partial g / \partial x_2}}_{=: \lambda} = 0$

Damit ergibt sich folgendes Gleichungssystem für x_1, x_2, λ (Lagrange-Multiplikator) als notwendige Bedingung für ein Extrema:

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

$$(3) \quad g(x_1, x_2) = 0$$

Beispiel

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_1 x_2 + x_2$$

$$\text{Kreisbahn: } x_1^2 + x_2^2 = 25 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0$$

$$\Rightarrow g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 25$$

Mit den Partiellen Ableitungen erhält man folgendes Gleichungssystem (s.o.):

$$(1) \quad 2x_1 - x_2 = \lambda 2x_1 \quad | \cdot x_2 \quad \Rightarrow 2x_1 x_2 - x_2^2 = 2\lambda x_1 x_2$$

$$(2) \quad 2x_2 - x_1 = \lambda 2x_2 \quad | \cdot x_1 \quad \Rightarrow 2x_1 x_2 - x_1^2 = 2\lambda x_1 x_2$$

$$(3) \quad x_1^2 + x_2^2 = 25$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(1)-(2)}{\implies} x_1^2 &= x_2^2 \quad \rightarrow \quad x_1 = \pm x_2 \\ \stackrel{\text{in}(3)}{\implies} 2x_1^2 &= 25 \quad \rightarrow \quad x_1 = \pm \sqrt{\frac{25}{2}}; \quad 2x_2^2 = 25 \quad \rightarrow \quad x_2 = \pm \sqrt{\frac{25}{2}} \end{aligned}$$

Also sind die Punkte $\frac{1}{\sqrt{2}}(5; 5), \frac{1}{\sqrt{2}}(5; -5), \frac{1}{\sqrt{2}}(-5; 5), \frac{1}{\sqrt{2}}(-5; -5)$ Kandidaten für Extrema (sonst keine!).

Entscheidung über Extrema

1. Geschicktes Herangehen:

Kandidaten in φ einsetzen;

→ womöglich ergeben zwei Kandidaten die selben Werte;

→ mit dem Wissen aus MP1 dass ein Max. und ein Min. existieren muss, ist dann ersichtlich, welche Kandidaten Maxima und welche Minima sind.

2. Allgemeiner (Untersuche Umgebung einer mögl. Extremalstelle):

Sei (x_1^*, x_2^*) Kandidat.

Setze $x_1 = x_1^* + h$ (h klein).

Ermittle zugehöriges x_2 (x_1 in Bahnbeschr. einsetzen).

→ Vergleiche $\varphi(x_1, x_2)$ mit $\varphi(x_1^*, x_2^*)$

12 Taylorreihen

Motivation Mathematisches Pendel (E1)

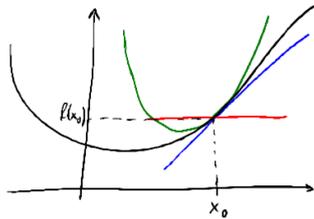
Kraftansatz: $\ddot{\varphi} = -\sin \varphi \quad \rightarrow$ nicht analytisch lösbar!

\Rightarrow Näherung für „kleine“ φ : $\sin \varphi \approx \varphi$

12.1 Taylor-Entwicklung

Gegeben sei eine beliebig oft differenzierbare Funktion: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Nähere f an einer Stelle durch Polynomfunktionen, so dass die Näherungsfunktion in möglichst vielen Ableitungen mit f übereinstimmt.



0. Schritt konstante Polynomfunktion (rot)

Übereinstimmung in 0. Ableitung (\rightarrow Funktionswert bei x_0)

$$p_0(x) = f(x_0) \quad \Rightarrow p_0 = c = \text{const.}$$

1. Schritt lineare Polynomfunktion (blau)

Übereinstimmung in 1. Ableitung (\rightarrow Tangente in x_0)

$$\text{Ansatz: } p_1(x) = f(x_0) + C \cdot (x - x_0) \quad \text{mit } C = f'(x_0) = p_1'(x_0)$$

$$\Rightarrow p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2. Schritt quadratische Polynomfunktion (grün)

Übereinstimmung in 2. Ableitung

$$\text{Ansatz: } p_2(x) = p_1(x) + C \cdot (x - x_0)^2 \quad \text{mit } 2C = f''(x_0) = p_2''(x_0)$$

$$\Rightarrow p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

3. Schritt kubische Polynomfunktion (schwarz)

Übereinstimmung in 3. Ableitung

$$\text{Ansatz: } p_3(x) = p_2(x) + C \cdot (x - x_0)^3 \quad \text{mit } 3 \cdot 2C = f'''(x_0) = p_3'''(x_0)$$

$$\Rightarrow p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

usw...

Allgemein

Der Grenzwert

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) (x - x_0)^i$$

heißt *Taylorreihe* im Entwicklungspunkt x_0 .

Ihre Partialsummen $\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) (x - x_0)^i$ sind im gutartigen Fall für wachsendes n immer bessere Näherungen von f an der Stelle x_0 und in ihrer Umgebung.

Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x, \quad x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f^{(i)} = e^x$$

$$T_{f,0}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) (x - 0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i$$

Analog für $x_0 = 1$:

$$T_{f,1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(1) (x - 1)^i = e \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (x - 1)^i$$

12.2 Konvergenz der Taylorreihe

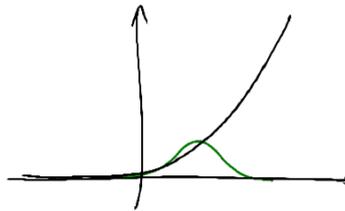
1. **gutartige Fälle:** T_{f,x_0} konvergiert gegen f

- $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$
- $\cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$
- $\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \dots + \dots$
 $\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, \frac{1}{7!} \xrightarrow{\text{schnell}} 0 \Rightarrow \sin x \approx x$ gute Näherung

2. **weniger gutartig:** T_{f,x_0} konvergiert, aber nicht gegen f

$$\text{z.B.: } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Taylorreihe bei $x_0 = 0$: $T_{f,0} = 0$



3. T_{f,x_0} konvergiert nicht.

13 Komplexe Zahlen

Problem: $x^2 = -1$ in \mathbb{R} nicht lösbar!

Frage: Lässt sich \mathbb{R} so erweitern, dass $x^2 = -1$ lösbar wird? (Analoge Frage zur Konstruktion der reellen Zahlen: lässt sich \mathbb{Q} so erweitern, dass $x^2 = 2$ lösbar wird?)

Postulat: Erweitere \mathbb{R} um eine imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$.

Um rechnen zu können, benötigt man die Struktur eines Körpers, insbesondere alle reellen Zahlen, alle reellen Vielfachen von i und Kombinationen daraus. Wenn die Rechenregeln aus \mathbb{R} gelten sollen, dann muss man Folgendes fordern:

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ muss $a + bi$ definiert sein.
- Addition zweier solcher Zahlen muss definiert sein:
 $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- Multiplikation muss definiert sein:
 $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bic + bidi = (ac - bd) + (ad + bd)i$

Existenz von i : $a + bi := (a, b) \in \mathbb{R}^2$, dann ist $i = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$

Offenbar haben wir mit obigen Rechenregeln eine Rechenstruktur (Addition + Multiplikation) auf \mathbb{R}^2 .

13.1 Definition

\mathbb{R}^2 mit obiger Rechenstruktur heißt Menge der komplexen Zahlen (Bez. \mathbb{C}).

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Existenz von Inversen

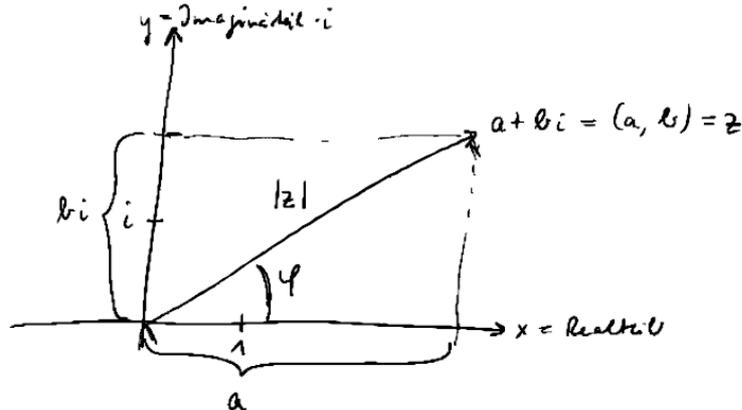
- Offenbar ist $(-a, -b)$ additiv invers zu (a, b) , denn $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$ (=neutrales Element der Multiplikation)
- Falls zu $(a + bi)$ multiplikatives Inverses existiert, muss gelten:
 $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i \in \mathbb{C}$
 \Rightarrow Nachrechnen liefert: $(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i)(a + bi) = 1$
 \Rightarrow Dividieren in \mathbb{C} möglich.

Bezeichnung

a heißt *Realteil* von $a + bi$; b heißt *Imaginärteil* von $a + bi$
 $a - bi$ heißt konjugiert komplexe Zahl \bar{z} von z .

13.2 Graphische Darstellung

Die Vektorschreibweise motiviert die Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene



13.3 Darstellung in Polarkoordinaten

$(|z|, \varphi) \in [0; \infty[\times [0; 2\pi[$, wobei

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} \quad \text{mit } \bar{z} = a - bi \quad (\text{konjugiert komplexe Zahl zu } z)$$

$$\implies z = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Die Multiplikation zweier komplexen Zahlen wird zu einer Drehstreckung, d.h. $z_1 \cdot z_2$ ergibt eine komplexe Zahl/einen Vektor mit dem Betrag $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und dem Winkel $\varphi_{z_1 \cdot z_2} = \varphi_{z_1} + \varphi_{z_2}$ (Nachrechnen).

13.4 Euler-Darstellung

Die obige Betrachtung motiviert die Darstellung

$$z = |z|e^{i\varphi} \quad \text{mit } e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Rechtfertigung:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \varphi^{2j}, & \sin \varphi &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \varphi^{2j+1} \\ \implies \cos \varphi + i \sin \varphi &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^j}{j!} = e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Folgerung:

Aus $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ und $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$ folgt

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \frac{1}{2} \left(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} \right) = \frac{1}{2} (e^{ia}e^{ib} + e^{-ia}e^{-ib}) \\ &= \frac{1}{2} ((\cos a + i \sin a) \cdot (\cos b + i \sin b) + (\cos a - i \sin a) \cdot (\cos b - i \sin b)) \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

13.5 Multiplikation in \mathbb{C}

Wie schon erwähnt, bedeutet die Multiplikation einer komplexen Zahl z_1 mit einer anderen z_2 (Drehstreckung):

1. Streckung von z_1 um $|z_2|$
2. Drehung von z_1 um φ_{z_2}

z.B. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Anwendung

1. Potenzieren einer komplexen Zahl

$$z^n = (|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi}$$

2. Radizieren einer komplexen Zahl

Bestimme die Lösung(en) der Gleichung: $z^n = a$ mit $a = |a|e^{i\varphi_a}$
 Offenbar ist eine Lösung: $z_1 = \sqrt[n]{|a|} e^{i\varphi_a/n}$
 Da aber $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ 2π -periodisch ist, ist auch Lösung:

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i(\varphi_a + 2k\pi)/n}$$

Diese Lösungen sind für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ verschieden.

\Rightarrow Zu $z^n = a$ gibt es also genau n verschiedene Lösungen (komplexe Wurzeln).

Beispiel 1: $z^4 = 2$

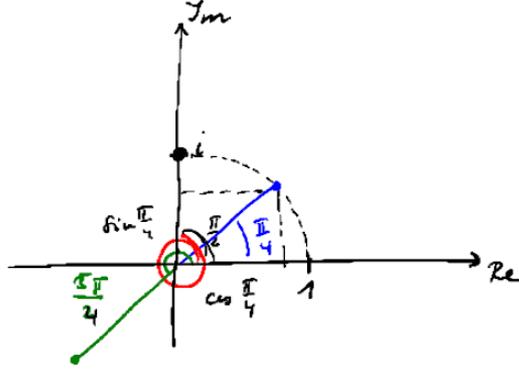
$$\begin{aligned}2 &= |2|e^{i0} \\ z_1 &= \sqrt[4]{2}e^{i(0)/4} = \sqrt[4]{2} \cdot 1 = \sqrt[4]{2} \\ z_2 &= \sqrt[4]{2}e^{i(0+2\pi)/4} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\pi/2} = \sqrt[4]{2} \cdot i \\ z_3 &= \sqrt[4]{2}e^{i(0+4\pi)/4} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\pi} = -\sqrt[4]{2} \\ z_4 &= \sqrt[4]{2}e^{i(0+6\pi)/4} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i3\pi/2} = -\sqrt[4]{2} \cdot i\end{aligned}$$

Beispiel 2: $z^2 = i$

$$i = |i|e^{i\pi/2} = e^{i\pi/2}$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = \cos 5\frac{\pi}{4} + i \sin 5\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$$



⇒ Häufigste Anwendung: **n-te Einheitswurzel**

Lösung der Gleichung $z^n = 1$: $z_k = e^{i \cdot 2k\pi/n}$ mit $k \in \{0, \dots, n-1\}$

3. Hauptsatz der Algebra (M3)

Jedes Polynom p mit den Koeffizienten in \mathbb{C}

$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ hat in \mathbb{C} genau n (nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen z_1, \dots, z_n d.h.

$$p = a_n (x - z_1) \cdots (x - z_n).$$

Ist z eine Nullstelle, dann auch \bar{z} (bei reellen Polynomen).

Beispiel: $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

13.6 Zusammenfassung

13.6.1 Darstellungen komplexer Zahlen

1. $z = a + bi$
2. $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
3. $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$
4. $\mathbf{z} = (a, b)$ (Vektor in der Gaußschen Zahlenebene)

Bezeichnungen

- in $z = a + bi$ heißt a *Realteil*, b *Imaginärteil*
- die Zahl $\bar{z} = a - bi$ heißt *konjugiert komplexe Zahl* zu z

13.6.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

- Addition: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- Multiplikation (Drehstreckung):

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- Betrag:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

- Potenzieren: $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$
- Radizieren: $\sqrt[n]{a} = z_k = \sqrt[n]{|a|} e^{i(\varphi_a + 2k\pi)/n}$
($k \in \{0, \dots, n-1\} \Rightarrow n$ Lösungen)

14 Fourierreihen

Motivation

Die Approximation durch die Taylorreihe ist manchmal nicht geeignet (keine oder langsame Konvergenz gegen die Funktion).

Restriktion auf periodische Funktionen, d.h. f mit z.B. $f(x) = f(x + 2\pi) \quad \forall x$.

14.1 Fourier-Entwicklung

Ansatz

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n) \quad \text{mit geeigneten (zu bestimmenden) } A_n \text{ und } \varphi_n$$

Additionstheoreme liefern:

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\implies F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{Fourierreihe})$$

$a_0, a_n (n \geq 1), b_n (n \geq 1)$ sind also sinnvoll zu bestimmen, so dass die Fourierreihe zu f möglichst gut die Funktion f approximiert.

Bestimmung von a_0, a_n, b_n

a_0 :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &\stackrel{!}{=} \int_{-\pi}^{\pi} F_f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx}_{=0} \\ &= a_0 \pi \quad \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

a_n :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx &\stackrel{!}{=} \int_{-\pi}^{\pi} F_f(x) \cos mx \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x \, dx}_{=0 \text{ für } n \neq m} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \dots \\ &= \frac{1}{2} a_m \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi a_m + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(n+m)x + \frac{1}{2} \sin(n-m)x \, dx}_{=0} = \pi a_m$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

b_n :

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Mathematisch

$\frac{1}{\pi} \int f(x) \cdot g(x) \, dx$ stellt im Raum der 2π -periodischen, integrierbaren Funktionen ein Skalarprodukt dar ($\sum_{i=1}^n a_i b_i$ geht im Kontinuierlichen ins Integral über).
 $\Rightarrow \cos nx, \sin nx$ entsprechen den Einheitsvektoren des \mathbb{R}^n
 \Rightarrow Funktion $F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ entspricht einem Vektor
 $\Rightarrow a_n \cos nx, b_n \sin nx$ sind die Projektionen von f auf $\sin nx$ bzw. $\cos nx$.

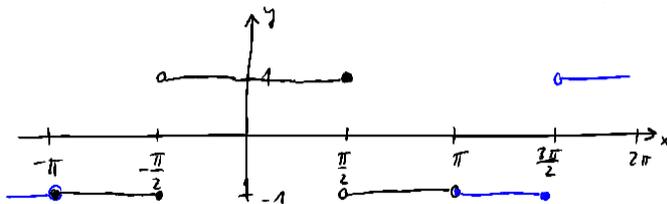
Symmetriebetrachtungen

Ist die Funktion gerade / ungerade, so sind alle $b_n = 0$ / $a_n = 0$ (Skalarprodukt), d.h.

- f gerade $\Rightarrow F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx)$
- f ungerade $\Rightarrow F_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx)$

14.2 Beispiel: Rechteckschwingung

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases} \quad (2\pi\text{-periodische Fortsetzung})$$



Bestimmung der a_i, b_i :

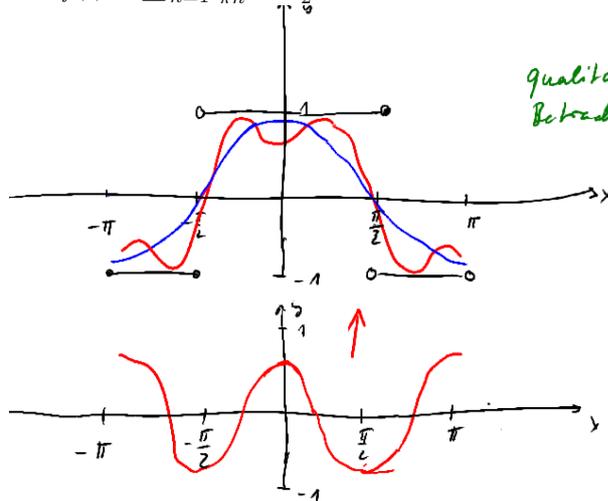
$$\bullet a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (-1) dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1) dt \right) = 0$$

$$\bullet a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (-1) \cos nt dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cos nt dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1) \cos nt dt \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nt}{n} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\sin nt}{n} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\bullet b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \text{ (Symmetrie)}$$

$$\Rightarrow F_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nt$$



Zusammenfassung

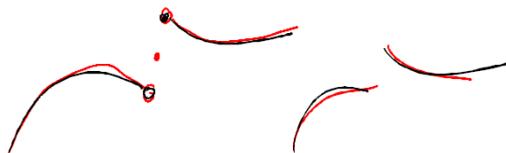
$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

14.3 Satz von Dirichlet

Sei f eine 2π -periodische Funktion, f und f' seien stückweise stetig ohne Polstellen. Dann konvergiert die Fourierreihe in allen Stetigkeitsstellen gegen f . An den Unstetigkeitsstellen ist der Wert der Fourierreihe gleich dem arithmetischen Mittel der Grenzwerte von links und rechts:

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x - \Delta x) \right)$$



14.4 2π -verschiedene Periodendauer

Oftmals liegen keine 2π -periodischen Funktionen vor, sondern die Periode hat die Dauer T . Dann ersetze x durch $z = \frac{2\pi}{T}x$ und bilde die Fourierreihe:

$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n2\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi}{T}x\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{n2\pi}{T}x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{n2\pi}{T}x\right) dx$$

14.5 2. Zugang zur Fourierreihe

Es ist im Komplexen

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$$

Betrachte die Funktionen

$$x \mapsto e^{inx} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

als „Basisfunktionen“ bzw. als Orthonormalsystem. Daraus ergibt sich:

$$F_f^{\text{kompl.}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

14.6 Spektrale Darstellung der Fourierreihe

Die Fourierreihe gibt an, wie stark die Schwingung $\cos nx$ (mit Faktor a_n) und die Schwingung $\sin nx$ (mit Faktor b_n) in der ursprünglichen Funktion enthalten ist.

Eine Umformung (Additionstheoreme) liefert:

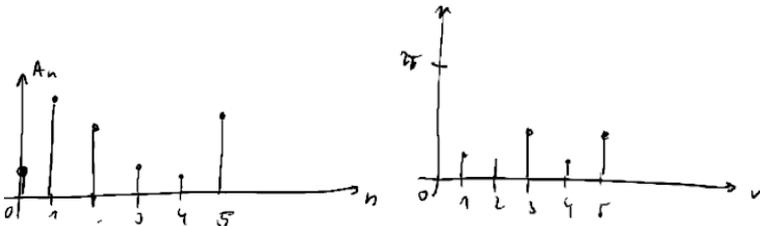
$$F_f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T}x + \varphi_n\right)$$

$$\text{mit } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

Diese Darstellung heißt *spektrale Darstellung der Fourierreihe*;

Ihre Amplituden bilden das *Frequenz- oder Fourierspektrum*, in dem veranschaulicht wird, welche Frequenz wie stark vorkommt;

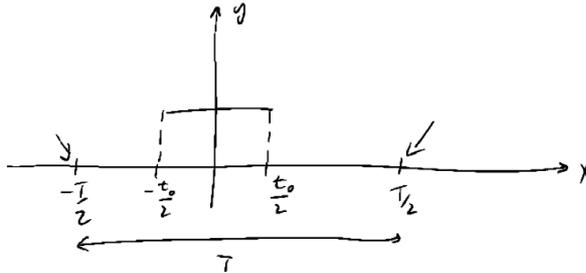
Die Phasenwinkel φ_n bilden das *Phasenspektrum*.



14.7 Fourierintegrale, Fouriertransformation

Sei

$$F_f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi t_0}{T} \cos \frac{2\pi n t}{T}$$



Die Periodendauer T entspricht einer Schwingung mit Grundfrequenz ω_0 .

\Rightarrow Die Frequenz der einzelnen Summanden: $\omega_n = n \cdot \omega_0 = n \frac{2\pi}{T}$.

$\Rightarrow T = \frac{n2\pi}{\omega_n}$ eingesetzt in $F_f(x)$:

$$F_f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \left(\omega_n \frac{t_0}{2} \right) \cos(\omega_n t) \underbrace{\Delta n}_{=1}$$

Zum einzelnen (nicht-periodischen) Signal kommt man, indem man mit $T \rightarrow \infty$ läuft, wobei dann $\omega \rightarrow 0$. Mit $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \Delta n \Rightarrow \Delta n = \frac{T}{2\pi} \Delta\omega$ ergibt sich:

$$F_f(t) = \frac{t_0}{T} + \sum_{\omega>0}^{\infty} \frac{2}{\omega\pi} \sin \left(\omega \frac{t_0}{2} \right) \cos(\omega t) \Delta\omega$$

Also für $T \rightarrow \infty$ ($\Delta\omega \rightarrow 0$) (nicht-periodisch):

$$F_f(t) = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{2}{\omega\pi} \sin \left(\omega \frac{t_0}{2} \right)}_{A(\omega)} \cos(\omega t) d\omega = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega$$

$A(\omega) = \frac{2}{\omega\pi} \sin \left(\omega \frac{t_0}{2} \right)$ heißt *Amplitudenspektrum* und gewichtet die einzelnen Frequenzen ω in der Funktion F .

Das Integral $\int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega$ heißt *Fourier-Kosinus-Transformation*.

$A(\omega)$ ist eine Verteilungsdichte von Frequenzen, deshalb macht eine Gewichtung nur in Frequenzbereichen $[\omega_1, \omega_2]$ Sinn.

Allgemein

Sei f eine *gerade*, nicht-periodische Funktion, für die $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ existiert, dann heißt

$$F(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega \quad \text{Fourier-Kosinus-Transformation}$$

$$\text{mit Amplitudenspektrum} \quad A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

Analog:

Sei f eine *ungerade*, nicht-periodische Funktion, für die $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ existiert, dann heißt

$$F(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega \quad \text{Fourier-Sinus-Transformation}$$

$$\text{mit Amplitudenspektrum} \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

Beispiel

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\frac{t_0}{2} \leq t < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{t_0}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow B(\omega) = \frac{2}{\pi\omega} \left(1 - \cos \left(\omega \frac{t_0}{2} \right) \right)$$

Noch allgemeiner

Sei f eine nicht-periodische Funktion, ..., dann heißt

$$F(t) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) \, d\omega \quad \text{mit}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

Fouriertransformierte von f .

Im Komplexen

Es ist oft vorteilhaft, dies im Komplexen zu betrachten:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \quad \text{Fouriertransformierte}$$

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \quad \text{Amplitudenfunktion}$$

$$\Rightarrow C(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \quad A(\omega) \text{ Amplitudenspektrum, } \varphi(\omega) \text{ Phasenspektrum}$$

Bemerkungen

- Die Nomenklatur ist oft uneinheitlich. Manchmal bezeichnet man das Amplitudenspektrum als Fouriertransformierte.
- Für gutartige Funktionen gilt: $f(t) = F(t)$.

qualitative Beobachtungen

...
 ...
 ...
 ...
 kommen noch...
 ...
 ...
 ...
 ...
 ...
 ...
 ...
 ...
 ...
 ...

14.8 Zusammenfassung

	reell	komplex
Fourierentwicklung:	$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	$F_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$
mit	$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$	$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$
spektrale Darst.:	$F_f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\frac{2\pi}{T}x + \varphi_n)$	
mit	$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ und $\tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$	
Fourier-Kos.-Trans.:	$F(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega$	
mit Ampl.-Spektrum	$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$	
Fourier-Sin.-Trans.:	$F(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega$	
mit Ampl.-Spektrum	$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$	
Fouriertransformierte:	$F(t) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) d\omega$	$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega$
mit		$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
bzw.		$C(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$

14.9 Bemerkungen (Skalarprodukt für Funktionen)

- Im \mathbb{R}^n ist das Skalarprodukt für Funktionen definiert:

$$f \cdot g = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$

- Mit diesem Skalarprodukt definiert man den Betrag von Funktionen:

$$\|f\| = \sqrt{f \cdot f^*} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot f^*(t) dt}$$

- Bezüglich diesem Skalarprodukt bilden $\cos nx (n \in \mathbb{N})$ und $\sin nx (n \in \mathbb{N})$ ein Orthogonalsystem.
- Die Skalarprodukte $f \cdot \cos nx$ und $f \cdot \sin nx$ sind die „Anteile von $\cos nx$ und $\sin nx$ in f “. Das heißt

$$(f \cdot \cos nx) \cdot \cos nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx \cdot \cos nx$$

ist die Projektion von f auf $\cos nx$ (vgl. Projektion von Vektor auf Basisvektor). (analog Projektion auf $\sin nx$)

\Rightarrow **Fourierreihe ist Summe dieser Projektionen** und ergibt somit wieder die Funktion (vgl. Vektor = Summe der Projektionen auf die Basisvektoren).

Das gilt für periodische Funktionen. Für nicht-periodische Funktionen geht die Summe ins Integral über.

Beispiel zum Skalarprodukt

Gegeben ist die Fourierreihe der Funktion $f(x) = \pi^2 - x^2$

mit $F_f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$. Gesucht ist der Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \cdot \delta_{mn}$$

$$\text{mit } \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \neq n \\ 1 & \text{falls } m = n \end{cases}$$

Man kann für δ_{mn} also auch schreiben $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx$.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} \cos mx \right) dx \end{aligned}$$

Korrektes Einsetzen liefert: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

15 Wahrscheinlichkeitsrechnung

15.1 Kombinatorik

In der Kombinatorik beschäftigt man sich mit der Anordnung von Elementen/Zuständen und Abzählmethoden. Häufig wird dabei das sogenannte Urnenmodell verwendet: In einer Urne seien n Kugeln...

15.1.1 Permutationen

Frage: Auf wieviele Arten lassen sich diese Kugeln anordnen?

Definition:

Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung: $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.
(n Kugeln (numeriert) \rightarrow n Plätze (numeriert))

Def./Satz:

Jede mögliche Anordnung von n Elementen heißt Permutation der n Elemente. Sind alle Elemente verschieden, dann gibt es

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{Permutationen.}$$

Sind unter den n Elementen n_1, \dots, n_k gleich mit $n_1 + \dots + n_k = n$, so gibt es

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \quad \text{verschiedene Anordnungsmöglichkeiten.}$$

15.1.2 Kombinationen

Aus der Urne werden k Kugeln gezogen (mit oder ohne Zurücklegen), wobei die Reihenfolge unberücksichtigt bleibt.

Def./Satz:

Die k gezogenen Kugeln bilden in beliebiger Reihenfolge eine Kombination k -ter Ordnung.

Erfolgt die Ziehung ohne Zurücklegen, so beträgt die Anzahl der Kombinationen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{k aus n})$$

Erfolgt die Ziehung mit Zurücklegen, so beträgt die Anzahl der Kombinationen

$$\binom{n+k-1}{k} \quad (\text{k aus n+k-1})$$

Bsp.: Lotto $\binom{49}{6} = 13.983.816$ Möglichkeiten.

15.1.3 Variationen

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden nacheinander k Kugeln entnommen. Sie bilden eine Variation k -ter Ordnung.

Def./Satz:

Variationen k -ter Ordnung entstehen, wenn jede Kugel höchstens einmal gezogen werden kann. Ihre Anzahl ist $\frac{n!}{(n-k)!}$.

15.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

15.2.1 Definitionen

Zufallsexperiment

Ein *Zufallsexperiment* ist ein Experiment, dessen Ausgang zufallsabhängig ist (im Gegensatz zum naturwissenschaftlichen Experiment) und für das folgende Bedingungen gelten:

1. Wiederholbarkeit
2. mehrere sich gegenseitig ausschließende Ausgänge sind möglich (bei gleichen Eingängen)
3. der Ausgang ist zufallsabhängig

Ergebnisraum Ω

Zu einem Zufallsexperiment sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ die Menge aller möglichen Ausgänge. Die Elemente von Ω heißen Ergebnisse des Zufallsexperiments. Ω heißt *Ergebnisraum*.

Ereignisraum \mathbb{A}

Im Allgemeinen betrachtet man hierzu die Menge aller Ereignisse. Diese Menge ist in der Regel eine Teilmenge der Potenzmenge von Ω , d.h. jedes Ereignis ist Teilmenge von Ω . (z.B. (ω_2, ω_3)). Die Menge aller Ereignisse heißt *Ereignisraum*.

Wahrscheinlichkeit

Die *Wahrscheinlichkeit* ist eine Abbildung $P : \mathbb{A} \rightarrow [0; 1]$ mit

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$,
wenn A_1, A_2, \dots paarweise disjunkte Ereignisse sind.

(In der Praxis wird P oft auf Ω definiert.)

Eigenschaften:

- $P(\{\}) = 0$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ mit $A^c = \Omega/A$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B unter der Voraussetzung, dass A bereits eingetreten ist, heißt *bedingte Wahrscheinlichkeit* und ist definiert zu

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse heißen *stochastisch/statistisch unabhängig*, wenn gilt

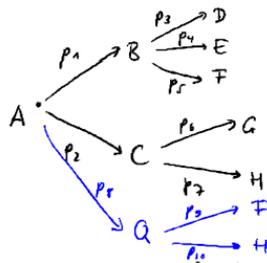
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(Plausibilitätscheck: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$.)

Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn A eingetreten ist, ist die selbe wie die, dass B eintritt (unabhängig von A).

⇒ A hat keinen Einfluss auf B.

15.2.2 Veranschaulichung: Wahrscheinlichkeitsbaum



⇒ Die *Gesamtwahrscheinlichkeit* für ein Ereignis ganz rechts:

Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem (hier eindeutigen) Pfad zu diesem Ereignis. z.B.: $P(F) = p_1 \cdot p_2$

Im Fall mehrerer möglichen Pfade wäre dann analog:

$$P(F) = \sum_{\text{Pfade}} p_i p_j$$

15.2.3 Anwendung: totale Wahrscheinlichkeit

Sind A_i Zwischenstationen auf einem Weg (von n Wegen) zu B, so gilt

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

⇒ andere Anwendung:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

15.2.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zufallsvariable X

Unter einer *Zufallsvariable* (oder Zufallsgröße), versteht man eine Abbildung, die jedem Elementarereignis A eine reelle Zahl zuordnet:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Bsp.: doppelter Würfelwurf: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$

X: Jedem Elementarereignis wird die Augenzahl zugeordnet:

$$X : (1; 1) \mapsto 2, \quad (2; 1) \mapsto 3, \quad (1; 2) \mapsto 3, \dots (6; 6) \mapsto 12$$

Die Zufallsvariable heißt

- *diskret*, wenn ihr Wertebereich endlich oder abzählbar unendlich ist,
- *stetig*, sonst.

Achtung! Funktionen, die als Zufallsvariable stetig sind, brauchen es als Funktionen nicht zu sein.

Beispiel:

$$X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in [0; \frac{1}{2}[\\ x + 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

$\Rightarrow W_x = [0; \frac{1}{2}[\cup [1\frac{1}{2}; 2[$ ist überabzählbar

$\Rightarrow X$ stetig als Zufallsvariable, aber nicht als Funktion.

Verteilungsfunktion F

Die *Verteilungsfunktion* einer Zufallsvariable X gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass X einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich einer reellen Zahl x ist:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1], x \mapsto P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Die Verteilungsfunktion hat folgende *Eigenschaften*:

1. F ist eine monoton wachsende Funktion
2. $\lim_{n \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x) = 1$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ist
 $F(a < x \leq b) = P(\{\omega \in \mathbb{R} : a < X(\omega) \leq b\}) = F(b) - F(a)$

Bemerkungen:

- Durch die Verteilungsfunktion ist die Zufallsvariable i.d.R. eindeutig festgelegt (zumindest im interessanten Bereich).
- Durch die Verteilungsfunktion ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung eindeutig festgelegt.

Wahrscheinlichkeitsdichte

Im Fall einer stetigen Zufallsvariablen lässt sich oft die Verteilungsfunktion als Integralfunktion darstellen:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

mit geeigneter sog. *Dichtefunktion* f (Wahrscheinlichkeitsdichte) mit den Eigenschaften:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
3. in geeigneten Fällen: $F' = f$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ist $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

Beispiel:

Lebensdauer einer biologisch abbaubaren Substanz:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Wahrscheinlichkeit, dass die Substanz (bzw. ein Molekül daraus) nach $t = \frac{2}{\lambda}$ noch existiert:

$$P(0 \leq T \leq \frac{2}{\lambda}) = \int_0^{\frac{2}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-2} \approx 0,86 = 86\%$$

15.2.5 Kenngrößen einer Verteilung**Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$**

Der *Erwartungswert* $\mathbb{E}(X)$ einer diskreten bzw. stetigen Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsfunktion f (ordnet jedem Wert der Zufallsvariablen die entsprechende Wahrsch. zu) ist gegeben durch:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i X_i f(X_i) \quad (\text{diskret})$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{stetig})$$

Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $Z = g(x)$, so gilt

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_i g(X_i) f(X_i) \quad (\text{diskret})$$

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (\text{stetig})$$

Der Erwartungswert gibt einen mittleren Wert der Verteilung.

Varianz und Standardabweichung σ

Die *Varianz* ist definiert zu

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \geq 0$$

Die Standardabweichung $\sigma := \sqrt{\text{Var}(X)}$ ist ein Maß für die „Breite“ der Verteilung.

Beispiel: Bernoullikette

$$\Omega = \{0; 1\}, \quad P(0) = 1 - p, \quad P(1) = p$$

n -malige (unabhängige) Wiederholung:

$$\Omega = \{0; 1\}^n, \quad P(\omega) = P((\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)) = p^{\#1en} \cdot (1-p)^{\#0en}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X), \text{Var}(X)$ auf Übungsblatt...

15.2.6 Binomialverteilung

Im Allgemeinen gibt die Bernoullikette also an, wo 1en und 0en in einem n -fach wiederholten Experiment mit Ausgang 0/1 stehen. Etwas allgemeiner interessieren oft nur die Anzahl der 1en und nicht ihre Lage.

Dazu wählt man folgende Beschreibung:

$$X : \{0; 1\}^n \rightarrow \{1, \dots, n\}, (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \omega_i$$

Die Frage lautet also: Wie sieht für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ $P(k)$ aus?

Hierzu betrachten wir:

$$X^{-1} := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \mid X((\omega_1, \dots, \omega_n)) = k\}$$

- Jedes Element dieser Menge hat die Wahrscheinlichkeit: $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

- Anzahl der Elemente dieser Menge: $\binom{n}{k}$
(Verteilung von k Kugeln auf n Plätze.)

$$\Rightarrow P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Eine solche Verteilung heißt *Binomialverteilung*.

Problem

Für große n wird obiger Ausdruck für die Binomialverteilung unhandlich, wegen den Fakultäten.

1. **Fall:** n groß, p klein (so, dass p von n abhängt und $n \cdot p_n = \mu$)
 \Rightarrow Binomialverteilung approximierbar durch die *Poisson-Verteilung*:

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu} = 1 \Rightarrow \text{Verteilung} \right)$$

Beispiel:

Ein α -Strahler emittiert Teilchen mit einer Rate von 1/min.
 In einem Messintervall von 5 min erwarten wir also 5 Teilchen:
 Erwartungswert $\mu = 5$.

2. **Fall:** n groß, p konstant.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(BV) = n \cdot p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, \quad \text{Var}(BV) = n \cdot p(1-p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

D.h. der erwartete Wert divergiert und die Verteilung zerfließt.

\Rightarrow *Normierung:* Verschieben und Stauchen

Sei X binomialverteilt zu (n, p) mit $\mathbb{E}(X) = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

dann ist für

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \Rightarrow \mathbb{E}(Z) = 0, \quad \sigma = 1$$

Säulendiagramm der Binomialverteilung:

Für $n \rightarrow \infty$: *Gaußsche Glockenkurve*

Dies führt uns zum Begriff

15.2.7 Gaußsche Normalverteilung

Definition

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X mit der Dichtefunktion (Wahrscheinlichkeitsdichte)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2}((x-\mu)/\sigma)^2}$$

und der Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1], x \mapsto P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

heißt *Gaußsche Normalverteilung*.

Sie hat den Erwartungswert μ und Standardabweichung σ .

Beispiel: IQ

Intelligenz normalverteilt mit $\mu = 100$ und $\sigma = 10$.

$$P(IQ > 130) = \int_{130}^{\infty} f(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^{130} f(x) dx \leq 1\%$$

Bemerkung: $f(x)$ ist nicht explizit integrierbar.

⇒ Aber: Nachweis der Wahrscheinlichkeitsdichte möglich!

$$\text{zz.: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r d\varphi dr = \int_0^{\infty} r e^{-\frac{1}{2}r^2} = 1 \Rightarrow I = 1$$

16 Entropie

Grundlegende Gedanken:

1. Information ist die Eigenschaft einer Nachricht beim Empfänger Wissenszuwachs zu erzeugen.
2. Information ist damit Wissenszuwachs und Abbau von Unsicherheiten.

16.1 Informationsgehalt einer Nachricht

K1: Der Informationsgehalt I_x einer Nachricht ist umso größer, je kleiner die Wahrscheinlichkeit p_x für ihr Auftreten ist (je größer der Überraschungswert).

K2: Eine Nachricht mit $p_x = 1$ hat den Informationsgehalt 0.

K3: Der Informationsgehalt voneinander unabhängiger Nachrichten soll sich addieren.

$\implies K1, K2, K3$ liefert

$$I_x = ld\left(\frac{1}{p_x}\right) = -ld(p_x)$$

Beispiel:

Sind alle N Ergebnisse gleich wahrscheinlich (Laplace-Verteilung):

$$I_x = -ld(p_x) = -ld\left(\frac{1}{N}\right)$$

16.2 Informationsgehalt eines Nachrichtensatzes

$$S = \bar{I}_x = -\sum_{k=1}^n p_x \cdot ld(p_x)$$

Diese Größe heißt *Entropie*.

(in der Physik wird oft über \ln definiert: $S := -\sum_{k=1}^n p_x \cdot \ln(p_x)$)

17 Distribution

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung mussten immer zwei Fälle betrachtet werden, nämlich getrennt *diskrete* und *stetige* Zufallsvariable.

Nun wird versucht mithilfe einer Approximation des diskreten Falls eine Verschmelzung zu einem Fall zu erreichen:

Approximation der Verteilung (punktartig) durch eine Funktion

$$g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} n & \text{für } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Weitere Möglichkeiten:

$$g_n(x) = n \cdot e^{-\pi n^2 x^2}$$

$$g_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2}$$

usw...

17.1 Die δ -Funktion

17.1.1 Definition

Die δ -Funktion $\delta(x - x_0)$ ist eine Distribution, die zusammen mit einer stetigen Funktion f und einer Integration wirkt, wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

und, die normiert ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Mathematisch exakter:

δ ist ein Operator, der zusammen mit der Integration jeder stetigen Funktion f deren Wert an der Stelle 0, also $f(0)$, zuweist. Damit ist $\delta(\cdot - x_0)$ ein Operator, der in Verbindung mit der Integration der Funktion f den Wert $f(x_0)$ zuordnet.

Allgemein

Eine Distribution ist also eine „erweiterte Funktion“, die nur in Verbindung mit der Integration definiert ist, und dort auf andere Funktionen wirkt.

Anschauliche Erklärung

- Die δ -Funktion ist „beliebig schmal“: $\delta(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\delta(0) = \infty$ so, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$
- da $f(x) \cdot \delta(x) = 0 = f(0) \cdot \delta(x) \quad \forall x \neq 0$,
ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(0) \delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = f(0)$
- Analog: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$

Beispiel: Punktladung

Ladungsdichte: $\varrho(x) = q \delta(x - x_0)$, denn damit gilt für die Gesamtladung:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} q \delta(x - x_0) dx = q \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = q \cdot 1 = q$$

17.1.2 Eigenschaften

- Für eine Funktion h ist
 - $\delta(h(x)) = 0 \quad \forall x$ mit $h(x) \neq 0$
 - $\delta(h(x)) = \infty \quad \forall$ Nullstellen von h
- δ ist gerade: $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$
- (Def.): $\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{für } a < x_0 < b \\ \frac{1}{2}f(x_0) & \text{für } a = x_0 \text{ oder } b = x_0 \\ 0 & \text{für } x_0 < a < b \end{cases}$

17.1.3 Anwendung auf eine Funktion

1. konkreter Fall: Lineare Funktion $h(x) = c(x - x_0)$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(c(x - x_0)) dx &\stackrel{y=cx}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - cx_0) f\left(\frac{y}{c}\right) \frac{1}{c} dy \\ &= \begin{cases} \frac{1}{c}f(x_0) & \text{für } c > 0 \\ -\frac{1}{c}f(x_0) & \text{für } c < 0 \end{cases} = \frac{1}{|c|}f(x_0) \end{aligned} \quad (*)$$

2. Approximation für beliebige h :

(aus Taylorreihe: $h(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}h''(x_0)(x - x_0) + \dots$)

$$h(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$$

Falls x_0 eine Nullstelle von h ist, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)) f(x) dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(h'(x_0)(x - x_0)) f(x) dx$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{|h'(x_0)|} f(x_0)$$

Bei mehreren Nullstellen ist dann $\delta(h(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{|h'(x_i)|} \delta(x - x_i)$

Beispiel

Ein Teilchen erhält zum Zeitpunkt t_0 einen Anstoß und bewegt sich sonst kräftefrei, somit gilt für seine Bewegung:

$$\ddot{x} = c \delta(t - t_0) \quad \dot{x}(-\infty) = 0 \quad x(-\infty) = 0$$

Also

$$v(t) = \dot{x}(t) = \int_{-\infty}^t \ddot{x}(t') dt' = \int_{-\infty}^t c \delta(t' - t_0) dt' = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0 \\ \frac{1}{2}c & \text{für } t = t_0 \\ c & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \dot{x}(t') dt' = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_0 \\ c(t - t_0) & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}$$

Beobachtung:

c entspricht einer Geschwindigkeit;
die δ -Funktion hat die Dimension $\frac{1}{t}$;
allgemein hat die δ -Funktion die Dimension $1/\text{Argument}$

17.1.4 Im Dreidimensionalen

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) dV = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{r}_0 \notin V \\ f(\vec{r}_0) & \text{falls } \vec{r}_0 \in V \end{cases}$$

mit $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$

In anderen Koordinatensystemen:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \delta(y_1 - y_{10}) \delta(y_2 - y_{20}) \delta(y_3 - y_{30})$$

18 Differentialgleichungen

18.0.5 Definition

Eine Gleichung, die einen Zusammenhang zwischen einer Funktion f und ihren Ableitungen beschreibt, heißt Differentialgleichung.

18.0.6 Eigenschaften

- Eine DGL ist linear, wenn sie die Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

mit $y(x) = f(x)$ und einer Funktion $g(x)$ hat.

- Ist $g(x) = 0$, so heißt sie homogen.
- Sind alle $a_n(x)$ konstant, so hat sie konstante Koeffizienten.
- Die höchste Ableitung bestimmt die Ordnung der DGL.

18.1 Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

also der Gestalt $y'(x) + h(x)y(x) = 0$

Beispiel: Stromkreis aus Kondensator und Ohmschem Widerstand

$$U_R + U_C = 0 \quad \Rightarrow \quad R \cdot I + \frac{1}{C} \cdot Q = 0 \quad \Rightarrow \quad R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

$$\text{Differentialgleichung: } \dot{Q}(t) = -\frac{1}{RC} \cdot Q(t) \quad \forall t$$

Verfahren: Separation der Veränderlichen

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}(t)}{Q(t)} &= -\frac{1}{RC} & \Leftrightarrow & \int_{t_0}^t \frac{\dot{Q}(t')}{Q(t')} dt' = -\int_{t_0}^t \frac{1}{RC} dt' \\ \Leftrightarrow \int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{1}{Q} dQ &= -\int_{t_0}^t \frac{1}{RC} dt' & \Leftrightarrow & \ln \frac{Q(t)}{Q_0} = -\frac{1}{RC}(t - t_0) \\ \Leftrightarrow Q(t) &= Q_0 e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Dies gilt für den Fall $Q(t) \neq 0 \quad \forall t$. Falls $Q(t) = 0 \quad \forall t$, ist die Lösung $Q(t) = 0$. Falls es nur endlich viele Zeiten t' gibt, für die $Q(t') = 0$, so gibt es mindestens ein t , für das $Q(t) \neq 0$ und $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$. Dieser Ausdruck ist allerdings immer ungleich Null. Also gibt es nur die beiden erwähnten Fälle.

2. Dieses Verfahren funktioniert analog bei DGLs vom Typ
 $y'(x) + h(x)g(y) = 0$, denn dann lässt sich die DGL in der Regel
 umformen zu $\frac{y'}{g(y)} = -h(x)$ und anschließend integrieren.

18.2 Homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

18.2.1 Konstante Koeffizienten

also der Gestalt $y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Ansatz

(aus DGL 1. Ordnung)

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Einsetzen

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

3 Möglichkeiten

1. $a_1^2 - 4a_0 > 0$ (Kriechfall)

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

\Rightarrow Zwei linear unabhängige Lösungen: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

Bemerkungen:

- Einsetzen liefert:
 - C_1y_1 und C_2y_2 sind auch Lösungen
 - $C_1y_1 + C_2y_2$ ist Lösung \Rightarrow Die Menge aller Lösungen ist mit der skalaren Multiplikation und der üblichen Addition ein Vektorraum (2 dim.).
- Die Lösung $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ ist i.d.R. vorzuziehen, da hier (durch Variation von C_1 u. C_2) zwei äußere Bedingungen erfüllbar sind (z.B. $y(0)=D$, $y'(0)=E$). Eine dritte Bedingung $y''(0) = F$ ist dann meist nicht mehr erfüllbar.

2. $a_1^2 - 4a_0 < 0$ (Schwingfall)

$$\Rightarrow \text{komplexe Lösungen: } \lambda_1 = \frac{-a_1 + i\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 - i\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

\Rightarrow Lösungen: $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-a_1/2 x} \cdot e^{i\sqrt{a_1^2 - 4a_0}/2 x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x} = \dots$

Bemerkungen:

- Sinn der komplexen Lösungen:
 Auch alle Linearkombinationen von y_1 und y_2 sind Lösungen:

$$\begin{aligned} y_3(x) &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{-a_1/2 x} \cdot \frac{1}{2} (e^{i\sqrt{a_1^2 - 4a_0}/2 x} + e^{-i\sqrt{a_1^2 - 4a_0}/2 x}) \\ &= e^{-a_1/2 x} \cdot \cos \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$y_4(x) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = e^{-a_1/2 x} \cdot \sin \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \in \mathbb{R}$$

- Da die Lösungsmenge wiederum mit der Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum darstellt, ist auch

$$y_5(x) = C_1 y_3(x) + C_2 y_4(x)$$

Lösung. Somit sind alle sinusförmigen Schwingungen „zwischen Sinus und Cosinus“ (Additionstheoreme) Lösungen:

$$y(x) = C e^{-\frac{a_2}{2} x} \sin \left(\frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} x + \varphi \right) \quad (C, \varphi \text{ frei wählbar})$$

3. $a_1^2 - 4a_0 = 0$ (aperiodischer Grenzfall)

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{a_1}{2} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = e^{-\frac{a_1}{2} x}$$

Mit Matrizenrechnung (aufwendig) zeigt man:

$$\exists 2. \text{ Lösung: } y_2(x) = x e^{-\frac{a_1}{2} x}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{-\frac{a_1}{2} x} (C_1 + C_2 \cdot x)$$

18.2.2 Nicht-konstante Koeffizienten

DGLen der Form: $y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$

Ein Ansatz mit $e^{\lambda x}$ führt in der Regel zu Widersprüchen. ($e^{f(x)}$ zu umständlich wegen Ketten- und Produktregel)

Ausweg:

y, y', y'', a_1 und a_0 als Taylorreihe darstellen (falls möglich) und nach x^n ordnen, was eine Reihe liefert: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Rightarrow c_n = \dots = 0$

Bemerkungen:

- Schwierigkeiten liegen hier in der Umwandlung der Potenzreihe in eine geschlossene Form.
- DGLen höherer Ordnung lassen sich oft auch nach diesem Ansatz lösen.

18.3 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

DGLen der Form: $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = f(x)$

Allgemeine Gedanken

Ist eine Lösung y_s der inhomogenen DGL gefunden und eine (weitere) Lösung y_n der homogenen DGL bestimmt, so ist auch $y := y_s + y_n$ Lösung der inhomogenen DGL.

Denn y_s in der DGL liefert $f(x)$, y_n liefert 0, also liefert $y_s + y_n$: $f(x) + 0 = f(x)$

Diese spezielle Lösung ist i. A. schwierig zu finden, deshalb zuerst:

18.3.1 Spezialfälle

1. DGLen vom Typ $y'(x) - p(x)y(x) = q(x)$

1. Schritt: löse homogene DGL

$$y_n = C \exp\left(\int p(x) dx\right)$$

2. Schritt: EINE inhomogene Lösung

$$\text{Ansatz: } y_s(x) = c(x) y_n(x)$$

- $y'_s(x) = c'(x) y_n(x) + c(x) y'_n(x) \stackrel{\text{homogene DGL}}{=} c'(x) y_n(x) + c(x) p(x) y_n(x)$
- $y'_s(x) \stackrel{\text{inhomogene DGL}}{=} p(x) y_s(x) + q(x) \stackrel{\text{Ansatz}}{=} p(x) c(x) y_n(x) + q(x)$

Insgesamt:

$$c'(x) y_n(x) + c(x) p(x) y_n(x) = p(x) c(x) y_n(x) + q(x)$$

$$c'(x) y_n(x) = q(x) \Rightarrow c'(x) = \frac{q(x)}{y_n(x)} \Rightarrow c(x) = \int \frac{q(x)}{y_n(x)} dx$$

$$\Rightarrow y_s = c(x) y_n(x) = \int \frac{q(x)}{y_n(x)} dx \cdot y_n(x)$$

3. Schritt: allgemeine inhomogene Lösung

$$y(x) = c(x) y_n(x) + y_n(x) = \int \frac{q(x)}{y_n(x)} dx \cdot y_n(x) + y_n(x)$$

$$= C \exp\left(\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi\right) \int_{x_0}^x \frac{q(\xi_1)}{C} \exp\left(-\int_{x_0}^{\xi_1} p(\xi_2) d\xi_2\right) d\xi_1 + C \exp\left(\int_{x_0}^x p(\xi_3) d\xi_3\right)$$

2. DGLen vom Typ $y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$

1. Schritt: löse homogene DGL

$$y_{1n} = \dots, \quad y_{2n} = \dots$$

2. Schritt: Allgemeine Lösung

$$\text{Ansatz: } y(x) = C_1(x) y_{1n}(x) + C_2(x) y_{2n}(x)$$

$$y'(x) = C_1'(x) y_{1n}(x) + C_1(x) y_{1n}'(x) + \dots (2 \text{ statt } 1)$$

$$y''(x) = C_1''(x) y_{1n}(x) + 2C_1'(x) y_{1n}'(x) + C_1(x) y_{1n}''(x) + \dots (2 \text{ statt } 1)$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} & (C_1' y_{1n}' + C_2' y_{2n}') + (C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n})' + C_1 y_{1n}'' + C_2 y_{2n}'' \\ & + a_1 (C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n}) + a_1 (C_1 y_{1n}' + C_2 y_{2n}') + a_0 (C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n}) \\ & = (C_1' y_{1n}' + C_2' y_{2n}') + (C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n})' + a_1 (C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n}) \\ & + C_1 y_{1n}'' + C_2 y_{2n}'' + a_1 (C_1 y_{1n}' + C_2 y_{2n}') + a_0 (C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n}) \\ & = (C_1' y_{1n}' + C_2' y_{2n}') + (C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n})' + a_1 (C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n}) \\ & + C_1 (y_{1n}'' + a_1 y_{1n}' + a_0 y_{1n}) + \dots (2 \text{ statt } 1) \\ & = (C_1' y_{1n}' + C_2' y_{2n}') + (C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n})' + a_1 (C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n}) = f \end{aligned}$$

Lösungsansatz:

$$C_1' y_{1n} + C_2' y_{2n} = 0 \quad \text{und} \quad C_1' y_{1n}' + C_2' y_{2n}' = f$$

$$\Rightarrow \text{Lineare Algebra: Lösbar, wenn } \underbrace{y_{1n} y_{2n}' - y_{1n}' y_{2n}}_{W(x)} \neq 0 \quad \forall x$$

$$\text{Mit der Wronskideterminante } W(x) = \begin{vmatrix} y_{1n}(x) & y_{2n}(x) \\ y_{1n}'(x) & y_{2n}'(x) \end{vmatrix}$$

Lösungen:

$$C_1'(x) = \frac{-f(x) y_{2n}(x)}{W(x)} \quad C_2'(x) = \frac{-f(x) y_{1n}(x)}{W(x)}$$

18.4 Partielle Differentialgleichungen

Problemstellung: Gesucht ist eine Funktion, die von mehreren Variablen abhängt und einer Gleichung mit partiellen Ableitungen genügt. Diese Gleichung heißt partielle Differentialgleichung.

Beispiel:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{mit} \quad y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto y(x, t)$$

Überlegung

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, dann ist

$$y(x, t) = g(vt - x)$$

Lösung, wie man leicht nachrechnet. Das sind allerdings sehr viele, i.d.R. nicht brauchbare Lösungen. Deshalb versuchen wir aus der partiellen DGL eine „normale“ zu machen:

Entkoppelung von t und x

Ansatz: $y(x, t) = g(x)h(t)$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(g(x)h(t))}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2(g(x)h(t))}{\partial x^2} &\Leftrightarrow & g(x) \frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} = v^2 h(t) \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\ddot{h}(t)}{h(t)} &= v^2 \frac{g''(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

\Rightarrow da $\frac{\ddot{h}(t)}{h(t)}$ unabh. von x und $v^2 \frac{g''(x)}{g(x)}$ unabh. von t ist, ist auch die jeweils andere Seite unabhängig von x bzw. t . Also:

$$\frac{\ddot{h}(t)}{h(t)} = k = v^2 \frac{g''(x)}{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{h}(t) = k h(t) \quad \text{und} \quad g''(x) = \frac{k}{v^2} g(x)$$

Was nun ohne Probleme zu lösen ist, z.B.: $h(t) = e^{\pm\sqrt{k} t}$
Dies ist allerdings nur für $k < 0$ sinnvoll:

$$h(t) = e^{\pm i\sqrt{k} t} = A \cos(\sqrt{k} t) + B \sin(\sqrt{k} t)$$

$$g(x) = C \cos\left(\frac{1}{v}\sqrt{k} x\right) + D \sin\left(\frac{1}{v}\sqrt{k} x\right)$$

19 Matrizen

19.0.1 Definition

Ein rechteckiges Zahlenschema (a_{ij}) mit $a_j \in \mathbb{R}$ od. \mathbb{C} der Art

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$$

heißt $m \times n$ - Matrix, bestehend aus m Zeilen und n Spalten.

19.1 Eigenschaften

- Ist $m = n$, so spricht man von einer *quadratischen Matrix*.
- Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ sind *gleich*, falls $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$. Insbesondere müssen A und B vom gleichen $(m \times n)$ - Typ sein.
- Die *Nullmatrix* ist definiert zu der Matrix, für die $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$
- Eine Matrix heißt *symmetrisch*, wenn $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$
- Bezeichnet man die a_{ii} als *Diagonalelemente*, so ist eine Matrix genau dann symmetrisch, wenn sie sich bei Spiegelung an ihren Diagonalelementen nicht ändert (hierfür notwendig: $m = n$)
- Eine *Diagonalmatrix* hat nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente

$$d_{ij} = d_{ii}\delta_{ij} \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

- Für die *Einheitsmatrix* gilt zusätzlich zur Diagonalmatrixeigenschaft, dass alle $d_{ii} = 1$.
- Zu einer gegebenen $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ergibt sich die *transponierte Matrix* A^T durch Spiegelung an der Diagonalen bzw. durch Vertauschen von Zeilen und Spalten. ($A^T = A \Leftrightarrow A$ symmetrisch)
- Spaltenvektoren können als $(n \times 1)$ - Matrix und Zeilenvektoren als $(1 \times m)$ -Matrix gesehen werden.
- Interpretiert man die Spalten bzw. Zeilen als Vektoren, so definiert die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren den *Spalten-* bzw. *Zeilenrang*. Beide sind gleich, d.h. *Rang* := Zeilenrang = Spaltenrang.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{hat Zeilenrang } 2$$

Spaltenrang:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{sind linear unabh.}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{linear abh.}$$

Also hat A auch Spaltenrang 2.

19.2 Rechenregeln

- Addition:

Seien $A = (a_{ji}), B = (b_{ij})$ zwei $m \times n$ - Matrizen, so definiert man

$$C := A + B = c_{ij} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

- Skalare Multiplikation:

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$

- Multiplikation:

Seien $A = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$ -Matrix, $B = (b_{ij})$ eine $(n \times r)$ -Matrix, so lässt sich

$$C = (c_{ij}) = A \cdot B \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{definieren.}$$

C ist dann $(m \times r)$ -Matrix.

Bemerkungen

- c_{ij} ist Skalarprodukt aus i -tem Zeilenvektor von A mit j -tem Spaltenvektor von B .
- $A \cdot B$ ist nur dann möglich, wenn Spaltenzahl von $A =$ Zeilenzahl von B .
- Selbst für quadratische Matrizen ist in der Regel $A \cdot B \neq B \cdot A$

19.3 Lineare Abbildungen

Sei B eine $(n \times r)$ -Matrix, so lässt sich mit B eine Abbildung f_B definieren:

$$f_B : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \mapsto B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

mit den Eigenschaften:

1. $f_A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x} + \vec{y}) = \dots = A\vec{x} + A\vec{y} = f_A(\vec{x}) + f_A(\vec{y})$
2. $f_A(\lambda\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \dots = \lambda(A\vec{x}) = \lambda f_A(\vec{x})$

Definition

Eine Funktion mit obigen Eigenschaften **1** und **2** heißt *lineare Funktion*.

Bemerkung

Für eine (1×1) -Matrix $A = (a)$ wäre die zugehörige lineare Funktion: $f_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax$. D.h. nach dieser Definition ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ keine lineare Funktion.

19.3.1 Extraktion der Spaltenvektoren

Setzt man im Argument Einheitsvektoren ein, so erhält man mit der Abbildung

$$f_A(\hat{e}_i) = A \cdot \hat{e}_i$$

die i -te Spalte von A . Entsprechend erhält man nach Eigenschaft **19.3.0.2** für ein Vielfaches eines Einheitsvektors das entsprechende Vielfache des Spaltenvektors.

D.h. für die Beschreibung einer linearen Abbildung genügt es, die Bilder der Einheitsvektoren \hat{e}_i zu kennen, denn jeder Vektor $\vec{x} \in V$ (V Vektorraum) lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen und mit den Eigenschaften **19.3.0.1** und **19.3.0.2** ergibt sich:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{\dim V} x_i f(\hat{e}_i)$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

Genauso: $f(\vec{x}) = x_1 f(\hat{e}_1) + x_2 f(\hat{e}_2) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

19.4 Eigenwerte

Gilt nur für Quadratische Matrizen.

Definition

Ein $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert* und ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq 0$ Eigenvektor zur Matrix A , wenn gilt

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

Man spricht dann von einer Diagonalisierung der Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

19.4.1 Verfahren zum Finden der Eigenwerte und -vektoren

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$A \cdot \vec{x} = E \lambda \vec{x}$$

$$(A - E\lambda)\vec{x} = 0$$

Nur lösbar, wenn es keine Matrix B gibt mit $B(A - \lambda E) = E$, denn sonst wäre

$$B(A - \lambda E)\vec{x} = B \cdot 0 = 0 \quad \text{und} \quad B(A - \lambda E)\vec{x} = E \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \text{aber} \quad \vec{x} \neq 0$$

Dies ist zu bewerkstelligen mit der Forderung, dass die Determinante von $A - \lambda E$ verschwindet.

19.4.2 Determinante

Sei A eine quadratische Matrix, dann berechnet sich die Determinante dieser Matrix wie folgt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ + (-1) a_{12} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - + \dots$$

Regel: Durchlaufe z.B. die erste Zeile; bilde die Summe aus den Produkten des jeweiligen Elements der ersten Zeile in der i-ten Spalte mit der Determinante der Matrix, in der die 1. Zeile und i-te Spalte gestrichen ist; alterniere bei den Summanden das Vorzeichen:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{2i-1} \cdot a_{1i} \cdot \det(\tilde{A}_i)$$

Bemerkungen

- Man definiert für $n=1$: $\det A = a_{11}$
- Analog kann man anstatt der 1. Zeile auch eine beliebige Zeile oder Spalte durchlaufen.

Eigenschaften

- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- $\det E = 1$
- Wenn $A \cdot B = E$ ist also $1 = \det E = \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
 $\implies \det A \neq 0$ und $\det B \neq 0$

Allgemein:

$\det A \neq 0$ genau dann, wenn es B gibt mit $A \cdot B = B \cdot A = E$
 (A heißt dann invertierbar)

19.4.3 Diagonalisierung

Hierfür ist nötig (siehe oben): Es darf keine Matrix B geben mit $B(A - \lambda E) = E$, also:

$$\det(A - \lambda E) \stackrel{!}{=} 0$$

So können die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und daraus die Eigenvektoren bestimmt werden.

19.4.4 Anwendung

Mit den Eigenwerten einer Matrix, lässt sich eine Diagonalmatrix erstellen:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Multipliziert man diese Matrix mit den Basisvektoren, so ergibt sich

$$D \cdot \hat{e}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \hat{e}_1, \text{ usw... allg.: } D \cdot \hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot \hat{e}_i$$

Also hat D dieselben Eigenwerte wie A und die Eigenvektoren \hat{e}_i .

Transformation der Eigenvektoren

Die Eigenvektoren von D (\hat{e}_i) lassen sich auf die Eigenvektoren von A (\vec{x}_i) abbilden:

$$\vec{x}_i = \underbrace{(\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \dots \ \vec{x}_i \ \dots \ \vec{x}_n)}_S \cdot \hat{e}_i$$

NOCH UNVOLLSTÄNDIG
FORTSETZUNG FOLGT...